40-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Базовый вариант

Младшие классы

1. [3] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

А. Шаповалов

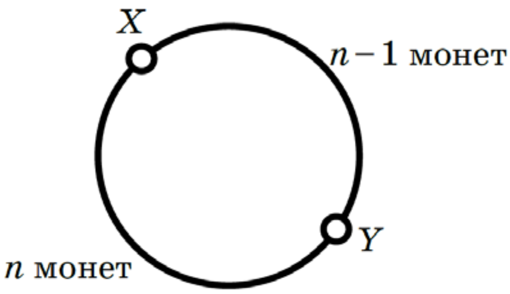
Ответ: могло.

Решение. Пример с 11 числами: 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1. Можно доказать, что больше 11 чисел не могло быть выписано. См. также более общую задачу 5 старших классов.

2. [4] По кругу лежит $2n + 1$ монета орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n + 1$ переворот: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

В. Расторгуев

Решение. Пусть $(n-1)$-я перевёрнутая монета – X, а n-я – Y. Тогда между X и Y по часовой стрелке лежит $n-1$ монет, а раз всего монет в круге $2n + 1$, то между Y и X по часовой стрелке лежит n монет (см. рисунок). Это значит, что $(n + 1)$-й мы снова перевернём монету X.



И далее мы будем переворачивать уже переворачивавшиеся монеты, но в обратном порядке: ведь пропустить по часовой стрелке $n + 1$ монет – всё равно, что пропустить против часовой стрелки $n - 2$ монет, ..., пропустить по часовой стрелке $2n - 2$ монет – всё равно, что пропустить против часовой стрелки 1 монету. А на последних двух шагах мы перевернём одну и ту же монету.

В итоге решкой вверх будет лежать только монета Y – она переворачивалась нечётное число раз, а все остальные монеты – чётное.

3. [4] Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что $m + n \le n^2$.

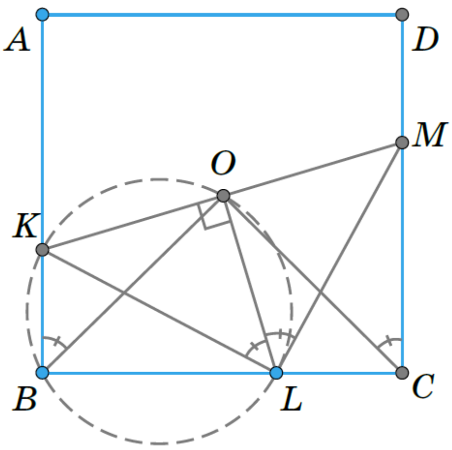
Б. Френкин

Решение 1. Поскольку $n^2 = n(m + n) - mn$, из условия следует, что n^2 делится на $m + n$. Значит, $n^2 \ge m + n$.

Решение 2. Пусть d = НОД(m, n), $m = ad$, $n = bd$. По условию, abd^2 делится на $d(a+b)$, откуда abd делится на $a+b$. Но так как числа a и b взаимно просты, каждое из них взаимно просто с $a+b$. Значит, d делится на $a+b$, откуда d^2 делится на $d(a+b) = m+n$ и, следовательно, $d^2 \ge m+n$. Осталось заметить, что $n^2 \ge d^2$.

4. [5] В прямоугольник $ABCD$ вписывают равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противолежащей основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке BC, а концы основания – на отрезках AB и CD. Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

И. Жижилкин



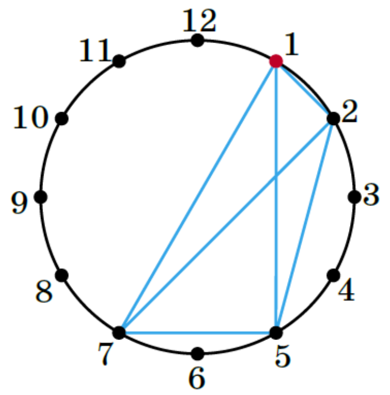
Решение. Пусть KLM – один из таких треугольников, O – середина его основания KM (см. рисунок).

Тогда LO – медиана, а значит, и биссектриса, и высота треугольника KLM. Поскольку углы KBL и LOK прямые, точки B и O лежат на окружности с диаметром KL, откуда $\angle KBO = \angle KLO = \alpha/2$. Аналогично получаем, что $\angle MCO = \angle MLO = \alpha/2$.

Тогда O – точка пересечения прямых, проведённых из вершин B и C под углом $\alpha/2$ к сторонам прямоугольника BA и CD соответственно, то есть она не зависит от положения треугольника KLM.

5. [5] Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К. Кноп



Решение. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 12 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать ≪шаблон≫ – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке справа (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.

Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он ≪накрыл≫ обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 12. Если помощник открывает шкатулку с номером k, то фокусник открывает шкатулки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$ по модулю 12. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n + 1\}$, $\{n, n + 2\}$, $\{n, n + 3\}$, $\{n, n + 4\}$, $\{n, n + 5\}$ или $\{n, n + 6\}$, то помощник всегда найдёт четвёрку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Существуют и другие шаблоны – например, четырёхугольник с вершинами 1, 2, 4, 8.

