ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 20 марта 2016 г.

1. *На доске написано произведение* $\log_{\bigcirc}\square\cdot\ldots\cdot\log_{\bigcirc}\square$, *всего 50 множителей. У Васи есть 100 карточек:* $\boxed{2}$, ..., $\boxed{51}$ *и* (52), ..., (101). *Вася выкладывает круглые карточки на места кружочков и квадратные — на места квадратиков. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями, которые может получить Вася.*

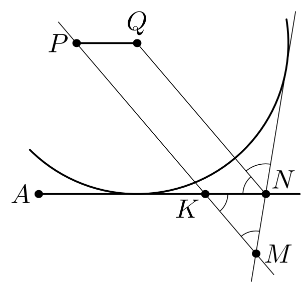
Г. Жуков

Ответ. 0.

Преобразуем каждый логарифм в минимальном и максимальном произведении по формуле $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$. Поскольку набор квадратных и круглых карточек в обоих случаях один и тот же, наборы числителей и знаменателей также совпадают, а значит максимальное и минимальное значения равны.

2. *На плоскости зафиксированы луч с вершиной A и точка P вне прямой, содержащей этот луч. На луче выбирают переменную точку K, затем на продолжении AK за точку K отмечают точку N так, что $NK = 1$, а на прямой PK отмечают точку M (отличную от K) так, что $NM = 1$. Докажите, что все прямые NM, полученные таким образом, касаются одной окружности.*

Е. Бакаев



Рассмотрим точку Q такую, что $PQNK$ — параллелограмм. Легко видеть, что Q фиксированная, т.е. не зависит от выбора точки K. Тогда $NQ \parallel KM$, значит NQ — внешняя биссектриса равнобедренного треугольника KNM. Поэтому Q равноудалена от данной прямой NK и прямой NM. Тем самым, окружность (фиксированная!) с центром в точке Q, касающаяся прямой NK, касается также прямой NM.

3. *Прямоугольник $p \times q$, где p, q — натуральные взаимно простые числа, $p < q$, разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла прямоугольника в его правый верхний угол проведена диагональ. Она отсекает треугольники от некоторых квадратиков. Найдите суммарный периметр всех этих треугольников.*

А. Толпыго

Ответ. $(p+1)(1+p/q+\sqrt{1+p^2/q^2})$.

Без ограничения общности можно считать, что вертикальная сторона прямоугольника равна p, а горизонтальная q. Тогда тангенс угла наклона диагонали к горизонтали равен $p/q < 1$, и она не может пересечь обе горизонтальные стороны какого-либо квадратика. Она не может пройти через вершину квадратика, не являющуюся вершиной всего прямоугольника: в этом случае $m/n = p/q$, где $m < p, n < q$, т.е. дробь p/q сократима, что противоречит взаимной простоте p и q. Если диагональ пересекает две вертикальные стороны квадратика, то она не отсекает треугольник. Треугольники образуются в следующих случаях: 1) в двух угловых квадратиках прямоугольника, 2) когда диагональ пересекает вертикальную и горизонтальную стороны какого-то квадратика (в каком-то порядке).

В первом случае горизонтальная сторона треугольника равна 1, вертикальная p/q, гипотенуза $\sqrt{1+p^2/q^2}$. Во втором случае диагональ пересекает промежуточную (не являющуюся стороной прямоугольника) горизонталь сетки. Как уже сказано, диагональ не может пересечь две горизонтали сетки подряд, поэтому образуются два прямоугольных треугольника, вертикальные стороны которых расположены на двух соседних вертикалях сетки. Сумма их периметров равна $1+p/q+\sqrt{1+p^2/q^2}$. Просуммировав по всем треугольникам, включая два угловых, получаем ответ.

4. *На сборах теннисистов было 30 мастеров и 30 юниоров. Каждый мастер сыграл с одним мастером и пятнадцатью юниорами, а каждый юниор — с одним юниором и пятнадцатью мастерами. Докажите, что найдутся такие два мастера и два юниора, что эти мастера сыграли между собой, юниоры — между собой, каждый из двух мастеров — хотя бы с одним из двух юниоров, а каждый из двух юниоров — хотя бы с одним из двух мастеров.*

А. Грибалко

Решение 1. Нарисуем таблицу 30×30; столбцы соответствуют мастерам, строки — юниорам, при этом пара сыгравших друг с другом мастеров соответствует паре соседних столбцов (то же с юниорами). Закрасим клетку, если соответствующие мастер и юниор сыграли друг с другом (всего закрашена половина клеток). Тогда таблица разбивается на квадраты 2×2, и нужно найти такой квадрат, в котором закрашена одна из диагоналей.

