СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 15 марта 2020 года.

Предварительные решения задач.

У-1. *В строку записано 2020 натуральных чисел. Каждое из них, начиная с третьего, делится и на предыдущее, и на сумму двух предыдущих. Какое наименьшее значение может принимать последнее число в строке?* *(А. Грибалко)*

Ответ: 2019!. **Решение.** *Пример.* Условию задачи, очевидно, удовлетворяют числа 1, 1, 2!, 3!, …, 2019!, так как при любом натуральном k число $(k+2)!$ делится как на $(k+1)!$, так и на $(k+1)!+k! = k!(k+2)$.

Оценка. Пусть a, b, c — три подряд идущих числа в строке, но не первые три числа. Докажем, что $\frac{c}{b} \geqslant \frac{b}{a}+1$. По условию, $\frac{b}{a}=x$, $\frac{c}{b}=y$, где x и y натуральные. Тогда $c=by=axy$, причём c делится на $b+a=ax+a=a(x+1)$. Получаем, что axy делится на $a(x+1)$, откуда xy делится на $x+1$, и так как x и $x+1$ взаимно просты, y делится на $x+1$, то есть $y \geqslant x+1$, что и требовалось.

Заметим, что первые два числа не меньше 1 каждое. Третье число больше второго (так как делится на сумму второго и первого), а значит, хотя бы в два раза больше второго (так как делится на него и не равно ему). По доказанному выше, четвёртое число тогда хотя бы в 3 раза больше третьего, пятое — хотя бы в 4 раза больше четвёртого, и так далее, откуда по индукции получаем, что k-е число не меньше, чем $(k-1)!$ при всех натуральных k.

У-2. *На высотах AA_0, BB_0, CC_0 остроугольного неравностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.* *(Е. Бакаев)*

Решение. Заметим, что если O — центр описанной окружности, то $\angle ACO = \angle C_0CB = \pi/2 - \angle B$. Следовательно, точки O и C_1 симметричны относительно биссектрисы угла C и $IC_1 = IO$, где I — центр вписанной окружности. Аналогично $IO = IA_1 = IB_1$, то есть I — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

У-3. *На клетчатой плоскости отметили 40 клеток. Всегда ли найдётся клетчатый прямоугольник, содержащий ровно 20 отмеченных клеток?* *(М. Евдокимов)*

Ответ. Нет. **Решение 1.** Рассмотрим клетчатый квадрат размером 11×11 и удалим из него внутренний центральный квадрат 9×9, оставив только рамку толщиной 1. В рамке будет как раз 40 клеток. Докажем, что на плоскости нет клетчатого прямоугольника, содержащего ровно 20 из этих 40 клеток.

Допустим, такой прямоугольник есть. Пусть в нём есть клетки из обеих вертикальных сторон рамки. Тогда каждая горизонтальная сторона рамки либо полностью включена в прямоугольник, либо вовсе не включена. Если включена ровно одна горизонтальная сторона, число клеток в прямоугольнике нечётно, если обе — клеток 40 (слишком много), а если ни одной — клеток максимум 9+9=18 (слишком мало).

Значит, в прямоугольнике могут быть клетки лишь из одной вертикальной стороны рамки, и, аналогично, лишь из одной горизонтальной стороны рамки. Но эти стороны соседние, и суммарно в них максимум 19 клеток — слишком мало. Противоречие.

Решение 2. Рассмотрим клетчатый прямоугольник $[1,14]\times[1,3]$, и удалим из него клетки $(7,1)$ и $(7,3)$. Останется ровно 40 клеток. Предположим, что нашёлся клетчатый прямоугольник, в котором ровно 20 отмеченных клеток. Он может затрагивать одну, две или три горизонтали с номерами $1, 2, 3$.

Если он затрагивает одну горизонталь, то в нём не более 14 отмеченных клеток.

