41-й Международный математический Турнир городов

2019/20 учебный год

Решения задач

(*под редакцией Л. Медникова и А. Семенова*)

Весенний тур

Базовый вариант

Младшие классы

1. [4] Карта Квадрландии представляет собой квадрат 6×6 клеток. Каждая клетка – либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (то есть клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Может ли быть, что на каждые две спорные территории претендует разное число королевств?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: может.
Решение. На рисунках приведены примеры Квадрландий. Пустые клетки – королевства, а цифра в клетке бозначает, сколько королевств претендует на эту спорную территорию).

0	2				3
1	4				
	5				
	6				
	7			8	

0	2				
1	3			8	
	5	6			
			7		
		4			

0	2				
1	4			8	
	5				
3					
	6	7			

0	2				
1	4		8		
	5				
		6	7		
3					

2. [4] Какое наибольшее количество различных целых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?

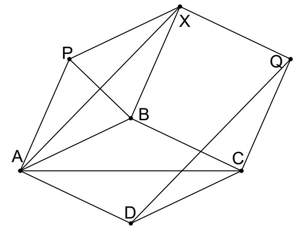
(*Е. Бакаев*)

Ответ: 22 числа.

Решение. *Оценка*. Предположим, что получилось выписать такие различные числа x_1, …, x_{23}, что сумма каждых 11 подряд идущих равна A или B. Пусть $S_k = x_k + \ldots + x_{k+10}$. Заметим, что $S_k \neq S_{k+1}$ (иначе $x_k = x_{k+11}$). Значит, $S_k = S_{k+2}$. Поскольку $x_1 + S_2 + S_{13} = S_1 + S_{12} + x_{23}$, то $x_1 = x_{23}$. Противоречие.
Пример. Выберем 10 натуральных чисел с шагом 3, а одиннадцатое – дополняющее их сумму до 100. Тогда ряд x_1, …, x_{11}, $x_1 + 1$, $x_2 - 1$, $x_3 + 1$, $x_4 - 1$, …, $x_{11} + 1$ будет искомым. Например, так: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, –35, 1, 2, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 25, 26, – 34.

3. [4] На диагонали AC ромба $ABCD$ построен параллелограмм $APQC$ так, что точка B лежит внутри него, а сторона AP равна стороне ромба. Докажите, что B – точка пересечения высот треугольника DPQ.

(*Е. Бакаев*)



Решение. Построим ромб $APXB$. Тогда четырёхугольник $CBXQ$ – тоже ромб, а $ADQX$ – параллелограмм. Поэтому $PB \perp AX \parallel DQ$, то есть прямая PB содержит высоту треугольника DPQ. Аналогично, прямая QB содержит высоту треугольника DPQ, что и требовалось.

4. [5] Целое число n таково, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$ имеет решение в целых числах. Докажите, что тогда и уравнение $x^2 + y^2 - xy = n$ имеет решение в целых числах.

(*А. Юран*)

Решение следует из тождества

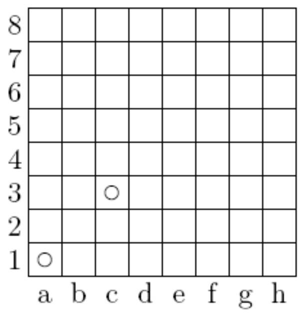
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x - z)^2 + (y - z)^2 - (x - z)(y - z).$$

Два пути к решению. **1**. Естественное желание – умножить левую часть на 2 и разложить в сумму квадратов разностей. Получим $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2n$, что после переобозначения примет вид $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = 2n$ или $a^2 + b^2 + ab = n$. Осталось поменять знак у a.

2. Заметим, что увеличение всех переменных на одно и то же число не меняет выражения. Так давайте вычтем из всех переменных по z и получим требуемое.

5. [5] На доске 8×8 в клетках a1 и c3 стоят две одинаковые фишки. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. В свой ход игрок выбирает любую фишку и сдвигает её либо по вертикали вверх, либо по горизонтали вправо на любое число клеток. Выиграет тот, кто сделает ход в клетку h8. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? В одной клетке может стоять только одна фишка, прыгать через фишку нельзя.

(*В. Ковальджи*)



Ответ: Вася.

Решение. Вася сделает так, что Петя первым выскочит на верхнюю или правую линию. Как только это произойдёт, Вася сдвинет эту фишку в h8 и победит. До этого Вася придерживается следующей стратегии.

Изначально фишки стоят на диагонали a1 – h8, не соседствуя. Петя сбегает с неё, а Вася, если может, возвращает эту фишку на диагональ, сохранив указанную ситуацию. Вася не сможет это сделать только тогда, когда фишки окажутся в одной или соседних линиях. Тогда Вася сделает такой ход, что фишки образуют доминошку. Ясно, что это возможно. После этого Вася будет сохранять доминошку, то есть повторять ход Пети другой фишкой. В конце концов, Петя первым выскочит на верхнюю или правую линию.

