Задача. Положительные числа $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + \cdots + x_k}{2}, \quad x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

Найдите минимальное k, при котором это возможно.

Ответ. 516.

Решение. 1. Пусть для некоторого k такие числа $x_1, \ldots, x_k$ существуют. Докажем, что тогда существует и набор вида $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-1} = a < \frac{1}{4}$, $x_k = b > \sqrt{2}$, также удовлетворяющий условию.

Перепишем наши неравенства в виде

$$\sum_{i=1}^{k}(4x_i - 1)^2 < k, \quad \sum_{i=1}^{k}(2x_i - x_i^3) < 0.$$

Пусть $q_i = (4x_i - 1)^2$. Тогда $x_i = \frac{-\sqrt{q_i}+1}{4}$, если $x_i \le \frac{1}{4}$; в противном случае $x_i = \frac{\sqrt{q_i}+1}{4}$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1, \ldots, x_d \le \frac{1}{4}$, $x_{d+1}, \ldots, x_k > \frac{1}{4}$. Тогда $2x_i - x_i^3 = \frac{1}{64}(31 - 3q_i \mp (29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}))$, и наши неравенства запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{k} q_i < k, \quad \sum_{i=1}^{d}(31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) + \sum_{i=d+1}^{k}(31 - 3q_i + 29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}) < 0. \tag{1}$$

Функция $f_2(x) = 31 - 3x + 29x^{1/2} - 3x^{3/2}$, очевидно, выпукла вверх на области определения (каждое слагаемое выпукло вверх). Поэтому, если $d \le n - 2$ (то есть, во второй сумме в последнем неравенстве хотя бы два слагаемых), то q_{d+1} и q_{d+2} можно заменить на $q'_{d+1} = 0$, $q'_{d+2} = q_{d+1} + q_{d+2}$ (соответственно изменив x_i), тем самым уменьшив левую часть второго неравенства в (1) и не изменив сумму q_i. При этом $x'_d = \frac{1}{4}$, то есть для нового набора значение d увеличилось на 1. Так можно продолжать, пока мы не получим $d \ge k - 1$. Заметим, что случай $d = k$ невозможен, так как в этом случае $2x_i - x_i^3 > 0$ при всех i. Значит, в новом наборе $d = k - 1$, и он по-прежнему удовлетворяет неравенствам (1).

Теперь, положив $\overline{q} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} q_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{d}(31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) \ge d(31 - 3\overline{q} - 29\overline{q}^{1/2} + 3\overline{q}^{3/2})$$

согласно неравенству Йенсена, так как функция $f_1(x) = 31 - 3x - 29x^{1/2} + 3x^{3/2}$ выпукла вниз на области определения. Таким образом, если все числа $q_1, \ldots, q_d$ заменить на $\overline{q}$, то неравенства (1) будут выполнены (т. к. их сумма не изменится). Мы получили требуемый набор с $k-1$ одинаковым числом $a = x_1 = \cdots = x_{k-1}$ и одним числом $b = x_k$. При этом, очевидно, $a \le \frac{1}{4}$; поскольку $2b - b^3 < 0$, то получаем $b > \sqrt{2}$.

2. Таким образом, осталось выяснить, при каком минимальном k существуют такие $a \le \frac{1}{4}$, $b > \sqrt{2}$, что (здесь $d = k - 1$)

$$da^2 + b^2 < \frac{da + b}{2}, \quad da + b < \frac{da^3 + b^3}{2}.$$

Перепишем эти неравенства в виде

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} < d < \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3}. \tag{2}$$

Из (2) и вышесказанного следуют условия

$$\frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b} > \frac{2a - a^3}{a - 2a^2}, \quad a \in [0, \tfrac{1}{4}], \quad b > \sqrt{2}. \tag{3}$$

Оценим, какое минимальное значение может принимать выражение

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} \tag{4}$$

при условиях (3). Согласно (2), это и будет оценкой снизу для d.

Положим

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - x} = \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = \frac{1}{4}\left(2x + 1 - \frac{7}{2x - 1}\right).$$

Из последнего представления видно, что $g(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

Первое неравенство в (3) имеет вид $g(a) < g(b)$. Будем уменьшать b, пока не достигнем значения, при котором $g(b) = g(a)$. Так как $g(\sqrt{2}) = 0 < g(a)$, то новое значение будет больше $\sqrt{2}$. При этом, очевидно, (4) уменьшится. Таким образом, мы можем считать, что

$$\frac{b^2 - 2}{2b - 1} = \frac{2 - a^2}{1 - 2a} = t.$$

Теперь a и b — два различных корня квадратного уравнения $x^2 - 2 = t(2x - 1)$, поэтому

$$a + b = 2t \quad \Rightarrow \quad b = 2t - a = 2\frac{2 - a^2}{1 - 2a} - a = \frac{4 - a}{1 - 2a}.$$

Теперь выражение (4) принимает вид

$$h(a) = \frac{b(2b - 1)}{a(1 - 2a)} = \frac{7(4 - a)}{a(1 - 2a)^3}.$$

Чтобы найти его минимум на отрезке $a \in [0, \frac{1}{4}]$, найдем нули производной:

$$h'(a) = -\frac{7}{a(1 - 2a)^3} - \frac{7(4 - a)}{a^2(1 - 2a)^3} + \frac{42(4 - a)}{a(1 - 2a)^4} = \frac{14(-3a^2 + 16a - 2)}{a^2(1 - 2a)^4}.$$

На отрезке $[0, \frac{1}{4}]$ получаем $a_0 = \frac{8 - \sqrt{58}}{3}$, причем это — точка минимума. Подставив ее в наше выражение, получаем

$$d > h(a_0) = 514,\ldots.$$

Таким образом, $d \geq 515$, а $k \geq 516$.

3. Осталось построить пример для $d = 515$. Его легко получить из следующих соображений.

Положим $a = a_0$, $b = \frac{4 - a}{1 - 2a}$. Тогда

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} = \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = 514,\ldots. \tag{5}$$

Начнем увеличивать значение b, оставляя a неизменным. Тогда величина $g(b) = \frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b}$, как мы выяснили, увеличивается; поэтому правое выражение становится больше, чем левое. Значит, настанет момент, когда правая часть (5) будет больше 515, а левая — по-прежнему меньше 515. Эти a и b будут удовлетворять (3), а значит, являться искомыми.

Можно предъявить и более простой пример. Возьмем $a = \frac{1}{8}$ (это число, довольно близкое к a_0). Соответствующее значение $b = \frac{4 - a}{1 - 2a} = \frac{31}{6}$, при этом

$$\frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = \frac{b(2b - 1)}{a(1 - 2a)} = \frac{13888}{27} = 514\frac{10}{27}.$$

Увеличивая значение b, как и выше, получаем требуемый пример. Например, подходит значение $b = 5{,}169$.