См. также задачу 4 старших классов, где шкатулок 13.

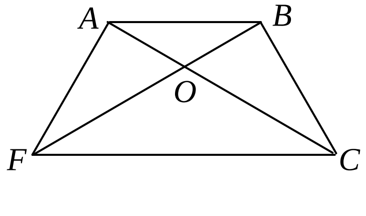
Старшие классы

1. [4] Расстояние от некоторой точки внутри правильного шестиугольника до трёх его последовательных вершин равны 1, 1 и 2 соответственно. Чему равна сторона этого шестиугольника?

М. Евдокимов

Ответ: $\sqrt{3}$.

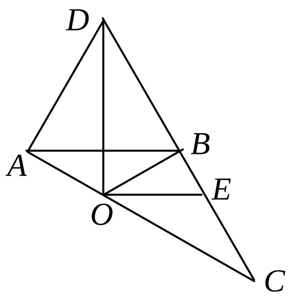
Пусть A, B, C – последовательные вершины шестиугольника, O – точка внутри него, и пусть $OA = OB = 1$, $OC = 2$.



Решение 1. Рассмотрим другую соседнюю с A вершину F. Тогда $FABC$ – равнобедренная трапеция (см. рисунок). Точка O лежит на общем серединном перпендикуляре её оснований FC и AB, поэтому $OF = OC = 2$. Но $FC = 2AB$ (в правильном

шестиугольнике главная диагональ в 2 раза больше стороны), откуда треугольники AOB и FOC подобны с коэффициентом 2. Поскольку AB и FC параллельны и $\angle BAO = \angle OCF$, точка O лежит на диагонали AC (и, аналогично, точка O лежит на диагонали BF). Тогда $\angle OBC = 120° - 30° = 90°$, и $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника OBC.

Решение 2. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB. Построим вне шестиугольника равносторонний треугольник ABD (рис. справа). Ясно, что тогда OD – серединный перпендикуляр к отрезку AB. Кроме того, так как $DB : DC = 1 : 2 = OB : OC$, то OD – биссектриса внешнего угла O треугольника BOC. Значит, она перпендикулярна биссектрисе OE угла BOC. В силу равенства $\angle BAO = \angle ABO = \angle BOE = \angle EOC$, точки A, O, C лежат на одной прямой. В треугольнике ADC, $\angle D = 60°$, $DC = 2DA$, откуда угол DAC прямой, а $AB = AD = AC \operatorname{ctg} \angle D = 3 \operatorname{ctg} 60° = \sqrt{3}$.



2. [4] Натуральные числа a и b таковы, что $a^{n+1} + b^{n+1}$ делится на $a^n + b^n$ для бесконечного множества различных натуральных n. Обязательно ли тогда $a = b$?

Б. Френкин

Ответ: обязательно.

Решение 1. Пусть, например, $a > b$. Дробь $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ меньше a при всех натуральных n (очевидно после умножения на знаменатель), но стремится к a при $n \to \infty$ (в самом деле, поделив числитель и знаменатель на a^n и заметив, что $\left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, получим, что числитель дроби стремится к a, а знаменатель – к 1). Значит, $a - 1 < \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} < a$ при достаточно больших n и не может быть целым. Противоречие.

Решение 2. Пусть, например, $a > b$. Тогда $b < \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} < a$ при всех натуральных n (очевидно после умножения на знаменатель). Так как между b и a конечное число целых чисел, найдутся такие различные натуральные m и k, что $\frac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m} = \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{a^k+b^k}$. Умножив на знаменатели и приводя подобные, получим $a^m b^k(a - b) = a^k b^m(a - b)$. Сократив на $a - b$, имеем $\left(\frac{a}{b}\right)^{m-k} = 1$, откуда либо $a = b$, либо $m = k$ – противоречие.

Решение 3. Пусть наибольший общий делитель чисел a и b равен d, то есть $a=ud$, $b=vd$, где u и v взаимно просты. Из условия, сократив на d, получаем, что $d(u^{n+1} + v^{n+1})$ делится на $u^n + v^n$ для бесконечного множества натуральных n. Поскольку u и v взаимно просты, числа $u^{n+1} + v^{n+1}$ и $u^n + v^n$ взаимно просты с u и v, а кроме того, могут иметь общим множителем максимум $|v - u|$ (это следует из того, что $u^{n+1} + v^{n+1} - u(u^n + v^n) = v^n(v - u)$).

Но ненулевое число, не превосходящее $d\cdot|v - u|$, не может делиться на $u^n + v^n$ для бесконечно многих n. Значит, $u=v$, откуда $a=b$.

