ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС ТУРНИРА ГОРОДОВ 2019-2020

Конкурс рассчитан на учеников 9-11 классов.

Фиолетовая задача

А. К. Толпыго

Круг задач, который мы рассмотрим, довольно широк. Тем не менее его можно описать одной фразой, а именно:

Как часто бывает, что число делится на сумму своих цифр?

Поскольку однозначные числа заведомо удовлетворяют этому свойству, сразу условимся, что мы рассматриваем только числа, в которых не менее двух (или даже лучше, не менее трёх) знаков.

Определение 1. Назовём число *фиолетовым*, если оно **а)** больше 100 и **б)** делится на сумму своих цифр.

Понятно, что фиолетовыми являются все числа, у которых сумма цифр равна 1, 3 или 9. Но нетрудно придумать и другие примеры. Фиолетовыми являются, например, числа 224, 605 или 999 999 999.

Задача 1. Доказать, что для любого натурального m существует фиолетовое число с суммой цифр m.

Займёмся прежде всего такими вопросами:

— сколько фиолетовых чисел может стоять подряд?

— какова доля фиолетовых чисел среди первых N чисел натурального ряда, и как ведёт себя эта доля?

Задача 2. Сколько фиолетовых чисел может стоять подряд (т.е. так, чтобы все k подряд идущих чисел $m, m+1, \ldots, m+k-1$ были фиолетовыми)? В частности, может ли k **а)** равняться 5? **б)** равняться 10? **в)** быть сколь угодно большим?

Задача 3*. (*трудная*) Каково максимально возможное k? *Если не можете дать точный ответ, приведите какую-нибудь оценку сверху и снизу (например: 55 чисел подряд быть фиолетовыми не могут, а для 27 можно построить пример).*

Подскажем, что для решения приведённых (и дальнейших) задач полезна *обобщенная китайская теорема об остатках.*

Теорема 1. (Китайская теорема об остатках) *Пусть даны произвольные взаимно простые натуральные числа $q_1, q_2, \ldots q_k$ и произвольные натуральные $r_1, \ldots, r_k$ такие, что $0 \leqslant r_i \leqslant q_i$ для всех i. Тогда существует число N, которое даёт при делении на q_i остаток r_i.*

Теорема 2. (Обобщенная китайская теорема об остатках) *Пусть даны произвольные натуральные числа $q_1, q_2, \ldots q_k$ и произвольные натуральные $r_1, \ldots, r_k$ такие, что $0 \leqslant r_i \leqslant q_i$ для всех i. Пусть d_{ij} – наибольший общий делитель чисел q_i и q_j. Число N, которое даёт при делении на q_i остаток r_i, существует тогда и только тогда...*

Задача 4. Закончите формулировку обобщенной китайской теоремы об остатках и докажите её.

Задача 5. Сколько фиолетовых чисел может быть в одной сотне, т.е. среди чисел от k до $k+99$? (укажите все возможные ответы)

Задача 6. Дайте оценку количества фиолетовых чисел в первом миллионе. Требуется дать оценку сверху и снизу так, чтобы верхняя отличалась от нижней не более чем в 10 раз.

Задача 7. Пусть $M(N)$ — количество фиолетовых среди первых N чисел. Докажите, что при $N \to \infty$ отношение $M(N)/N$ имеет предел, и найдите его.

* * *

Теперь видоизменим нашу задачу, а именно, будем рассматривать только числа с данной суммой цифр. Итак, пусть задано некоторое натуральное S. Выберем произвольное N, и пусть $K = K(S)$ — множество всех чисел с суммой цифр S, не превосходящих N, а $\Lambda = \Lambda(S)$ — его подмножество, состоящее из фиолетовых чисел (т.е. из чисел, делящихся на S). Пусть k и l — количество элементов в множествах K и Λ соответственно, и наконец, пусть $\alpha(S)$ — предел отношения l/k, когда N неограниченно возрастает.

Задача 8. Докажите, что для любого натурального S предел $\lim\limits_{N\to\infty} \alpha(S)$ существует и положителен.
Задача 9. Найдите $\alpha(S)$ для $S = 1, 2, \ldots, 12$.
Примечание 1. Особо обратите внимание на случаи $S = 7, S = 11$.
Примечание 2. Нахождение этого предела для других S также поощряется. В частности, рекомендуется исследовать числа 14, 27, 101.
Задача 10*. (*трудная*) Докажите, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех простых чисел p, кроме конечного числа, выполняется неравенство $|\alpha(p) - 1/p| < \varepsilon$.

* * *

Введенное нами понятие фиолетового числа, очевидно, связано с десятичной записью числа: мы проверяем, делится ли N на M, причём само число N, естественно, не зависит от выбора системы счисления, а вот его сумма цифр M — зависит.
Задача 11. Исследовать вопрос: может ли многозначное число, т.е. состоящее из 2 и более цифр (знаков) иметь одинаковую сумму цифр в разных системах счисления? Приведите соответствующие примеры. Выясните, насколько часто встречаются такие числа.

Обобщим наше определение фиолетового числа.
Определение 2. Пусть даны произвольные натуральные числа N, q. Число N называется q-фиолетовым, если оно больше q^2, и если оно делится на свою сумму цифр в q-ичной системе счисления.

Например, число 231 является 11-фиолетовым, поскольку $231 = 121 + 10 \cdot 11$ и, соответственно, в одиннадцатиричной системе счисления имеет вид 1[10]0 (трёхзначное число с цифрами 1, 10, 0).
Задача 12. Какое наибольшее число 2-фиолетовых чисел может стоять подряд?
Задача 13. Дайте оценку для возможного количества q-фиолетовых чисел подряд при произвольном заданном q.
Задача 14. Верно ли, что для любого m существует такое q, что в q-ичной системе счисления существует m q-фиолетовых чисел подряд?

Решения задач можно присылать до 1 марта 2020 года (допускается присылать частями):
– по электронной почте на zktg@turgor.ru *(в теме письма укажите свою фамилию, имя и город)*,
просьба сканировать и присылать либо файл формата .pdf либо zip-архив картинок в формате .jpg, .png или .gif;
– обычной почтой в МЦНМО по адресу:
РФ, 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11, МЦНМО, Турнир городов (Заочный конкурс);
– оставить на вахте в МЦНМО с пометкой «Турнир городов. Заочный конкурс».

Вся актуальная информация о конкурсе размещена на сайте https://www.turgor.ru/zktg/ .
По всем вопросам, касающихся заочного конкурса, обращайтесь по электронной почте zktg@turgor.ru.