ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 19 марта 2017 г.

Предварительная версия решений

1. *В первый день 2^n школьников играли в пинг-понг «навылет»: сначала сыграли двое, затем победитель сыграл с третьим, победитель этой пары — с четвёртым и т.д., пока не сыграл последний школьник (ничьих в пинг-понге не бывает). Во второй день те же школьники разыграли кубок: сначала произвольно разбились на пары и сыграли в парах, проигравшие выбыли, а победители снова произвольно разбились на пары и сыграли в парах, и т.д. Оказалось, что наборы игравших пар в первый и во второй день были одни и те же (возможно, победители были другие). Найдите наибольшее возможное значение n.*

Б. Френкин

Ответ. 3.

Решение. Построим следующий граф: вершины — игроки, рёбра — сыгранные партии. Согласно условию, для обоих турниров этот граф один и тот же. Рассмотрим первый турнир и выберем те партии, победители которых до этого не выигрывали (например, такова первая партия). Тогда соответствующие рёбра образуют путь, а остальные рёбра одним концом примыкают к этому пути. В частности, если выбросить все висячие вершины, то останется только наш путь без крайних вершин.

Теперь рассмотрим тот же граф как граф кубкового турнира. Если из него выбросить висячие вершины, останется граф турнира на 2^{n-1} победителях первого этапа. Он, очевидно, является путём лишь при $n \le 3$, в противном случае победитель турнира будет иметь степень не меньше 3. Значит, $n \le 3$.

Осталось привести пример при $n = 3$. Пусть участники пронумерованы от 1 до 8 и пары в кубке таковы (первым указан проигравший, вторым победитель): 1–2, 3–4, 5–6, 7–8, 2–4, 6–8, 4–8. тогда при игре навылет пары могли быть такими (победитель снова указан вторым): 1–2, 2–4, 3–4, 4–8, 7–8, 8–6, 6–5.

2. *Сфера касается 99 рёбер некоторой выпуклой 50-угольной пирамиды. Обязательно ли тогда она касается и 100-го ребра этой пирамиды?*

М. Евдокимов

Ответ. Нет.

Решение. Мы покажем даже, что это неверно ни в одном из двух случаев: (а) сотое ребро — ребро основания, и (б) сотое ребро — боковое.

(а) Возьмём правильный 51-угольник $A_1A_2\ldots A_{51}$ с центром C. Пусть ω и Ω его вписанная и описанная окружности соответственно. Рассмотрим сферу S с центром C, которая пересекает плоскость 51-угольника по окружности ω, и рассмотрим конус с основанием Ω, в который вписана эта сфера. Пусть O — вершина этого конуса. Тогда у 50-угольной пирамиды $OA_1A_2\ldots A_{50}$ все боковые рёбра и 49 рёбер основания касаются сферы S, а ребро A_1A_{50} — не касается.

(б) Построим многоугольник, сферу и конус так же, как в пункте (а). Пусть теперь прямые A_1A_{51} и $A_{49}A_{50}$ пересекаются в точке B. Тогда пирамида $OA_1A_2\ldots A_{49}B$ — искомая: все её рёбра, кроме бокового ребра OB, касаются сферы S.

3. *Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство:*

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \ge \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \ldots + \frac{x_{n-3}}{x_1} + \frac{x_{n-2}}{x_2} + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

М. Фадин

Решение. Положим $x_{n+k} = x_k$. Тогда при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ по неравенству Коши о средних имеем

$$\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^4 + \left(\frac{x_{k+1}}{x_{k+2}}\right)^4 + \left(\frac{x_{k+2}}{x_{k+3}}\right)^4 + \left(\frac{x_{k+3}}{x_{k+4}}\right)^4 \geq 4 \cdot \frac{x_k}{x_{k+1}} \cdot \frac{x_{k+1}}{x_{k+2}} \cdot \frac{x_{k+2}}{x_{k+3}} \cdot \frac{x_{k+3}}{x_{k+4}} = 4\frac{x_k}{x_{k+4}}.$$

Сложив все n полученных неравенств, получаем учетверённое требуемое неравенство.