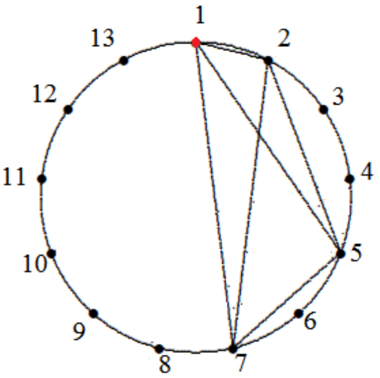
3. [4] Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 2019 четырёхугольников, каждый из которых одновременно вписанный и описанный.

Н. Седракян

Решение. Признак вписанности четырёхугольника — равенство сумм противоположных углов, признак описанности — равенство сумм противоположных сторон. Если из центра вписанной в треугольник окружности опустить перпендикуляры на стороны треугольника, он разобьется на три четырёхугольника, обладающих обоими этим свойствами. Чтобы разбить треугольник на 2019 таких четырёхугольников, достаточно разбить его на 2019:3 = 673 треугольника (например, отрезками, исходящими из одной вершины), а потом каждый из них — на три четырёхугольника, как показано выше.

4. [5] Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 13 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К. Кноп



Решение. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 13 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать ≪шаблон≫ – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.

Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он ≪накрыл≫ обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 13. Если помощник открывает шкатулку с номером k, то фокусник открывает шкатулки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n + 1\}$, $\{n, n + 2\}$, $\{n, n + 3\}$, $\{n, n + 4\}$, $\{n, n + 5\}$ или $\{n, n + 6\}$, то помощник всегда найдёт четвёрку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Для знатоков. Мы описали *конечную проективную плоскость над полем* $\mathbf{Z}_3$, где шкатулки выступают в роли точек, а шаблоны — в роли прямых. На этой плоскости как раз 13 точек и 13 прямых, причём на каждой прямой лежит по 4 точки.

5. [5] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 2019. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 40. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

А. Шаповалов

Ответ: 1019 чисел.

Лемма. Сумма любых сорока подряд записанных чисел не меньше 80.

Доказательство. Пусть числа $a_1, \ldots, a_{40}$ записаны подряд. Среди чисел $b_0 = 0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $b_{40} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{40}$ найдутся два b_i и b_j $(i < j)$ с одинаковым остатком при делении на 40. Тогда сумма $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ кратна 40, а значит, не меньше 80.

Решение. *Оценка*. Пусть выписано $n > 1019$ чисел. По лемме, сумма первых $1000 = 25{\cdot}40$ из них не меньше $25{\cdot}80 = 2000$. Сумма оставшихся чисел (их по крайней мере 20) не меньше 20. Значит, вся сумма не меньше 2020. Противоречие.

Пример. 25 групп 1, ..., 1, 41 (в каждой группе 39 единиц и число 41) и затем 19 единиц.

40-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура
Сложный вариант

Младшие классы

1. [5] Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает семь различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?

М. Евдокимов

Ответ: могут. **Решение.** Пусть первый мудрец задумает числа 1, 2, 3, 22, 23, 24, 25 и назовёт число 22. Тогда второй однозначно определит все числа, так как сумму 100 при этом можно получить лишь одним способом — взяв наименьшие возможные числа: 1, 2, 3, 22, 23, 24 и 25.

Замечание: если первый задумает другие числа, то второй не сможет гарантированно угадать.

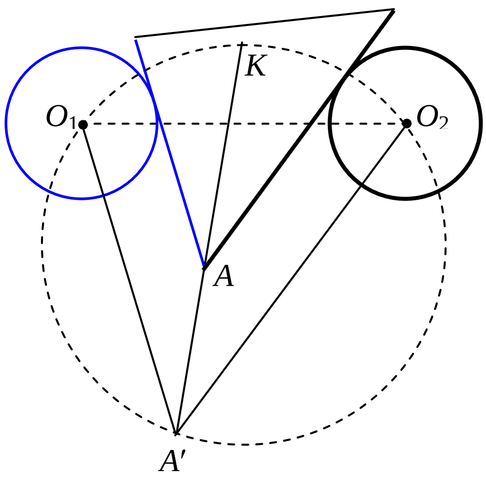
2. [7] На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

С. Дориченко

Решение. Назовём самого левого кузнечика Ричардом. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме Ричарда, перепрыгнут через Ричарда. Ясно, что теперь кузнечики находятся в положении, которое симметрично изначальному. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

3. [7] К плоскости приклеены два непересекающихся деревянных круга одинакового размера – серый и чёрный. Дан деревянный треугольник, одна сторона которого серая, а другая – чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи треугольника, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная – чёрного (касание происходит не в вершинах). Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла между серой и чёрной сторонами, всегда проходит через одну и ту же точку плоскости.

Е. Бакаев, П. Кожевников, В. Расторгуев



Решение. Точки биссектрисы угла A между серой и чёрной сторонами деревянного треугольника равноудалены от этих сторон (серый цвет изображаем синим). Проведём через центры O_1 и O_2 серого и чёрного кругов прямые, параллельные этим сторонам. Пусть они пересекаются в точке A'. Поскольку угол $O_1A'O_2$, равный углу A, постоянен, описанная окружность Ω треугольника $O_1A'O_2$ не зависит от положения исходного треугольника.