Старшие классы

1. [4] Можно ли в каждую клетку таблицы 40×41 записать по целому числу так, чтобы число в каждой клетке равнялось количеству тех соседних с ней по стороне клеток, в которых написано такое же число?

(*А. Грибалко*)

Ответ: можно.

Пример 1. Сделаем это для произвольной таблицы. Разобьём её сеткой на прямоугольники так, что ширина полос по каждому направлению чередуется: 1, 2, 1, 2.... Ясно, что это возможно. Тогда таблица разобьётся на квадраты 2×2, домино 1×2 и квадратики 1×1. В квадраты впишем двойки, в домино – единицы, в квадратики – нули. Условие будет выполнено, поскольку фигурки одного вида не имеют общих сторон.

Пример 2. Разобьём таблицу на чередующиеся прямоугольники 1×41 и 3×41. В больших окантовку заполним двойками. Оставшиеся полоски $1\times n$ разобьём на чередующиеся доминошки (с единицами) и квадратики (с нулями).

Замечание. Есть и другие примеры, но все они состоят из 0, 1 и 2.

2. [4] Обсуждая в классе зимние каникулы, Саша сказал: «Теперь, после того как я слетал в Аддис-Абебу, я встречал Новый год во всех возможных полусферах Земли, кроме одной!» В каком минимальном количестве мест встречал Новый год Саша? Места, где Саша встречал Новый год, считайте точками на сфере. Точки на границе полусферы не считаются принадлежащими этой полусфере.

(*И. Думанский, Р. Крутовский*)

Ответ. В четырёх местах.

Решение. *Оценка*. Предположим, что хватило трёх точек. Они определяют плоскость. Если она проходит через центр сферы, то Саша не бывал в двух полусферах, высекаемых этой плоскостью. Противоречие.

Если не проходит, то параллельной плоскостью отсечём полусферу, в которой Саша не бывал. Во всех полусферах, получаемых из неё малым шевелением, Саша тоже не бывал. Снова противоречие.

Пример. Возьмём на некоторой большой окружности три точки, образующие остроугольный треугольник, и любую точку вне её (это можно сделать так, что одной из точек будет город, в котором живёт Саша, а другой – Аддис-Абеба). Из двух полусфер, высекаемых этой окружностью, Саша не бывал ровно в одной. Если же провести через центр Земли другую плоскость, то она высечет диаметр в исходной окружности, по каждую сторону от которого будет точка, в которой Саша бывал.

Замечание для придир. Диаметрально противоположная к Аддис-Абебе точка находится в Тихом океане, и Саша там жить не может.

3. [5] По кругу стоят буквы A и B, всего 41 буква. Можно заменять ABA на B и наоборот, а также BAB на A и наоборот. Верно ли, что из любого начального расположения можно получить такими операциями круг, на котором стоит ровно одна буква?

(*М. Дидин*)

Ответ: верно.

Решение. Разобьём все буквы на группы одинаковых подряд идущих. Количество букв нечётно, поэтому найдётся «нечётная» группа. Заменами AA ↔ BABA ↔ BB сделаем из неё однобуквенную группу, после чего будем удалять соседей этой буквы, пока это возможно. Действуя таким образом, оставим только одну букву.

4. Существует ли непостоянный многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, который можно представить в виде суммы $a(x) + b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – квадраты многочленов с действительными коэффициентами,

а) [2] ровно одним способом?

б) [3] ровно двумя способами?

Способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

(*С. Маркелов*)

Ответ: не существует.

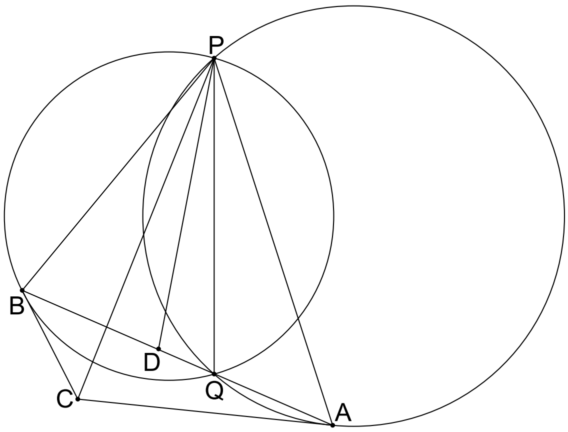
Решение. Пусть ненулевой многочлен P представим в виде суммы квадратов двух многочленов, то есть $P = F^2 + G^2$. Заметим, что $F^2 + G^2 = (cF + sG)^2 + (sF - cG)^2$, где $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$. Полагая $0 \le \alpha < {}^{\pi}/_{2}$, получим бесконечно много представлений.