4. *Клетки доски 100×100 раскрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли перекрасить ровно 2018 различных клеток этой доски в противоположный цвет так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось одно и то же количество чёрных клеток?*

Ю. Чеканов

Ответ. Нет.

Решение 1. Ясно, что строки доски можно переставлять как угодно, и столбцы тоже. Переставим все нечётные столбцы влево, а все нечётные строки вниз. В итоге из исходной доски получится доска, разделённая на 4 одинаковых квадрата — два противоположных из них белые, а остальные чёрные.

Пусть после перекраски в каждой строке и каждом столбце оказалось по $50 + k$ чёрных клеток; тогда в каждом столбце и в каждой строке перекрашено на k белых клеток больше, чем чёрных. Пусть в одном из чёрных квадратов перекрашено a клеток. По замечанию выше, в каждом из белых квадратов перекрашено по $a+50k$ клеток, а тогда в другом чёрном квадрате также перекрашено $(a + 50k) - 50k = a$ клеток. Значит, общее число перекрашенных клеток равно $2a + 2(a + 50k) = 4(a + 25k)$, то есть оно делится на 4 и потому не может равняться 2018.

Решение 2. Пронумеруем строки снизу вверх, а столбцы справа налево, числами от 1 до 100 (пусть левая нижняя клетка чёрная). Тогда у каждой чёрной клетки чётная сумма координат, а у каждой белой — нечётная.

Рассмотрим сумму координат всех чёрных клеток (до или после перекраски). Поскольку в каждой строке их поровну, сумма их ординат делится на $1+2+\ldots+100 = 5050$, аналогично сумма абсцисс также делится на 5050. В частности, эта сумма до и после перекраски была чётной, то есть изменилась на чётное число.

С другой стороны, при перекраске исходно чёрной клетки в белый цвет наша сумма чётности не меняла, а при перекраске исходно белой в чёрный — меняла. Это значит, что было перекрашено чётное количество белых клеток.

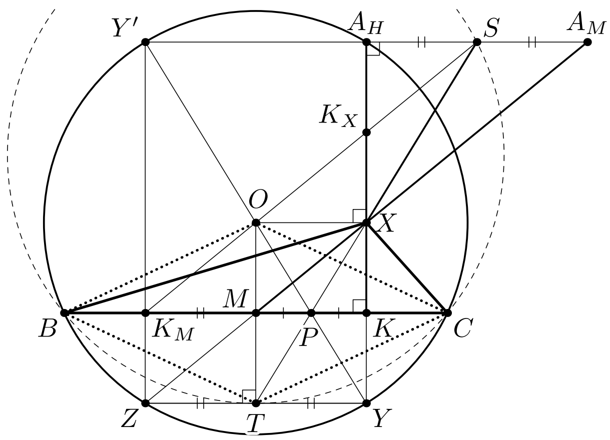
Пусть w и b — количества перекрашенных исходно белых и исходно чёрных клеток, соответственно. Тогда $w+b = 2018$, а $w-b$ делится на 4, поскольку как исходное, так и полученное количество чёрных клеток делится на 4. Значит, $w = ((w + b) + (w - b))/2$ — нечётное число. Противоречие.

5. *Дан треугольник XBC. Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC, центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC. Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I — середина A_HA_M.*

Е. Бакаев

Решение. Пусть M — середина BC, а Y и Z — точки, симметричные X относительно прямой BC и точки M, соответственно. Тогда $\angle BZC = \angle BYC = \angle BXC = 180^\circ - \angle BA_HC$, откуда точки A_H, B, C, Y и Z лежат на одной окружности Ω с центром O и радиусом R. При этом, поскольку $A_HA_M \parallel BC$ и $A_MX : XM = 2$, получаем $A_HX : XY = A_MX : 2XM = 1$, то есть X — середина A_HY.