Прямая l, содержащая биссектрису угла $O_1A'O_2$, проходит тогда через фиксированную точку K – середину дуги O_1O_2 окружности Ω.

С другой стороны, точки прямой l равноудалены от прямых O_1A' и O_2A', а серая и чёрная стороны «отодвинуты» соответственно от O_1A' и O_2A' на одно и то же расстояние в сторону точки K (так как радиусы серого и чёрного кругов равны), откуда прямая l содержит и биссектрису угла A деревянного треугольника.

4. [8] Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили – в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий – в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках – произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

И. Богданов

Ответ. ½. **Решение**. Пусть в вершинах по кругу расставлены числа $x_1, \ldots, x_{100}$, и пусть k – сумма «красных» чисел, а s – «синих». Тогда сумма красных чисел равна сумме всех одночленов вида x_ix_j, где i и j разной чётности и $i < j$, а сумма синих равна сумме всех одночленов вида x_ix_j, где i и j одной чётности и $i < j$; кроме того, $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_{100})^2 = 1$. Заметим теперь, что выражение $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{99} - x_{100})^2$ равно $1 - 2k + 2s$ и неотрицательно, откуда $k - s \le$ ½.
Равенство достигается, когда выражение в скобках равно нулю, например, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = {}^1/_{10}$.

5. [9] В клетках квадратной таблицы $n{\times}n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, – в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

А. Грибалко

Ответ: при всех чётных n.

Решение. Пронумеруем столбцы и строки от 1 до n соответственно слева направо и сверху вниз, а также раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловая клетка в первом столбце и первой строке была чёрной.

1	2	3	4	5	6
36	27	26	17	16	7
35	28	25	18	15	8
34	29	24	19	14	9
33	30	23	20	13	10
32	31	22	21	12	11

Пусть n – чётное. Заполним таблицу числами от 1 до n^2 так: ставим их друг за другом, начиная от 1, сначала в первой строке слева направо, а потом – вдоль столбцов: вниз по последнему столбцу, вверх по предпоследнему, и т. д. (получается что-то похожее на змейку). В итоге число n^2 окажется прямо под 1, см. пример для $n = 6$ на рисунке.

1	2	3	4	5	0
0	3	2	5	4	1
5	4	1	0	3	2
4	5	0	1	2	3
3	0	5	2	1	4
2	1	4	3	0	5

Заменим теперь числа на их остатки по модулю n: 0, 1, …, $n - 1$ (см. рисунок). Нетрудно доказать, что они расставлены следующим образом: для нечётного столбца последнее (нижнее) число совпадает с первым числом следующего чётного столбца и вторым числом следующего нечётного.
Значит, каждый столбец начинается с остатка i, равного своему номеру, кроме n-го, который начинается с нуля, причём в чётных столбцах остатки идут по возрастанию с i до $n - 1$, а потом с нуля до $i - 1$, а в нечётных – по убыванию с i до 0, а потом с $n - 1$ до $i + 1$.
Докажем, что в каждой строке все остатки различны. Пусть в какой-то строке совпали два остатка. Они не могут находиться в столбцах одной чётности – такие столбцы получаются друг из друга циклическим сдвигом. Значит, один остаток находится в чётном столбце, а второй – в нечётном. Но тогда эти два остатка стоят на клетках разного цвета и не могут совпадать, противоречие.

Предположим, что удалось заполнить таблицу при нечётном n. К противоречию можно прийти по-разному.

Первый способ. Заметим, что в нашей шахматной раскраске чёрными окажутся те клетки, сумма номеров строки и столбца которых чётна, а белыми – остальные. В нашей змейке чисел от 1 до n^2 цвета клеток чередуются, поэтому числа одной чётности находятся в чёрных клетках, а другой чётности – в белых.

Рассмотрим клетки таблицы, в которых стоят числа, дающие остаток k при делении на n. Сумма их номеров строк и столбцов по условию равна $(1 + 2 + 3 + ... + n) + (1 + 2 + 3 + ... + n)$, так как каждая строка и каждый столбец участвуют по одному разу; в частности, эта сумма чётна. Но у каждой белой клетки сумма «координат» нечётна, а у каждой чёрной – чётна, следовательно, число белых клеток среди рассмотренных чётно.

Взяв k=1 и k=2, получаем, что среди чисел с остатком 1 чётное количество находится на белых клетках, и среди чисел с остатком 2 – тоже. Но для каждого числа с остатком 1 следующее за ним число имеет остаток 2 и стоит на клетке противоположного цвета. Значит, на чёрных клетках стоит чётное количество чисел с остатком 2 и всего чисел с остатком 2 чётно – противоречие с нечётностью n.

