Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.

Базовый вариант, младшие классы.

1. Расположим коробки в ряд так, чтобы число карандашей в них возрастало слева направо. Заметим, что тогда в самой левой коробке минимум один карандаш, во второй слева — минимум два, ..., в десятой слева — минимум 10 карандашей. Из самой левой коробки возьмём любой лежащий в ней карандаш. Поскольку во второй коробке лежат карандаши минимум двух разных цветов, там найдется карандаш не того цвета, что мы взяли из первой коробки. Возьмём его. В третьей коробке лежат карандаши минимум трёх разных цветов. Поэтому там найдётся карандаш, цвет которого отличается от цветов обоих уже выбранных. Возьмем его. Продолжая такую процедуру, мы выберем искомые 10 карандашей разных цветов.

2. Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. По условию ни одна из разностей не равна ни одному из 25 чисел, которые не превосходят 50. Поэтому вместе с ними разности дают 50 различных натуральных чисел, которые не превосходят 50, то есть это все числа от 1 до 50. Их сумма равна $51 \cdot 25$, а сумма всех исходных чисел равна, стало быть, $51 \cdot 25 + 50 \cdot 25 = 101 \cdot 25 = 2525$.

3. Пусть точки B_1, B_2, B_3 — середины дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 соответственно. Площадь шестиугольника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ равна сумме площадей четырёхугольников $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$ и $OA_3B_3A_1$. Но у этих четырехугольников диагонали перпендикулярны, а значит площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Искомая сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \frac{1}{2}OB_3 \cdot A_3A_1$. Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = OB_3 = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, что нам и нужно.

4. Ответ: Может.

Решение. Возьмём сначала любые три различных натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других, например, числа 1, 2 и 3. Их произведение равно 6 и не является 2008-й степенью натурального числа. Домножим каждое из чисел на 6^n, получим числа 6^n, $2 \cdot 6^n$, $3 \cdot 6^n$. По-прежнему, одно из чисел будет равно полусумме двух других, а произведение будет равно 6^{3n+1}. Осталось подобрать n так, чтобы $3n + 1$ равнялось 2008 (или делилось на 2008). Поскольку 2007 делится на три, можно взять $3n + 1 = 2008$, то есть $n = 669$.

5. Изобразим беговую дорожку в виде левой половины некоторой окружности. Будем считать, что бегун, добегая до конца дорожки, не поворачивает обратно, а бежит дальше по правой половине этой окружности. Тогда все бегуны просто бегут по этой окружности. Условие того, что бегуны оказываются в одной точке исходной беговой дорожки, означает, что они находятся на прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности. Пусть через время t после начала забега бегуны встретились (находятся на соответствующей прямой). Тогда бегуны, находящиеся на левой половине, находятся на некотором расстоянии x от точки старта, и бегуны, находящиеся на правой половине, тоже находятся на расстоянии x от точки старта. При этом каждый бегун на левой половине пробежал некоторое целое число кругов и еще расстояние x, а каждый бегун на правой половине не добежал до некоторого целого числа кругов расстояние x. Где будут бегуны через время $2t$ от начала забега? Каждый бегун на левой половине пробежит некоторое целое число кругов и еще расстояние $2x$, а каждый бегун на правой половине не добежит до некоторого целого числа кругов расстояние $2x$. Но это как раз и означает, что они находятся на некоторой прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности (поскольку находятся на одинаковом расстоянии (вдоль окружности) от точки старта). Значит на исходной дорожке бегуны снова встретятся через время $2t$, и аналогично через время $3t$, и так далее.

Базовый вариант, старшие классы.

1. Расположим коробки в ряд так, чтобы число пирожных в них убывало слева направо. Теперь нарисуем на клетчатой бумаге «лесенку», где высота первого столбика (шириной в одну клетку) равна числу пирожных в первой слева коробке, высота второго стобика равна числу пирожных во второй слева коробке, и т.д. Лестница разделится на ступеньки. Первая (самая левая) ступенька будет состоять из самых высоких столбиков, вторая ступенька — из следующих по высоте столбиков, и так далее, последняя (самая правая) ступенька будет состоять из самых низких столбиков. Количество различных чисел в записях Алёши равно числу ступеней этой лесенки (самые полные коробки соответствуют самой высокой ступеньке, и так далее). Но этому же числу равно и количество различных чисел среди записанных Серёжей. В самом деле, можно считать, что выбирая по пирожному из каждой коробки, мы просто срезаем у нашей лесенки нижний слой квадратиков. Тогда заполнив подносы с наибольшим числом пирожных, мы срежем несколько слоев так, что пропадет целая ступенька (самая низкая), и число ступенек уменьшится на 1. Когда мы заполним подносы со следующим количеством пирожных (по величине), мы срежем еще одну ступеньку, и так далее.

