СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 25 апреля 2021 г.

Предварительные решения задач.

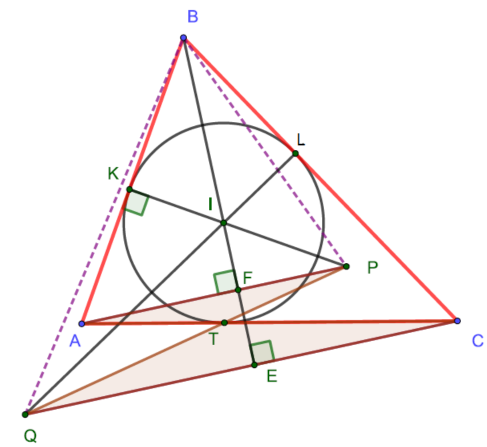
У-1. *Каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ определена на всей числовой прямой и не является строго монотонной. Может ли быть, что и их сумма, и их разность строго монотонны на всей числовой прямой?* *(Д. Шноль)*

Ответ: нет. **Решение.** Положим $F(x) = f(x) + g(x)$, $G(x) = f(x) - g(x)$. Тогда $f(x) = \frac{F(x)+G(x)}{2}$, $g(x) = \frac{F(x)-G(x)}{2}$. Пусть F и G строго возрастают (соответственно, строго убывают). Тогда f как их полусумма строго возрастает (соответственно, строго убывает), что противоречит условию. Если же какая-то из функций F и G строго возрастает, а другая строго убывает, то обе функции F и $-G$ строго возрастают или строго убывают. Следовательно, их полусумма g строго монотонна — снова противоречие с условием.

У-2. *Петя и Вася по очереди красят рёбра N-угольной пирамиды: Петя — в красный цвет, а Вася — в зелёный (ребро нельзя красить дважды). Начинает Петя. Выигрывает Вася, если после того, как все рёбра окрашены, из любой вершины пирамиды в любую другую вершину ведёт ломаная, состоящая из зелёных рёбер. В противном случае выигрывает Петя. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?* *(А. Глебов)*

Ответ: Вася. **Решение.** Пусть O — вершина пирамиды, $A_1A_2\ldots A_N$ — её основание. Разобьём все рёбра пирамиды на пары смежных, одно из которых боковое, а другое лежит в основании: (OA_1, A_1A_2), (OA_2, A_2A_3), $\ldots$, (OA_N, A_NA_1). На каждый ход Пети Вася может отвечать в ту же пару, то есть красить в зелёный цвет ребро из той пары, в которой Петя только что покрасил второе ребро в красный. Если Петя покрасит хотя бы одно ребро в основании пирамиды, то в ответ Вася покрасит боковое ребро из той же пары, пусть это, например, ребро OA_N. Так как в конце игры вершина A_{N-1} соединена зелёным ребром либо с O, либо с A_N, то из неё можно дойти по зелёным рёбрам до O. Далее, вершина A_{N-2} соединена либо с O, либо с A_{N-1}, из которой есть путь по зелёным рёбрам до O. Следовательно, и из вершины A_{N-2} можно добраться до O по зелёным рёбрам. Продолжая эти рассуждения, получим, что из всех вершин можно дойти по зелёным рёбрам до вершины O, а это значит, что Вася победил. Таким образом, чтобы не проиграть, Петя должен красить только боковые рёбра. После его предпоследнего хода неокрашенными останутся ребро из пары, в которую он только что сходил, и два ребра ещё из одной пары. Тогда в ответ Вася может покрасить в зелёный цвет последнее неокрашенное боковое ребро, после чего они покрасят ещё по одному ребру в основании. В итоге зелёным цветом будут покрашены все рёбра в основании пирамиды, кроме одного, а также одно боковое ребро, поэтому каждые две вершины будут соединены путём из зелёных рёбер. Значит, и в этом случае Вася победит.

У-3. *Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а T — точка касания этой окружности со стороной AC. Пусть P и Q — ортоцентры треугольников BAI и BCI. Докажите, что точки T, P, Q лежат на одной прямой.* *(Л. Емельянов)*



Решение. Случай $AB = BC$ очевиден. Иначе основания F и E высот AF и CE лежат на биссектрисе BI по разные стороны от AC, прямые AP и CQ параллельны и $\angle PAT = \angle FAT = \angle ECT = \angle QCT$. Задача будет решена, если мы докажем подобие треугольников TAP и TCQ (тогда равные углы CTQ и ATP вертикальны и точки P, Q, T лежат на одной прямой). Для этого достаточно проверить, что $AT/AP = CT/CQ$. Пусть K и L — точки касания окружности со сторонами AB и BC соответственно. Тогда $AT = AK$ и $CT = CL$, и осталось доказать равенство $AK/AP = CL/CQ$. Оно следует из подобия треугольников APK и CQL: они прямоугольные, а поскольку BI — биссектриса угла B, углы BAP и BCQ равны.