Второй способ. Заменим числа на их остатки от деления на n и проведём стрелку из каждой клетки с единицей в соседнюю клетку с двойкой. У нас имеется n стрелок, соединяющих единицы и двойки. У некоторых стрелок могут быть *парные* – стрелки противоположного направления, занимающие те же два ряда (рис. слева). Но число стрелок нечётно, поэтому найдётся стрелка без пары.

	1 →	2	
	2 ←	1	

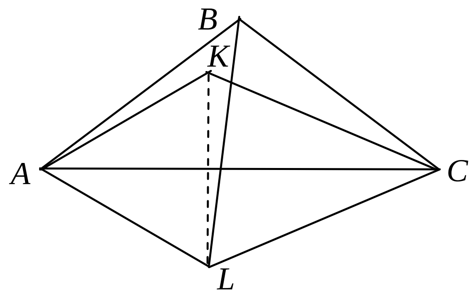
	i	i+1	i+2	i+3			n
				1 →	2		
		1 →	2				
							1
			1 →	2			
						1 →	2
	1 →	2					

Пусть, например, такая стрелка горизонтальна и ведёт из i-го столбца в (i+1)-й (рис. справа). В (i+1)-м столбце тоже есть единица. Поскольку у первой стрелки нет пары, вторая стрелка может вести только в (i+2)-й столбец (двойка в (i+1)-м столбце уже занята). В (i+2)-м столбце тоже есть единица, и стрелка из неё может вести только в (i+3)-й столбец (двойки в (i+1)-м и (i+2)-м столбцах уже заняты). Продолжая, дойдём до единицы в n-м столбце, откуда стрелке идти уже некуда. Противоречие.

6. [9] Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = AB = BC$ и $\angle KAC = 30°$. Найдите угол AKB.

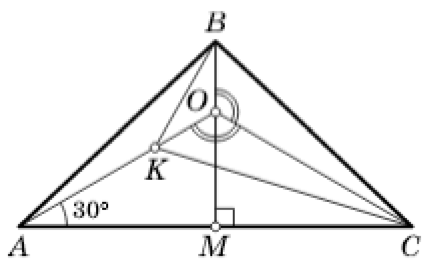
Е. Бакаев

Ответ. 150°. **Решение 1**. Построим равносторонний треугольник BCL (см. рисунок; точки A и L находятся по одну сторону от прямой BC). Точки A, C и L лежат на окружности радиуса BA с центром в точке B. Поскольку K лежит внутри треугольника ABC, угол ABC больше 60°, откуда L и B лежат по разные стороны от AC и L лежит на меньшей дуге AC. Тогда вписанный угол CAL равен половине центрального угла CBL, то есть 30°.

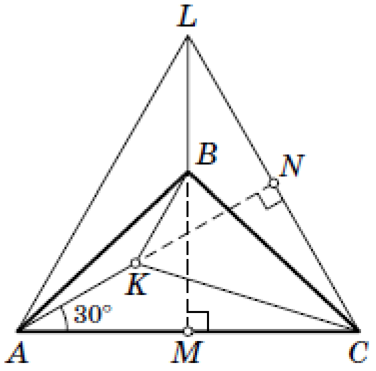


Очевидно, точка K, удовлетворяющая условиям задачи, единственна, следовательно она совпадает с точкой, симметричной L относительно стороны AC. Значит, треугольник AKL равносторонний, точка K, как и точка B, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AL, откуда $\angle AKB = \angle LKB = 180° – ½\ \angle AKL = 150°$.

Решение 2. Пусть высота BM треугольника ABC пересекается с прямой AK в точке O (см. рисунок). Тогда $\angle COM = \angle AOM = 60°$. Значит, $\angle AOC = 120°$ и $\angle COB = 120°$. Следовательно, треугольники BOC и KOC равны по двум сторонам и углу, лежащей против *большей* из них (так называемый четвёртый признак равенства треугольников). Поэтому $OB = OK$, то есть треугольник BOK равнобедренный с углом 120° при вершине O. Поэтому $\angle OKB = 30°$, а $\angle AKB = 150°$.



Решение 3. Построим на AC равносторонний треугольник ACL так, чтобы точки L и B лежали с одной стороны от AC (см. рис).



Проведем в треугольнике ABC высоту BM, она же серединный перпендикуляр к стороне AC. Так как ALC – равносторонний, точка L также лежит на прямой BM. Кроме этого, проведем в треугольнике ALC высоту AN. Так как AN является биссектрисой угла LAC, то точка K лежит на этой прямой. Отметим также, что K лежит с той же стороны от BM, что и A, так как из-за $CK = CB$ она не может лежать внутри треугольника BMC; таким образом, K лежит на отрезке AN.

Заметим, что прямоугольные треугольники BMC и KNC равны по катету и гипотенузе (так как $MC = AC/2 = LC/2 = NC$, $BC = KC$). Отсюда следует, во-первых, что $BM = KN$, во-вторых, что B лежит на отрезке LM (так как $BM = KN < AN = LM$), и, наконец, что $LB = LM – BM = AN – KN = AK$.