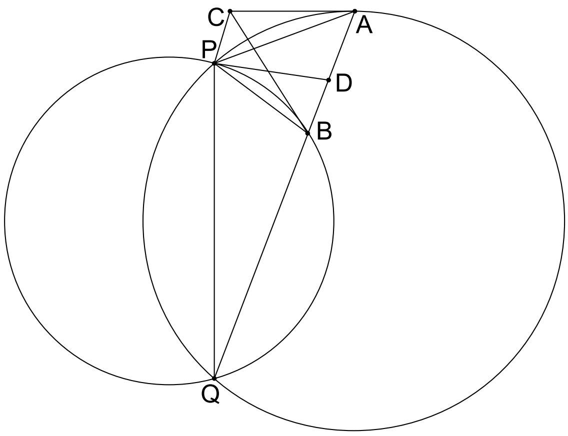
Допустим, какие-то два из них совпадут. То есть $(c_1F + s_1G)^2 = (c_2F + s_2G)^2$ или $(c_1F + s_1G)^2 = (s_2F - c_2G)^2$. Перенося влево и раскладывая на множители, получим, что какая-то из скобок равна нулю в бесконечном числе точек, следовательно, в ней стоит нулевой многочлен. Посмотрим на коэффициенты перед F и G в этой скобке. Хотя бы один из них не равен нулю, так как числа $c_1 + c_2$, $c_1 - c_2$, $c_1 + s_2$, $s_1 + c_2$ ненулевые. Значит, F и G линейно зависимы. Можно считать, что $G = tF$ для некоторого числа t. Тогда $P = (1 + t^2)F^2$. Поскольку F – ненулевой, то, по-разному раскладывая $1 + t^2$ в сумму квадратов двух чисел, получим бесконечное число представлений многочлена P.

5. [5] Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Произвольная прямая l, проходящая через Q, повторно пересекает окружности в точках A и B. Прямые, касающиеся окружностей в точках A и B, пересекаются в точке C, а биссектриса угла CPQ пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что все точки D, которые можно так получить, выбирая по-разному прямую l, лежат на одной и той же окружности.

(*А. Заславский*)

Решение. Пусть A лежит на одной окружности, B – на другой. Два различных случая расположения приведены на рисунках. Решение годится для всех случаев.





По теореме об угле между хордой и касательной получаем равенство ориентированных углов $(AC,AP)=(AQ,QP)=(BC,BP)$. Следовательно, точка C лежит на описанной окружности треугольника APB. Тогда $(CP,PB)=(CA,AB)=(AP,PQ)$, т.е биссектрисы неориентированных углов CPQ и BPA совпадают или перпендикулярны.

Если точка Q лежит между A и B, то $APBC$ – выпуклый четырехугольник. Если же, например, B лежит между Q и A, то $PBAC$ – выпуклый четырехугольник. В обоих случаях PD – биссектриса треугольника PAB. Нетрудно видеть, что все эти треугольники подобны друг другу и одинаково ориентированы. Значит, все треугольники PAD также подобны друг другу и при движении точки A по окружности D также движется по окружности.

Сложный вариант

Младшие классы

1. [4] Существует ли число, кратное 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ... , 9 поровну?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: существует.

Решение. $2020 = 20\cdot 101$, поэтому, например, число 10198987676545432320 подходит.

Замечания. Можно использовать и другие идеи. Так, поскольку 1111 делится на 101, подходит число 111122223333…99990000. Так как $10^{10} + 1$ делится на 101, то подходит 12345679801234567980.

Также есть подходящие числа, в которых каждая цифра повторяется по одному разу, например, 1237548960. В подборе этих чисел может помочь признак делимости на 101, который аналогичен признаку делимости на 11: если разбить запись числа на блоки по две цифры (начиная с конца), то знакопеременная сумма полученных двузначных чисел должна быть кратна 101 (например, $12 - 37 + 54 - 89 + 60 = 0$).

2. [5] Три богатыря бьются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает Змею половину всех голов и ещё одну, Добрыня Никитич – треть всех голов и ещё две, Алёша Попович – четверть всех голов и ещё три. Богатыри бьют по одному в каком хотят порядке, отрубая каждым ударом целое число голов. Если ни один богатырь не может ударить (число голов получается нецелым), Змей съедает всех троих. Смогут ли богатыри отрубить все головы 41!-головому Змею?

(*А. Заславский*)

Ответ: смогут.

Решение. Если число голов чётно, богатыри могут уменьшить его, сохранив чётность. Действительно, если голов $4n - 2$, то после удара Ильи их станет $2n - 2$.

Если же голов $4n$, то после удара Алёши их станет $3n - 3$, а после следующего за ним удара Добрыни их станет $2n - 4$.

Богатыри могут так действовать, пока не останется четыре или две головы, для которых хватит одного удара Алёши или Ильи соответственно.

Замечание. Если число голов нечётно, но делится на 3, то богатыри также справятся со Змеем. А вот если оно не кратно ни 2, ни 3, то богатыри гибнут сразу.