Пусть T — середина YZ. Тогда $OTYX$ — прямоугольник, поэтому $TX = OY = R$. Из симметрии относительно BC получаем, что $OB = OC = TB = TC = R$. Значит, T — центр окружности, описанной около треугольника BXC, то есть, по лемме о трезубце, середина дуги BC окружности (A_IBC).



Пусть $K = A_HY \cap BC$, YY' — диаметр окружности Ω, а P и S — середины KM и A_HA_M, соответственно. Заметим, что $YZ = 2KM = A_HA_M = A_HY'$. Значит, TX пересекает отрезки KM и A_HA_M в их серединах P и S, а также $P = YY' \cap BC$. Тогда $BP \cdot PC = YP \cdot PY' = TP \cdot PS$ (последнее равенство выполнено в силу симметрии отрезков YY' и TS относительно перпендикуляра к BC в точке P). Значит, $TBSC$ — вписанный четырёхугольник, как и TBA_IC. Поскольку A_I и S лежат на TX, отсюда следует $A_I = S$.

Замечание. На последнем шаге можно действовать и по-другому. Пусть $K = A_HY \cap BC$, а S — середина A_HA_M. Пусть K_M и K_X — точки, симметричные K относительно M и X соответственно. Тогда в треугольнике A_IBC точка K_M — точка касания вневписанной окружности с BC, а K_X — точка вписанной окружности, диаметрально противоположная K. При гомотетии с центром A_I, переводящей вневписанную во вписанную, эти точки переходят друг в друга — значит, A_I лежит на K_MK_X. Осталось заметить, что K_MK_X проходит через S (поскольку $K_XK : K_XA_H = KK_M : A_HS = 2$), так что $A_I = K_MK_X \cap TX = S$.

6. *Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a) + P(b)$ делится на $a + b$?*

Г. Жуков

Ответ. При всех чётных n.

Решение. Нечётные n не подходят. В самом деле, рассмотрим многочлен $P(x) = x^n + 1$ и различные натуральные a, b. Так как n нечётно, $a^n + b^n$ делится на $a + b$, а тогда $P(a) + P(b) = (a^n + b^n) + 2$ не делится, поскольку $a + b > 2$.

Осталось доказать, что все чётные n подходят. Рассмотрим произвольный многочлен $P(x)$ степени n. Представим его в виде суммы $P(x) = P_0(x) + P_1(x)$, где в $P_0(x)$ все мономы чётной степени, а в $P_1(x)$ – нечётной. Заметим, что при всех натуральных a, b сумма $P_1(a) + P_1(b)$ делится на $a + b$. Докажем, что найдутся такие a, b,что и $P_0(a) + P_0(b)$ делится на $a + b$. Заметим, что степень P_0 равна n.

Рассмотрим случай, когда старший коэффициент $P_0(x)$ положителен (в случае отрицательного старшего коэффициента проведём дальнейшее доказательство для многочлена $-P_0(x)$). Так как $n > 1$, то найдётся такое натуральное m, что $P_0(m) > 2m$. Докажем, что $a = m$, $b = P_0(m) - m$ подходят. В силу выбора m, они оба натуральные, причём $b > a$. Далее, по модулю $a + b = P_0(m)$ выполняются сравнения $P_0(a) = P_0(m) \equiv 0$ (очевидно) и $P_0(b) = P_0((b+a)-a) \equiv P_0(-a) = P_0(m) \equiv 0$ (в силу чётности многочлена P_0). Значит, $P_0(a)+P_0(b) \equiv 0 \pmod{a + b}$, что и требовалось.

Замечание. В случае чётного n можно проделать подобное рассуждение и без разбиения на чётную и нечётную компоненты. Поскольку степень многочлена $P(x)+P(-x)$ равна $n > 1$, существует такое натуральное m, что $P(m) + P(-m) > 2m$. Тогда подойдут числа $a = m$, $b = P(m) + P(-m) - m$. Действительно, тогда $b > a > 0$, и по модулю $a + b = P(m) + P(-m)$ верно сравнение $P(a) + P(b) \equiv P(a) + P(-a) = P(m) + P(-m) \equiv 0$.