Теперь рассмотрим четырехугольник $ALBK$. В нем $\angle LAK = \angle ALB = 30°$ и $AK = LB$, то есть это равнобокая трапеция. Отсюда следует, что $\angle AKB = 180° – \angle KAL = 150°$.

Решение 4. Пусть $\angle B = 2\beta$. По теореме синусов $2BC\sin\beta = AC = KC\dfrac{\sin\angle AKC}{\sin 30°} = 2BC\sin\angle AKC$, и поскольку $\angle AKC > 2\beta > \beta$, то $\angle AKC = 180° – \beta$. Значит, $\angle ACK = \beta – 30°$, откуда

$\angle KCB = \angle C – \angle ACK = (90° – \beta) – (\beta – 30°) = 120° – 2\beta$, $\angle BKC = ½\,(180° – \angle KCB) = 30° + \beta$,

$\angle AKB = 360° – \angle BKC – \angle AKC = 360° – (30° + \beta) – (180° – \beta) = 150°$.

7. [12] Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

М. Дидин

Ответ. 3920000. **Решение**. *Оценка*. Будем считать, что камни в кучках лежат один на другом, причём из выбранных кучек Петя берет верхние (на данный момент) камни. Пронумеруем камни в каждой кучке снизу вверх числами от 1 до 400. Тогда число очков, которое Петя получает на каждом ходу, равно разности номеров удаляемых камней. В результате он получит сумму вида $|a_1 – a_2| + |a_3 – a_4| + ... + |a_{39999} – a_{40000}|$, где a_i – номера соответствующих камней.

Заметим, что после раскрытия скобок получается алгебраическая сумма S ста чисел 400, ста чисел 399, ..., ста двоек и ста единиц, причём ровно перед половиной этих чисел стоит знак минус.

Назовём числа от 1 до 200 *маленькими*, а остальные – *большими*. Если бы разрешалось брать из кучек произвольные камни, то максимальное значение S, очевидно, достигается, когда все большие числа входят в S со знаком плюс, а все маленькие – со знаком минус. Такая сумма равна

$100(400 + 399 +...+ 201 – 200 – 199 –...– 1) = 100((400 – 200) + (399 – 199) +...+ (201 – 1)) = 100\cdot 200^2$.

Заметим, однако, что каждое большое число хотя бы один раз войдёт в сумму со знаком минус: это произойдёт, например, в тот момент, когда Петя *в первый раз* удалит камень с этим номером. Аналогично каждое из 200 маленьких чисел хотя бы один раз войдёт в сумму в сумму со знаком плюс (в тот момент, когда Петя удалит *последний* камень с этим номером). Поэтому максимальный результат Пети не превышает

$99\cdot(400 + 399 +...+ 201) – 99\cdot(200 + 199 +...+ 1) – (400 + 399 +...+ 201) + (200 + 199 +...+ 1) = 98\cdot 200^2$.

Пример. Добиться указанного результата можно, например, так. За первые 200 ходов Петя забирает по 200 камней из первых двух кучек (при этом 200 больших чисел – каждое по разу – получают знак минус). За следующие 200 ходов он снимает 200 верхних камней из третьей кучки и 200 нижних из первой кучки, далее по 200 камней из второй и четвертой, третьей и шестой, ..., 98-й и 100-й кучек (при этом все числа входят с «правильными» знаками). Наконец остаётся по 200 нижних камней в последних двух кучках, которые и снимаются за последние 200 ходов (и возникает 200 знаков плюс перед числами с 200 по 1).

Старшие классы

1. [5] На экране компьютера напечатано некоторое натуральное число, делящееся на 7, и отмечен курсором промежуток между какими-то двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что если её впечатать в отмеченный промежуток любое число раз, получится число, делящееся на 7.

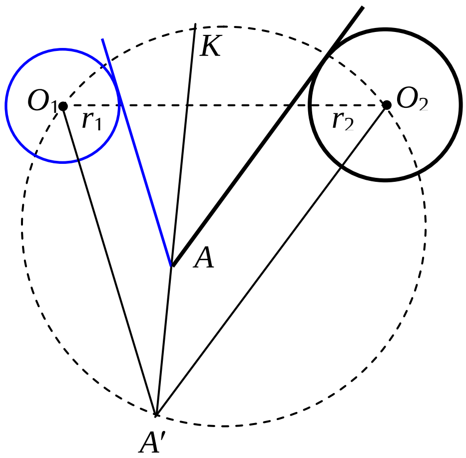
А. Галочкин

Решение. Пусть исходное число имеет вид $\overline{AB}$, причём A при делении на 7 даёт остаток r. Возьмём такую цифру a, что $2r + a$ делится на 7 (она, очевидно, найдётся). Будем делить число вида $\overline{Aa...aB}$ на 7 в столбик. Когда мы закончим делить A, останется остаток r. На следующем шаге мы будем делить на 7 число $10r + a = 7r + (2r + a) + r$, снова получается остаток r. На следующих шагах это повторяется, пока мы не дойдём до деления на 7 числа $\overline{rB}$, которое делится на 7 по условию.