3. Существует ли вписанный в окружность N-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если

а) [4] $N = 19$;

б) [3] $N = 20$?

(*М. Малкин*)

а) **Ответ:** не существует.

Решение. Пусть такой 19-угольник существует. Рассмотрим вписанные углы, опирающиеся на его последовательные стороны. Все они разные, и сумма каждых двух углов, соответствующих соседним сторонам, целая (она дополняет один из углов 19-угольника до 180°). Рассмотрим два случая.

1) Все эти вписанные углы выражаются целым числом градусов. Тогда их сумма не меньше $1° + 2° + ... + 19° > 180°$, что невозможно.

2) Есть угол с ненулевой дробной частью ε. Тогда у соседнего угла дробная часть равна $1 - \varepsilon$, у следующего – снова ε и т.д. Поскольку 19 – нечётное число, то $\varepsilon = ½$. Но тогда сумма углов, опирающихся на все стороны, не меньше $(½° + 1½° + 2½° + ... + 18½°) = ½\,(1° + 3° + 5° + ... + 37°) = ½\cdot 361° > 180°$. Снова противоречие.

б) **Ответ:** существует.

Пример. Пусть вписанные углы, опирающиеся на последовательные стороны 20-угольника, равны $4^1/_3°$, $4^2/_3°$, $5^1/_3°$, $5^2/_3°$, ..., $13^1/_3°$, $13^2/_3°$. Сумма этих чисел равна $2(4° + 5° + ... + 13°) + 10° = 180°$. Каждый угол 20-угольника равен 180° минус сумма двух соседних из указанного списка углов, а все эти суммы целые.

4. [8] Для каких N можно расставить в клетках квадрата $N×N$ действительные числа так, чтобы среди всевозможных сумм чисел на парах соседних по стороне клеток встречались все целые числа от 1 до $2(N-1)N$ включительно (ровно по одному разу)?

(*М. Дидин*)

Ответ: для всех $N > 1$.

Решение. Ниже приведены примеры для $N = 4$ и $N = 5$. Аналогично строятся примеры для всех чётных (нечётных) N: в первом столбце реализуюся все суммы от 1 до $N-1$, на стыке первого и второго столбцов – от N до $2N-1$, во втором столбце – от $2N$ до $2N-2$ и т.д.

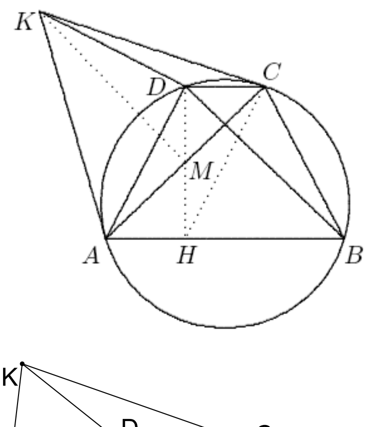
0	4	7	11
1	4	8	11
1	5	8	12
2	5	9	12

0	5	9	14	18
1	5	10	14	19
1	6	10	15	19
2	6	11	15	20
2	7	11	16	20

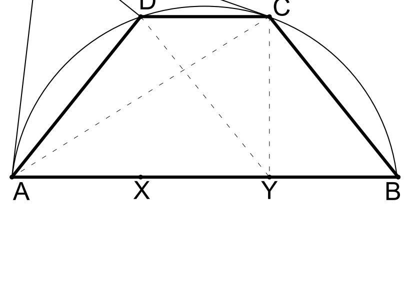
5. [9] Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Её основание AB в 3 раза больше основания CD. Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что угол KDA прямой.

(*А. Юран*)

Решение 1. Пусть DH – высота трапеции, тогда $ADCH$ – параллелограмм. Пусть M – его центр. Тогда KM – серединный перпендикуляр к диагонали AC. По теореме об угле между хордой и касательной $\angle KAD = \angle ABD = \angle BAC = \angle KMD$ (последние два угла – углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Значит, точки A, K, D и M лежат на одной окружности, откуда $\angle KDA = \angle KMA = 90°$.



Решение 2. Проведём высоту CY. Треугольники ADY и AKC равнобедренные и подобны (угол KAC, как угол между касательной и хордой, равен углу DAY, опирающемуся на такую же дугу). Тогда подобны и треугольники ADK и AYC (аналогично, равны углы KAD и CAY, а $KA : AC = DA : AY$ в силу первого подобия). Следовательно, $\angle ADK = 90°$.



6. [9] У Пети есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Он выбирает из неё половину карт (какие хочет) и отдаёт Васе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди выкладывают на стол по одной карте (по своему выбору, в открытом виде); начинает Петя. Если в ответ на ход Пети Вася смог выложить карту той же масти или того же достоинства, Вася зарабатывает 1 очко. Какое наибольшее количество очков он может гарантированно заработать?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: 15 очков.