Если он задевает 2 горизонтали (одна из них — вторая), то он задевает вертикаль с номером 7 (иначе в нём не более 14 клеток). Тогда эта вертикаль вносит в прямоугольник нечётное число отмеченных клеток, а остальные – чётное. Поэтому общее число отмеченных клеток в прямоугольнике нечётно.

Если он задевает все три горизонтали, то число отмеченных клеток в нём либо кратно 3 (если он не задевает 7-й вертикали), либо имеет остаток 1 при делении на 3 (иначе).

В каждом из случаев получаем противоречие.

Замечание. Возможны другие решения. Например, подходит квадрат 7×7 с вырезанным центральным квадратом 3×3, но доказательство более длинное.

У-4. *Для бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ её* первая производная *— это последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ (где $n = 1, 2, \ldots$), а её k-я* производная *— это первая производная её $(k-1)$-й производной $(k = 2, 3, \ldots)$. Назовём последовательность* хорошей*, если она и все её производные состоят из положительных чисел. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — хорошие последовательности, то и $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots$ — хорошая последовательность.* *(Р. Салимов)*

Решение. Пусть $c_n = a_n \cdot b_n$. Тогда $c'_n = a_{n+1}\cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n = a_{n+1}\cdot(b_{n+1}-b_n) + b_n\cdot(a_{n+1}-a_n) = a_{n+1}\cdot b'_n + b_n \cdot a'_n$. Так как в сумме все слагаемые положительны, первая производная у c_n (и у произведения любых двух хороших последовательностей) состоит из положительных чисел. Кроме того, мы представили c'_n в виде суммы двух произведений хороших последовательностей. Далее по индукции, пользуясь тем, что производная суммы — это сумма производных и первая производная произведения хороших последовательностей положительна, получаем, что и все производные у c_n состоят из положительных чисел.

У-5. *На сфере радиуса 1 дан треугольник, стороны которого — дуги трёх различных окружностей радиуса 1 с центром в центре сферы, имеющие длины меньше π, а площадь равна четверти площади сферы. Докажите, что четырьмя копиями такого треугольника можно покрыть всю сферу.* *(А. Заславский)*

Решение 1. Пусть O — центр сферы, а ABC — данный сферический треугольник. По формуле площади сферического треугольника $\pi = S_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$, то есть $\angle A + \angle B + \angle C = 2\pi$. (Доказательство формулы площади заключается в применении формулы включений-исключений к трем полусферам, пересечением которых является данный треугольник.)

Построим на сфере точку D, лежащую с C в разных полуплоскостях относительно OAB, и такую, что $\angle DAB = \angle CBA$ и $\angle DBA = \angle CAB$ (имеются в виду сферические углы; иначе говоря, точка D получена из C композицией симметрии относительно OAB и симметрии относительно серединного перпендикуляра к AB). Тогда треугольники ABC и BAD равны. Значит, $BD = AC$ и $AD = BC$. Но из условия имеем $\angle DAC = \angle DBC = \angle ACB$, следовательно, сферические треугольники CDA и DCB также равны треугольнику ABC. Четыре полученных треугольника покрывают сферу.

Решение 2. Пусть A, B, C — вершины данного треугольника. Покажем, что треугольник ABC остроугольный. Действительно, пусть $\angle ACB \geqslant \pi/2$. Если плоскость $\alpha = ABC$ содержит центр O сферы, то сферический треугольник ABC вырожден, и его площадь не такая, как надо. Иначе α отрезает от сферы «шапочку» площади меньше полусферы. Далее, прямая AB (нестрого) разделяет C и проекцию O на ABC; значит, часть шапочки, отсекаемая плоскостью OAB и содержащая C, не больше её половины. Наконец, сферический треугольник ABC лежит в этой области, площадь которой меньше четверти площади сферы — противоречие.

Итак, треугольник ABC остроугольный; тогда существует равногранный тетраэдр $ABCD$ (точки D и O лежат в одной полуплоскости относительно ABC). Пусть O' — центр этого равногранного тетраэдра. Тогда телесные углы $O'ABC$, $O'BCD$, $O'CDA$, $O'DAB$ разбивают пространство, то есть каждый из них равен четверти площади единичной сферы. Однако, если O' ближе в ABC, чем O, то этот телесный угол больше, чем $OABC$, а если O' дальше — то меньше. Оба случая невозможны; значит, $O = O'$, и упомянутые телесные углы дают требуемое разбиение сферы на 4 части.

