СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 21 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, точка E — произвольная точка внутри стороны AC. Известно, что $BE \geqslant 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.

Наири Седракян

6 2. На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

Михаил Кузнецов

8 3. Требуется записать число вида $77\ldots7$, используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по нескольку штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись — это просто 77. А существует ли число вида $77\ldots7$, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?

Сергей Маркелов

8 4. Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

Рустэм Женодаров

8 5. Равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1, O_2, O, C лежат на одной окружности.

Алексей Заславский

6. Докажите, что

7 а) любое число вида $3k-2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;

3 б) любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

Наири Седракян

7. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из любого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом невозможно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется *простым*, иначе — *сложным*.

Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что

5 а) в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;

7 б) в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.

Максим Дидин

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 21 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто.
В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет»
на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так,
5 что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала
отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было
поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое
наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

Михаил Кузнецов

2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O
7 проведены высоты AH_a и BH_b. Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно
середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY
пополам.

Фольклор

3. Докажите, что
6 а) любое число вида $3k-2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;
2 б) любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

Наири Седракян

4. Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет.
На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клет-
ки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так,
8 чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка
у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и де-
лают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не
будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.

Дмитрий Захаров

8 5. Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно k
больше $30°$. Каково наибольшее возможное значение k?

Наири Седракян

6. На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда
по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет
9 на нём точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное R, что если
прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса R, то на каждой дуге колеса величиной
в $1°$ будет след хотя бы одной отмеченной точки.

Иван Митрофанов

7. Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется $n > 1$ городов, во всех одно и то же число
жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход
Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет меж-
ду ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение
не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выиграет, если в какой-то момент
в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может
действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе
10 а) ровно $2n$ жителей;
4 б) ровно $2n-1$ жителей.

Глеб Погудин