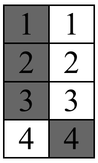
Решение 1. Если Петя возьмёт себе все черви, все тузы, короли и дамы, то Вася не сможет набрать очки на тузе, короле и даме червей, т.е. наберёт не больше 15 очков.

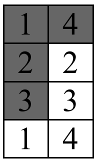
Переформулируем задачу. Рассмотрим доску 4×9. Петя закрашивает чёрным 18 клеток. Докажем, что Вася сможет выделить не менее 15 непересекающихся *хороших* пар: в каждой паре две клетки разного цвета, находящиеся в одной строке или одном столбце.

Назовём *весом* столбца количество чёрных клеток в нём. Сначала Вася рассматривает столбцы типа 2 (если они есть). Каждый из них, очевидно, разбивается на две хорошие пары.

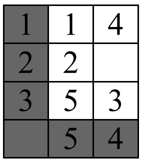
Далее Вася рассматривает пары столбцов типа 0 и 4. Каждая такая пара, очевидно, разбивается на четыре хорошие пары клеток.

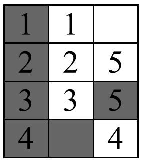
Далее Вася рассматривает пары столбцов типа 1 и 3. Каждая такая пара тоже разбивается на четыре хорошие пары клеток (см. рисунки).





Когда указанные пары столбцов закончатся, в силу симметрии можно считать, что «необработанными» останутся только столбцы типов 4 и 1. Если это a столбцов типа 4 и b столбцов типа 1, то $4a + b = 3b$, то есть $b = 2a$. В тройке из столбца типа 4 и двух столбцов типа 1 Вася сможет выделить не менее пяти хороших пар клеток (см. рисунки).





Так как $3a = a + b \leq 9$, то на всей доске останется не более трёх нехороших пар, т.е. Вася «потеряет» не больше 3 очков.

Решение 2 (для знатоков). Мы воспользуемся известной леммой Холла о сватовстве.

Лемма. Пусть есть n юношей. Известно, что для каждой группы из k юношей ($k = 1, 2, ..., n$) имеется по крайней мере k девушек, имеющих знакомых среди этой группы юношей. Тогда каждого юношу можно женить на знакомой девушке.

Доказательство и обсуждение см., например, в статьях: М. Большаков, «Паросочетания и транспортные сети («Квант» №4 за 1970 год); А. Романов, «Задачи и теоремы о представителях» («Квант» №1 за 2015 год); М. Шевцова, «Многократная лемма Холла в задачах про мудрецов» («Квант» № 7 за 2019 год)

В терминах решения 1 объявим чёрные клетки юношами (при этом $n = 18$), белые – девушками, а знакомыми – клетки, находящиеся в одном ряду. Мы докажем, что для каждой группы из k юношей ($k = 4, 2, ..., 18$) имеется по крайней мере $k - 3$ девушки, имеющих знакомых среди этой группы юношей. Добавив трёх *виртуальных* девушек, знакомых со всеми юношами, мы окажемся в условиях леммы Холла. Переженив всех юношей и отбросив не более чем троих, которым достались виртуальные девушки, получим не менее 15 хороших пар.

Пусть есть группа X из k юношей (чёрных клеток). Переставим столбцы, их содержащие, влево, а строки – вниз. Пересечение этих строк и столбцов – прямоугольник площади S_1 – содержит X, а дополнение к их объединению – прямоугольник площади S_2 – содержит всех *незнакомых* с ними девушек. Значит, $k \le \min(S_1, 18)$, а количество *знакомых* с ними девушек не меньше $18 - \min(S_2, 18)$.

Нам достаточно доказать, что $18 - \min(S_2, 18) \ge \min(S_1, 18) - 3$, т.е. что $\min(S_1, 18) + \min(S_2, 18) \le 21$.

Выражение $F = \min(S_1, 18) + \min(S_2, 18)$ симметрично, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда общая вершина A построенных прямоугольников лежит в верхней половине доски. Тогда $S_2 \le 18$.

Отбросим очевидный случай, когда A лежит на границе доски (тогда $S_1 = 0$ или $S_2 = 0$). Если $S_1 < S_2$, то можно сдвинуть A вправо, чтобы стало $S_1 = 18$ (поскольку 18 делится как на 2, так и на 3), при этом $F = S_1 + S_2$ не уменьшится. Если $S_1 > S_2$, то можно сдвинуть A влево, чтобы стало $S_1 = 18$, при этом $F = 18 + S_2$ увеличится.

Остался единственный случай $S_1 = 18$, $S_2 = 3$, а в нём неравенство выполнено.

7. [12] Глеб задумал натуральные числа N и a, где $a < N$. Число a он написал на доске. Затем Глеб стал проделывать такую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число и полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных на доске чисел была больше $100N$?

(*И. Митрофанов*)

Ответ: мог.

Решение. Как известно, найдётся такое m, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m+2}>100$ [1].