2. [6] См. задачу 2 младших классов.

3. [7] К плоскости приклеены два непересекающихся не обязательно одинаковых деревянных круга – серый и чёрный. Дан бесконечный деревянный угол, одна сторона которого серая, а другая – чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи угла, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная – чёрного (касание происходит не в вершине). Докажите, что внутри угла можно нарисовать луч, выходящий из вершины, так, чтобы при всевозможных положениях угла этот луч проходил через одну и ту же точку плоскости.

Е. Бакаев, И. Богданов, П. Кожевников, В. Расторгуев

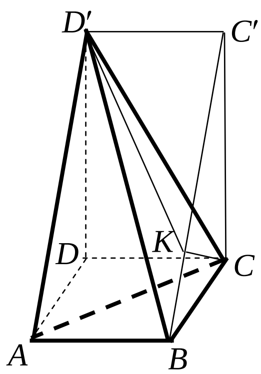


Решение. Искомый луч – геометрическое место лежащих внутри угла точек, для которых отношение расстояний до серой и чёрной сторон равно отношению $\frac{r_1}{r_2}$ радиусов серой и чёрной окружностей. Дальнейшие рассуждения практически повторяют решение задачи 3 младших классов. Ясно, что луч $A'A$ содержит указанный выше луч и обладает тем же свойством по отношению к прямым $A'O_1$ и $A'O_2$. Поэтому этот луч пересекает дугу O_1O_2 в такой точке K, что $O_1K : O_2K = (2R\sin\angle O_1A'K) : (2R\sin\angle O_2A'K) = \sin\angle O_1A'K : : \sin\angle O_2A'K = (A'A\sin\angle O_1A'K) : (A'A\sin\angle O_2A'K) = r_1 : r_2$.

4. [8] См. задачу 5 младших классов.

5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1. **а**) [4] Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1? **б**) [4] А квадрат площади $^1/_{2019}$?

М. Евдокимов



Ответ: а) не может; **б**) может. **Решение**. Пусть единичный квадрат $ABCD$ – проекция тетраэдра $ABCD'$ на плоскость грани ABC. Тогда этот тетраэдр «вписан» в прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$.

Из симметрии относительно плоскости DBD' ясно, что проекция тетраэдра на плоскость грани ACD' трапецией быть не может (если две противоположные стороны проекции параллельны, то и две другие тоже), а проекции тетраэдра на плоскости граней ABD' и BCD' равны.

Высота CK тетраэдра, очевидно, совпадает с высотой прямоугольного треугольника BCC', поэтому проекция на плоскость ABD' – трапеция $ABKD'$.

Так как треугольники BCC' и BKC подобны и $BC = 1$, имеем $BK = \dfrac{1}{BC'} = \dfrac{1}{AD'}$. Тогда $S_{ABKD'} =$

$= \dfrac{AD' + BK}{2} = \dfrac{AD' + \dfrac{1}{AD'}}{2} \geq 1$. Равенство возможно лишь при $AD' = \dfrac{1}{AD'} = 1$, но это не так, поскольку гипотенуза AD' больше катета AD, равного 1. Итак, ответ в пункте **а**) отрицателен.

Ответ в пункте **б**) положителен: достаточно выбрать DD' так, что $AD' + \dfrac{1}{AD'} = 2\cdot 2019$, а потом уменьшить длины всех рёбер тетраэдра в $\sqrt{2019}$ раз.

6. [8] Петя и Вася играют в игру. Для каждых пяти различных переменных из набора $x_1, \ldots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. По правилам игры, когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

И. Богданов

Ответ: да. **Решение**. Покажем, как может действовать Вася, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети.

Допустим, Петя не взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$. Тогда Вася может взять эту карточку, а дальше брать любые карточки. При $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 1$ сумма произведений у Пети будет равна 0, а у Васи будет равна 1.

Если Петя сразу же взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$, то Вася может взять карточку, на которой написано $x_5x_7x_8x_9x_{10}$, а следующим ходом одну из карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$ или $x_5x_6x_8x_9x_{10}$ (хотя бы одна из них останется, поскольку за ход Петя может взять только одну из этих двух карточек). Далее Вася может брать карточки как угодно.

В случае, если Вася взял карточку $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным такие значения: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, $x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 100$.

Тогда только на двадцати одной карточке окажется ненулевое произведение, причём для трёх карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 100 000 000, а для остальных не будет превосходить 1 000 000. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 200 000 000, а у Пети не больше 118 000 000.

В случае, если Вася взял карточку $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным такие значения: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = x_6 = x_7 = 1$, $x_8 = x_9 = x_{10} = 10$.

Тогда только на шести карточках окажется ненулевое произведение, причём для трёх карточек $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 1000, а для остальных трёх будет равно 100. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 2000, а у Пети не больше 1300.