Кратко то же самое с синусами. Так как AP содержит высоту треугольника ABI, то $AP \perp BI$. Пусть K — точка касания AB со вписанной окружностью, так что $K = PI \cap AB$.

Тогда $TA/PA = KA/PA = \sin\angle APK = \sin\angle ABI = \sin\frac{\angle B}{2}$.

Аналогично $CQ \perp BI$, откуда $CQ \parallel AP$. И также $TC/QC = \sin\frac{\angle B}{2}$, откуда $TA/PA = TC/QC$.

Таким образом, $TAP \sim TCQ$. Значит, $\angle ATP = \angle CTQ$, откуда и следует, что T, P, Q на одной прямой.

У-4. *Возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots$ такова, что при каждом целом $n > 100$ число a_n равно наименьшему натуральному числу, большему чем a_{n-1} и не делящемуся ни на одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Докажите, что в такой последовательности лишь конечное количество составных чисел.* *(П. Кожевников)*

Решение 1. Докажем, что все a_m, большие $(a_{100})^2$, — простые числа. Предположим противное, тогда некоторое $a_m > (a_{100})^2$ раскладывается как $a_m = dt$, где $1 < t \leq d < a_m$, и следовательно $a_{100} < d < a_m$. Согласно определению a_m, d не является ни одним из $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Тогда $a_k < d < a_{k+1}$ для какого-то $k \in \{100, 101, \ldots, m-1\}$. Раз d не было выбрано в качестве a_{k+1}, оно делится на какое-то a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Но тогда и a_m делится на a_i. Противоречие.

Решение 2. Пусть последовательность S из условия задачи содержит бесконечно много составных чисел. Так как члены с номерами больше 100 не делятся на другие члены последовательности, она не содержит 1.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — все простые числа, не превосходящие a_{100}. Все остальные простые числа входят в S: действительно, пусть q — одно из них, и пусть a_t — наибольшее число в последовательности, меньшее чем q. Тогда q больше $a_1, \ldots, a_t$ и не делится на них (так как единицы среди них нет), причём меньшего числа с такими свойствами не существует. Следовательно, $a_{t+1} = q$.

Никакой другой член исходной последовательности не делится на q: предыдущие меньше q, а последующие не делятся на члены с меньшими номерами. Следовательно, составные числа из S не имеют простых делителей кроме $p_1, \ldots, p_k$.

Дальше возможны два способа решения.

Первый способ. Пусть $1 \leq i \leq k$, и пусть $r = p_i^{d_i}$ — наименьшая степень числа p_i, которая больше a_{100}. Если S не содержит меньшей степени p_i, то r не делится на меньшие числа из S и потому содержится в S. Таким образом, для каждого из чисел $p_1, \ldots, p_k$ некоторая его степень содержится в S. Пусть P — произведение всех этих степеней. Если в S есть составное число m, большее чем a_{100}, то оно не делится на эти степени и на остальные простые числа, поэтому $m \leq P$.

Второй способ. Пусть S_0 — совокупность всех составных чисел из S, имеющих номера больше 100. Предположим, что S_0 бесконечно. Пусть m_1 — наименьшее число из S_0. Любое другое число из S_0 не делится на m_1, поэтому какое-то p_i, где $1 \leq i \leq k$, входит в его разложение с меньшим показателем, чем в разложение m_1. Для некоторого i количество таких чисел бесконечно, а среди них бесконечно много таких, что в их разложении показатель при p_i одинаков. Совокупность таких чисел обозначим S_1.

Дальше рассуждаем аналогично: пусть m_2 — наименьшее число из S_1, тогда любое другое число из S_1 не делится на m_2, и т.д. Получаем бесконечное множество чисел из S_1, в разложении которых одинаков показатель при некотором p_j ($j \neq i$, $1 \leq j \leq k$). Это бесконечное множество обозначим S_2, и т.д.

В итоге получаем бесконечное множество S_{k-1} членов исходной последовательности, у которых номера больше 100, а разложения отличаются показателем лишь при одном простом множителе. Но если n_1, n_2 — два числа из S_{k-1} и этот показатель больше у n_1, то n_1 делится на n_2 и они не могут одновременно принадлежать исходной последовательности — противоречие. (В действительности S_k можно построить по тому же правилу, и получится бесконечное множество, в котором все числа на самом деле равны.)