Положим $N = a + a_1 = 2a_1 + a_2 = 3a_2 + a_3 = \ldots = ma_{m-1} + a_m = (m + 2)a_m$. Тогда $a > \frac{N}{2}$,

$a_1 > \frac{N}{3}, a_2 > \frac{N}{4}, \ldots, a_{m-1} > \frac{N}{m+1}, a_m > \frac{N}{m+2}$ и $a + a_1 + a_2 + \ldots + a_m > 100N$.

Осталось найти решение указанной системы в целых числах. Заметим, что $a = a_1 + a_2$, $a_1 = a_2 + \frac{a_3}{2}$, $a_2 = a_3 + \frac{a_4}{3}$, ..., $a_{m-2} = a_{m-1} + \frac{a_m}{m-1}$, $a_{m-1} = \frac{(m+1)a_m}{m}$. Поэтому при $a_m = m!$ все числа $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_1, a, N$ будут целыми. Действительно, a_{m-1} делится на $(m-1)!$, a_{m-2} – на $(m-2)!$, a_{m-3} – на $(m-3)!$ и т.д.

[1] См. задачу 34918 на сайте problems.ru.

Старшие классы

1. [4] На плоскости даны две параболы: $y = x^2$ и $y = x^2 - 1$. Пусть U – множество всех точек плоскости, лежащих между параболами (включая точки на самих параболах). Существует ли отрезок длины более 10^6, целиком содержащийся в U?

(*А. Толпыго*)

Ответ: существует.

Решение. Касательная к первой параболе в точке (a, a^2) имеет уравнение $y = 2a(x - a) + a^2$. Точки пересечения этой прямой со второй параболой – это $A(a - 1, (a - 1)^2 - 1)$ и $B(a + 1, (a + 1)^2 - 1)$. Отрезок AB целиком лежит в U, а квадрат его длины, равный $2^2 + 16a^2$, может быть сколь угодно велик.

2. [5] Алёша задумал натуральные числа a, b, c, а потом решил найти такие натуральные x, y, z, что $a = \text{НОК}(x, y)$, $b = \text{НОК}(x, z)$, $c = \text{НОК}(y, z)$. Оказалось, что такие x, y, z существуют и определены однозначно. Алёша рассказал об этом Боре и сообщил ему только числа a и b. Докажите, что Боря может восстановить c.

(*Б. Френкин*)

Решение. Пусть произвольное простое p входит в x, y, z в степенях $k \ge l \ge m$. Если $l > 0$, то можно изменить m в пределах от 0 до l, не меняя a, b, c. Поэтому x, y, z попарно взаимно просты. Значит, $a = xy$, $b = xz$, $c = yz = \dfrac{\text{НОК}(a,b)}{\text{НОД}(a,b)}$.

Замечание. Если для произвольных попарно взаимно простых k, l, m задумать числа kl, lm, mk, то x, y, z действительно найдутся единственным образом.

3. [8] Может ли в сечении какого-то тетраэдра двумя разными плоскостями получиться два квадрата: один – со стороной, не большей 1, а другой – со стороной, не меньшей 100?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: может.

Решение. Рассмотрим ромб $ABCD$ со стороной длины 200, в который можно вписать квадрат 1×1 со сторонами, параллельными диагоналям ромба (такой ромб, очевидно, существует). Построим прямую призму $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$, боковые грани которой – квадраты. Тетраэдр $AB'D'C$ по построению имеет в горизонтальном сечении квадрат 1×1. С другой стороны, $AB' \parallel DC' \perp CD'$ и $AB' = CD' > 200$, поэтому сечение плоскостью, проходящей через середины четырёх рёбер и параллельной AB' и CD', – квадрат со стороной, равной $\frac{1}{2} AB' > 100$.

4. [9] К Ивану на день рождения пришли $2N$ гостей. У Ивана есть N чёрных и N белых цилиндров. Он хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или несколько) так, чтобы в каждом хороводе было хотя бы два человека и люди в цилиндрах одного цвета не стояли в хороводе рядом. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(2N)!$ различными способами. (Цилиндры одного цвета неразличимы; все гости различимы.)

(*Г. Погудин*)

Решение 1. Занумеруем людей числами от 1 до $2N$. Есть как раз $(2N)!$ способов расставить этих людей в ряд, поэтому достаточно установить взаимно-однозначное соответствие между такими расстановками и разбиениями на хороводы.

Возьмём любую расстановку, наденем всем цилиндры в порядке ЧБЧБ...ЧБ слева-направо. Мысленно разделим людей на пары соседних. В первый хоровод берём подряд всех людей от начала и до той пары включительно, где стоит человек 1 (и замыкаем в хоровод); во второй хоровод берём следующие пары подряд до той включительно, где стоит человек с наименьшим из оставшихся номеров (и замыкаем в хоровод), и т.д.