2. Ответ: $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Решение. Возведём в квадрат равенство $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2+\cdots+x_n} = \sqrt{x_2}+\sqrt{x_3+\cdots+x_n+x_1}$, вычтем из обеих частей сумму $x_1+\cdots+x_n$ и снова возведём в квадрат. Получим $x_1(x_2+\cdots+x_n) = x_2(x_3+\cdots+x_n+x_1)$, откуда $(x_1-x_2)(x_3+\cdots+x_n) = 0$. Так как $x_1 - x_2 = 1$, получаем, что $x_3+\cdots+x_n = 0$. Поскольку из чисел $x_3, \ldots, x_n$ извлекается квадратный корень, то они неотрицательны, и раз их сумма равна 0, то каждое из них равно 0.

Пусть $x_2 \neq 0$, т.е. $x_2 - x_3 \neq 0$. Рассмотрев суммы с $\sqrt{x_2}$ и $\sqrt{x_3}$ и рассуждая как выше, получаем $x_1 = 0$. Тогда $x_2 = -1$, но существует $\sqrt{x_2}$ — противоречие. Значит, $x_2 = 0$, откуда $x_1 = 1$, и тогда все условия выполнены.

3. Пусть точки B_1, B_2, $\ldots$, B_{30} — середины дуг A_1A_2, A_2A_3, $\ldots A_{30}A_1$ соответственно. Площадь шестидесятиугольника $A_1B_1A_2B_2\ldots A_{30}B_{30}$ равна сумме площадей четырёхугольников $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$, $\ldots$, $OA_{30}B_{30}A_1$. Но у этих четырехугольников диагонали перпендикулярны, а значит площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Заметим, что один из этих четырехугольников может оказаться невыпуклым (если центр окружности лежит снаружи исходного тридцатиугольника), но его площадь все равно вычисляется так же (проверьте). Искомая сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \cdots + \frac{1}{2}OB_{30} \cdot A_{30}A_1$. Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = \cdots = OB_{30} = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{30}A_1$, что нам и нужно.

4. Ответ: Может.

Решение. Возьмём сначала любую прогрессию из пяти различных натуральных чисел, например, числа 1, 2, 3, 4, 5. Их произведение равно 120 и не является 2008-й степенью натурального числа. Домножим каждое из чисел на 120^n, получим числа 120^n, $2\cdot120^n$, $3\cdot120^n$, $4\cdot120^n$, $5\cdot120^n$. По-прежнему, числа будут образовывать арифметическую прогрессию, а их произведение будет равно 120^{5n+1}. Осталось подобрать n так, чтобы $5n+1$ делилось на 2008. Поскольку 5 и 2008 взаимно просты, это возможно. Ищем y такое, чтобы $5n+1 = 2008y$. Годится, например, $y = 2$, $n = 403$. Произведение будет тогда 2008-й степенью числа 120^2.

5. Можно считать, что наши прямоугольники нарисованы на бесконечной клетчатой плоскости. Разобьем мысленно плоскость на квадраты размером 2×2 клетки, и пронумеруем клетки каждого квадратика цифрами 1, 2, 3, 4 по часовой стрелке, начиная с левого верхнего угла квадратика. Так как обе стороны каждого нашего прямоугольника нечетны, в углах любого прямоугольника будут стоять одинаковые цифры. Занумеруем тогда цифрами 1, 2, 3, 4 четыре различных цвета, и каждый прямоугольник выкрасим в цвет, номер которого стоит в углах этого прямоугольника. Нетрудно убедиться, что цифры в углах любых двух примыкающих друг к другу прямоугольников будут различны.