У-5. *Полиция задержала 50 человек, из которых 35 — преступники, которые говорят, что захотят, а 15 — свидетели, которые всегда говорят правду. Все задержанные знают, кто преступники. Какое наименьшее число человек достаточно выбрать, чтобы спросив потом у каждого, кто именно преступники, по ответам вычислить хотя бы одного преступника?* *(А. Аржанцев)*

Ответ: 47. **Решение.** *Оценка сверху.* Выберем 47 человек и каждого спросим «Кто из жителей преступники?». Пусть каждый назвал 35 человек и никто не назвал себя, иначе преступник определяется очевидно. Разобьем всех людей на группы так, что внутри одной группы ответы одинаковые. Заметим, что в одной группе не больше 15 человек, иначе каждый из них обвинил бы менее 35 человек. Докажем, что найдется группа, в которой менее 12 человек. Действительно, если в каждой группе хотя бы 12 человек, то если этих групп хотя бы 4, то всего людей хотя бы $12 \cdot 4 = 48 > 47$, а если групп не более, чем 3, то всего людей не более, чем $15 \cdot 3 = 45 < 47$, противоречие. Возьмем ту группу, где меньше 12 человек. Если бы кто-то из них был свидетелем, то вместе с ним свидетелем могли быть только люди из его группы и неопрошенные люди, то есть менее 15 человек, противоречие. Значит, люди этой группы — преступники.

Оценка сверху, 2-й способ. Выберем 47 человек и каждого спросим «Кто из жителей преступники?», и каждый из них назовет свое 35-элементное подмножество преступников. Заметим, что среди этих 47 человек не менее 12 свидетелей, поэтому они назовут одно и то же 35-подмножество. Далее, 35-подмножество назовем *потенциально-преступным* (п-п), если его назвали не менее 12 из 47 человек. Одно из п-п подмножеств должно в самом деле совпадать с множеством преступников. Но среди всех 50 человек есть человек A, входящий во все п-п 35-подмножества: действительно, п-п 35-подмножеств всего не более 3 (иначе опрошенных было бы не менее $4 \cdot 12 = 48$, и поэтому 15-элементные дополнения к п-п подмножествам накрывают не более 45 опрошенных. Значит A — точно преступник.

Оценка снизу. Пусть мы опросили $k < 47$ людей. Опросим еще $46 - k$ случайных людей из оставшихся. Разобьем 46 опрошенных людей на 4 группы по 11, 11, 11, 13 человек. Пусть группы, где 11 человек, будут отвечать на вопросы так, будто свидетели они и 4 неопрошенных человека, а группа из 13 человек будет отвечать на вопросы так, будто свидетели они и 2 любых неопрошенных. Так как мы не можем понять, какая из версий настоящая, то и преступника мы найти не сможем, ведь любой человек в какой-то из версий свидетель.

Комментарий. Попробуйте решить также задачу, когда людей опрашивают последовательно (можно выбирать очередного опрашиваемого, учитывая ответы предыдущих опрошенных).

У-6. *Существует ли описанный 2021-угольник, все вершины и центр вписанной окружности которого имеют целочисленные координаты?* *(М. Евдокимов)*

Ответ: существует. **Решение.** Будем называть точку с рациональными координатами рациональной. Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$. Докажем, что на ней существует сколь угодно много рациональных точек. Рассмотрим прямую вида $y = kx+1$ с рациональным k. Она проходит через точку $(0, 1)$ окружности, и вторая точка пересечения с окружностью тоже будет рациональной (поскольку квадратное уравнение $x^2 + (kx + 1)^2 = 1$ с рациональными коэффициентами имеет рациональный корень 0, второй корень также рационален).

Выбирая разные рациональные k, отметим на окружности 2021 рациональную точку, включая точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Через каждую из этих 2021 точек проведём касательную к окружности и отметим точки пересечения соседних касательных, получим описанный 2021-угольник (строго это можно обосновать, например, так: сначала получим описанный квадрат, проведя касательные в четырёх указанных точках, а затем по очереди проведём остальные касательные: каждая будет отсекать от уже имеющегося многоугольника треугольник, примыкающий к вершине). Заметим, что уравнения касательных имеют рациональные координаты (поскольку касательные перпендикулярны прямым, соединяющим начало координат с рациональными точками касания). Точка пересечения прямых с рациональными координатами рациональна (как единственное решение системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами). Значит, вершины нашего 2021-угольника рациональны. Приведём координаты вершин к общему знаменателю N и рассмотрим гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом N. Она переведёт наш 2021-угольник в удовлетворяющий условию задачи.