Обратно, по набору хороводов легко восстановить расстановку: берём хоровод, где стоит человек 1, находим пару ЧБ, в которой он находится, «разрезаем» хоровод сразу за этой парой, вытягиваем в линию и ставим в начало расстановки. Далее берём человека с наименьшим номером из оставшихся, так же разрезаем хоровод за его парой и подсоединяем к расстановке, и т.д.

Решение 2. «Белых» гостей можно выбрать C_{2N}^{N} способами. Для каждого из них разбить «белых» гостей на циклы (длины от 1 до N) можно $N!$ Способами (так как каждая перестановка однозначно разбивается в произведение независимых циклов). Для каждого из них вставить между «белыми» гостями «чёрных» можно $N!$ способами. В итоге получаем $C_{2N}^{N} \cdot N!{\cdot}N! = (2N)!$ различных балов. Ясно, что все балы рассмотрены.

5. [9] Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке.

(*М. Дидин*)

Решение. Наряду с каждой точкой M будем рассматривать её радиус-вектор $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{OM}$, где O – центр описанной окружности четырёхугольника $ABCD$.

Радиус-вектор центра окружности Ω_{AB}, построенной на отрезке AB как на диаметре, равен $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, а её радиус равен $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. Степень точки S с радиус-вектором $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$ относительно Ω_{AB} равна $\frac{1}{4}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^2 - \frac{1}{4}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (поскольку $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{d}|$). Очевидно, степень точки S относительно Ω_{CD} будет такой же. Значит, S лежит на радикальной оси X_1Y_1 этих окружностей.

Аналогично S лежит на X_2Y_2 и X_3Y_3, что и требовалось.

Вариация. Пусть K, L – середины сторон AB и CD, а точка S симметрична центру O относительно центра тяжести вершин A, B, C, D. Тогда $KOLS$ – параллелограмм (см. решение 2). Значит, $KS^2 - KA^2 = OL^2 - (OA^2 - OK^2) = OK^2 - (OC^2 - OL^2) = LS^2 - LC^2$. Это значит, что степени точки относительно окружностей Ω_{AB} и Ω_{CD} равны, поэтому S лежит на радикальной оси X_1Y_1 этих окружностей.

Аналогично S лежит на X_2Y_2 и X_3Y_3, что и требовалось.

Решение 2.

Теорема Монжа. Перпендикуляры, опущенные из середин сторон вписанного четырёхугольника $ABCD$ на противоположные стороны и из середин его диагоналей на противоположные диагонали, проходят через одну и ту же точку (*точку Монжа*).

Доказательство. Докажем, что точка Монжа совпадает с точкой G, симметричной центру O описанной окружности относительно центра тяжести S вершин A, B, C, D (S является общей серединой двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, и отрезка, соединяющего середины диагоналей четырёхугольника $ABCD$).

В самом деле, если M_{AB} и M_{CD} – середины сторон AB и CD соответственно, то в четырёхугольнике $M_{AB}GM_{CB}O$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, он – параллелограмм. Так как $OM_{AB} \perp AB$ и $OM_{CD} \perp CD$, то $M_{CD}G \perp AB$ и $M_{AB}G \perp CD$, то есть два перпендикуляра из условия проходят через G. Аналогично через G проходят остальные четыре перпендикуляра. (Случаи, когда O и S совпадают, или какие-то из указанных параллелограммов вырождаются в отрезки, очевидны.) □

Перейдём к решению задачи. Если в четырёхугольнике $ABCD$ есть пара параллельных сторон, то утверждение очевидно, так как в силу симметрии две из прямых будут срединными перпендикулярами к этим параллельным сторонам, то есть совпадут, а третья прямая будет им перпендикулярна. Поэтому далее считаем, что параллельных сторон нет.

Пусть Ω – описанная окружность четырёхугольника $ABCD$, Ω_{AB} – окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, и т.д., M_{AB} – середина AB, и т.д., K – точка пересечения прямых AB и CD. Тогда K – радикальный центр окружностей Ω_{AB}, Ω_{CD} и Ω. Радикальная ось X_1Y_1 окружностей Ω_{AB} и Ω_{CD} перпендикулярна их линии центров, то есть содержит высоту треугольника $M_{AB}KM_{CD}$. Значит, X_1Y_1 проходит через точку пересечения высот этого треугольника – точку Монжа G. Аналогично через эту точку проходят прямые X_2Y_2 и X_3Y_3.

6. [10] На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел.

(*А. Грибалко*)

Решение.

Лемма. Сумма квадратов $2^k m$ последовательных целых чисел ($k > 0$, m нечётно) делится на 2^{k-1}, но не делится на 2^k.

Доказательство. Индукция по k. *База* ($k = 1$). Сумма двух последовательных квадратов нечётна, значит, сумма $2m$ последовательных квадратов – сумма нечётного числа нечётных слагаемых, то есть нечётна.