7. [12] Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке (0, 0) и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* – фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

И. Чанакчи, Р. Шиффлер

Решение. Разным ломаным соответствуют разные червяки: если две ломаные совпадают до точки A, а в ней расходятся, то соответствующие червяки содержат разные клетки (рис. 1): синюю, если из A сделан ход вправо, красную – если вверх, ни одной из них, если ломаная в A окончилась.

Будем покрывать червяка доминошками с конца. Две последние клетки червяка можно покрыть двумя способами.

Операция A: положим доминошку перпендикулярно последнему звену ломаной (рис. 2); пусть есть a способов покрыть оставшуюся часть червяка.

Операция B: положим две доминошки параллельно последнему звену ломаной (рис. 3); пусть есть b способов покрыть оставшуюся часть червяка.

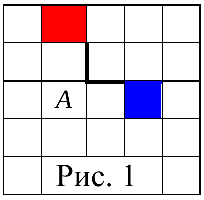


Рис. 1

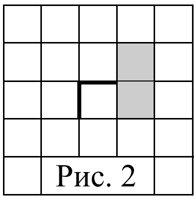


Рис. 2

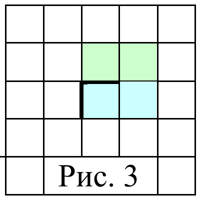


Рис. 3

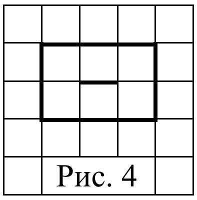


Рис. 4

Будем говорить, что червяк (и соответствующая ломаная) имеет *тип* (a, b). Например, простейший червяк, соответствующий ломаной из одного звена, имеет тип (2, 1) (рис. 4). Число способов разбить червяк типа (a, b) на доминошки равно $a + b$. Ясно, что $a > b$.

Лемма 1. Если ломаную типа (a, b) продолжить звеном, параллельным её последнему звену, то получится ломаная типа $(a + b, a)$.

Доказательство. Если к новому червяку применить операцию A, то останется червяк, соответствующий исходной ломаной (рис 5). А его можно покрыть $a + b$ способами. Если же применить операцию B, то останется то же самое, что при применении операции A к исходному червяку (рис. 6).

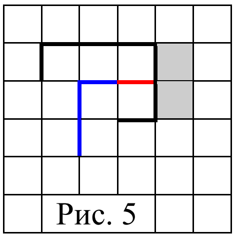


Рис. 5

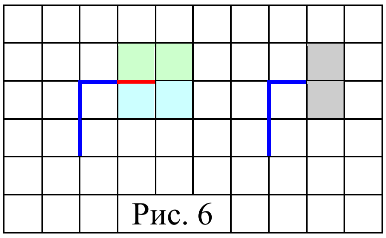


Рис. 6

Лемма 2. Если ломаную типа (a, b) продолжить звеном, перпендикулярным её последнему звену, то получится ломаная типа $(a + b, b)$.

Доказательство. Если к новому червяку применить операцию A, то, как и в лемме 1, останется червяк, соответствующий исходной ломаной (рис 7). Если же применить операцию B, то следующую доминошку можно положить единственным способом, после чего останется то же самое, что при применении операции B к исходному червяку (рис 8).

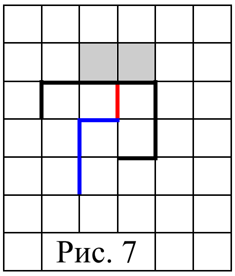


Рис. 7

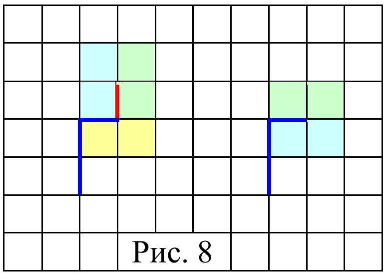


Рис. 8

Лемма 3. Если червяк имеет тип (a, b), то a и b взаимно просты.

Доказательство. Все червяки получаются из простейшего типа (2, 1) добавлением звеньев, а при переходах, описанных в леммах 1 и 2, взаимная простота не нарушается.

Поскольку НОД$(n, a) =1 \iff$ НОД$(n, n - a) = 1$, то для решения задачи осталось доказать, что для каждого натурального $n \geq 3$ и взаимно простого с n числа a, такого что $^n/_2 < a < n$, существует ровно два червяка типа $(a, n - a)$.

Достаточно рассмотреть червяков, у которых первое звено горизонтально (их вдвое меньше). Проведём индукцию по n. *База* $(n = 3)$ очевидна.

Шаг индукции. Пусть $n > 3$, $n - a = b$, $a - b = c$. Если $b > c$, то ломаную типа (a, b) можно получить только добавлением звена к ломаной типа (b, c) способом, описанным в лемме 1, а такая ломаная единственна по предположению индукции.

Если же $b < c$, то ломаную типа (a, b) можно получить только добавлением звена к ломаной типа (c, b) способом, описанным в лемме 2, а такая ломаная также единственна по предположению индукции.