У-6. *Дан бесконечный запас белых, синих и красных кубиков. По кругу расставляют любые N из них. Робот, став в любое место круга, идёт по часовой стрелке и, пока не останется один кубик, постоянно повторяет такую операцию: уничтожает два ближайших кубика перед собой и ставит позади себя новый кубик того же цвета, если уничтоженные одинаковы, и третьего цвета, если уничтоженные двух разных цветов. Назовём расстановку кубиков* хорошей*, если цвет оставшегося в конце кубика не зависит от места, с которого стартовал робот. Назовём N* удачным*, если при любом выборе N кубиков все их расстановки хорошие. Найдите все удачные N.* *(И. Богданов)*

Ответ. Степени двойки. **Решение 1.** Присвоим цветам остатки $0, 1, 2$ от деления на 3 произвольным образом. Все операции с ними также будем производить по модулю 3. Тогда операция, производимая роботом, такова: если уничтожаются кубики цветов a и b, то появляется кубик цвета $-a - b$.

Если $N = 2^k$, то после каждого прохода полного круга количество кубиков уменьшается вдвое, а их сумма меняет знак. Значит, в конце получится кубик цвета $(-1)^k(a_1 + \ldots + a_N)$, вне зависимости от места старта. Мы доказали, что степени двойки удачны.

Если $N = 2^k + d$, где $1 \leqslant d \leqslant 2^k - 1$, то рассмотрим расстановку из одного красного кубика и $N - 1$ белого. Если робот стартует перед красным кубиком, то после d ходов останутся один синий кубик и $2^k - 1$ белых. Если робот стартует непосредственно после красного кубика, то через d ходов останутся один красный кубик и $2^k - 1$ белых. Вышеприведённые аргументы для степени двойки показывают, что в этих двух ситуациях итоговые цвета будут разными, то есть N неудачно.

Решение 2. Заметим сразу, что, если чётное число N удачно, то и $N/2$ тоже. Действительно, если в расстановке N кубиков робот будет начинать только с чётных позиций, то после $N/2$ ходов он будет получать одну и ту же расстановку, в которой он стоит на всевозможных позициях. Поскольку каждая расстановка $N/2$ кубиков может быть получена таким образом, получаем требуемое.

Рассмотрим две расстановки, отличающиеся ровно в одном месте. Запустим в них по роботу параллельно; тогда получающиеся расстановки всегда будут отличаться ровно в одном месте. В частности, итоговые цвета будут различны.

Отсюда уже следует, что все нечётные $N = 2k+1 > 1$ (а значит, по замечанию, и все N, кроме степеней двойки) неудачны. Действительно, начнём с расстановки с одним красным и $2k$ белыми кубиками. Если робот стоял перед красным кубиком, через $k+1$ ход останутся один красный и $k-1$ белый кубик, робот стоит после красного. Если же робот стартует непосредственно после красного, через $k+1$ ход останутся один синий и $k-1$ белых кубиков, робот стоит непосредственно после синего. Как показано выше, итоговые цвета в этих двух ситуациях будут разными.

Покажем теперь, что, если N — степень двойки, то итоговый цвет не зависит от места старта. Для этого сделаем ещё одно наблюдение по поводу замены цвета. Если цвет одного кубика в расстановке сменить на следующий в циклическом порядке Б→К→С→Б, то после одного использования цвет сдвинется в *противоположную* сторону. Значит, если $N = 2^k$, любая такая замена исходного кубика приведёт к сдвигу цвета итогового кубика в одну и ту же сторону. Осталось заметить, что две расстановки, отличающиеся поворотом, получаются из расстановки всех белых кубиков за одинаковое количество замен «вперёд по циклу».