Шаг индукции. Пусть $k \geq 2$, $n = 2^{k-1}m$, $a_1, \ldots, a_n$ – первые n из $2n$ последовательных чисел. Тогда $a_1^2 + \ldots + a_n^2 + (a_1 + n)^2 + \ldots + (a_n + n)^2 = 2(a_1^2 + \ldots + a_n^2) + 2n(a_1 + \ldots + a_n) + n^3$.

Каждое из трёх слагаемых делится на 2^{k-1} (первое – по предположению индукции). При этом первое слагаемое не делится на 2^k, а остальные два делятся. □

Замечание. Другое доказательство леммы можно получить, воспользовавшись формулой для суммы квадратов натуральных чисел от 1 до N.

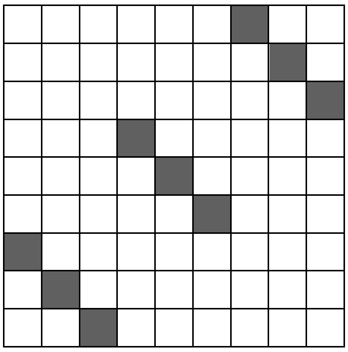
Вернёмся к задаче. Заметим, что $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Следовательно, на каждом шаге сумма квадратов $2n$ чисел на доске удваивается. По лемме она никогда не сможет являться суммой $2n$ последовательных квадратов.

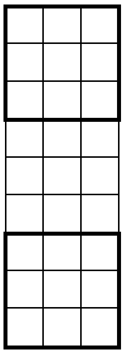
7. [12] Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько (конечное число, большее нуля) клеток в чёрный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k чёрных клеток, либо вовсе не было чёрных клеток?

(*А. Динев, К. Гаров, Н. Белухов*)

Ответ: для всех натуральных k.

Решение 1. Закрасим чёрным сначала k клеток, стоящих подряд вдоль одной из диагоналей, идущей вправо-вниз. Затем сдвинем эту картинку по диагонали вправо-вверх на k, $2k$, $3k$, ..., $(k-1)k$ клеток. Получится множество A из k^2 чёрных клеток, которое каждая горизонталь и вертикаль пересекает не более чем по одной клетке, а каждая диагональ имеет с A либо 0, либо k общих клеток (см. рисунок слева для $k = 3$). При этом всё множество A лежит в квадрате $k^2\times k^2$.





Заметим, что если квадрат $n\times n$ сдвинуть на $2n$ клеток по вертикали, то не существует диагонали, пересекающей оба эти квадрата (см. рисунок справа для $n = 3$). Поэтому, сдвинув множество A на $2k^2$, $4k^2$, ..., $2(k-1)k^2$ вверх, мы получим множество B из k^3 чёрных клеток, которое каждая горизонталь пересекает не более чем по одной клетке, а каждая вертикаль и диагональ имеет с B либо 0, либо k общих клеток. При этом все множество B лежит в квадрате $2k^3\times 2k^3$.

Теперь, сдвинув множество B на $4k^3$, $8k^3$, ..., $4(k-1)k^3$ вправо, мы получим искомое множество из k^4 чёрных клеток.

Замечание. Другими словами, построенное множество состоит из клеток с «координатами» $(-i + kj + 4mk^3,\ i + kj + 2nk^2)$, $0 \le i, j, m, n < k$.

Решение 2. Есть 4 вида линий. Линии, на которых есть чёрные клетки, назовём *покрываемыми*. Требуется, чтобы на каждой покрываемой линии было ровно по k чёрных клеток.

Набор чёрных клеток, для которого на каждой покрываемой линии содержится ровно k клеток, назовём *k-набором*. Из k-набора можно получить $2k$-набор. Для этого вырежем квадрат, содержащий k-набор, и разместим его копии в квадратах, отмеченных буквами на рисунке.

	X		Y	
Y				X
X				Y
	Y		X	

Назовём k-набор *супернабором*, если его можно разбить на 1-наборы с тем же множеством покрываемых линий у каждого. Указанный выше метод из k-супернабора строит $2k$-супернабор. Действительно, разобьём k-супернабор на 1-наборы. Возьмём один из них. Его копии на однобуквенных местах образуют 1-набор, который покрывает то же множество линий, что и $2k$-набор. Весь $2k$-набор разобьётся на такие 1-наборы, значит, это $2k$-супернабор.

В k-супернаборе легко выделить l-набор для любого $l \le k$: взять в нём l разных 1-наборов с тем же множеством покрывающих линий у каждого.

Осталось заметить, что 1-супернабор существует: он состоит, например, из одной клетки. Тогда для каждого k мы сможем создать сначала N-супернабор с $N > k$, а затем получить из него нужный нам k-набор.

Замечание. В решении 1 получается k^4 клеток в квадрате со стороной порядка $4k^4$. В решении 2 – менее $4k^3$ клеток, порядок стороны – менее k^3.