Заметим сразу, что это выполнено, если в квадрате хотя бы 3 закрашенных клетки. Значит, если утверждение неверно, то в каждом квадрате не более 2 закрашенных. Поскольку всего закрашена половина клеток, в каждмом кварате тогда ровно по 2 закрашенных клетки, образующих «доминошку».

Рассмотрим вертикальный ряд из 15 квадратов. В его столбцах поровну закрашенных клеток, а значит — поровну вертикальных доминошек. Значит, общее число вертикальных доминошек чётно; аналогично, общее число горизонтальных доминошек чётно. Но общее число доминошек есть нечётное число 15^2; противоречие.

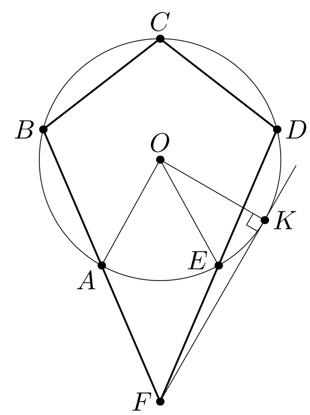
Решение 2. Предположим, что утверждение задачи неверно. Имеется 15 пар сыгравших между собой мастеров и столько же пар сыгравших между собой юниоров. Далее опускаем слова "сыгравших между собой". Пусть A, B — пара мастеров. Пусть есть k таких пар юниоров, что A сыграл с обоими игроками пары. Тогда B ни с кем не играл в этих парах. Далее, в этом случае есть $15-2k$ пар юниоров, в которых есть один сыгравший с A. Тогда B мог сыграть в этих парах только с теми $15-2k$ юниорами, с которыми сыграл A. На самом деле, B сыграл с ними всеми, так как иначе он должен был сыграть более чем с $2k$ юниорами из оставшихся k пар. Если же B сыграл с указанными $15-2k$ юниорами, то в оставшихся k парах он сыграл с обоими юниорами. В этих парах A не сыграл ни с кем.

Таким образом, паре мастеров соответствует чётное количество $(2k)$ пар юниоров, в которых один из этих мастеров сыграл с обоими, а другой ни с одним, и нечётное количество $(15-2k)$ пар юниоров, в которых, наоборот, один из юниоров сыграл с обоими мастерами, а другой ни с одним. Будем говорить, что в первом случае пара мастеров и пара юниоров образуют четвёрку первого типа, а во втором — четвёрку второго типа. Просуммируем количество четвёрок каждого типа для всех пар мастеров. Поскольку количество этих пар нечётно (равно 15), общее количество четвёрок второго типа нечётно. При этом общее количество четвёрок первого типа чётно. Но в проведённом рассуждении можно поменять местами мастеров и юниоров и получить противоположный результат! Противоречие.

Комментарий. Любое правильное решение этой задачи должно использовать нечётность числа 15. Если 15 и 30 заменить на $2n$ и $4n$, где n натуральное, то утверждение задачи будет неверно.

5. *В выпуклой шестиугольной пирамиде длины одиннадцати ребер равны 1. Чему может быть равна длина двенадцатого ребра?*

М. Евдокимов



Ответ. $(0,1)\cup(1,\sqrt{3})$.

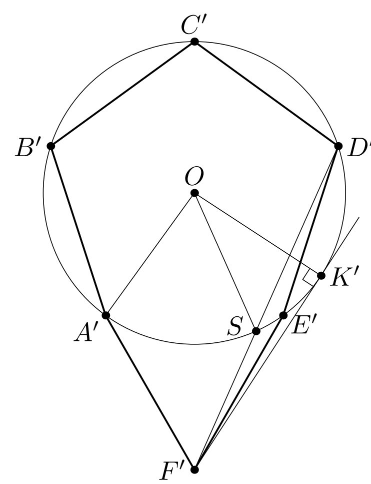
Пусть $HABCDEF$ — искомая пирамида с вершиной H, а O — проекция точки H на плоскость основания. В случае, когда все боковые ребра равны 1, все вершины основания лежат на окружности с центром O. Радиус этой окружности меньше 1. Ясно, что если 5 сторон вписанного шестиугольника равны 1, то длина оставшейся стороны может принимать все значения из интервала $(0,1)$.

В случае, когда одно из боковых ребер не равно 1, пять вершин шестиугольника лежат на окружности с центром O и радиусом $R<1$, а шестая вершина (пусть для определенности это будет вершина F) будет лежать вне окружности, причем $FA=FE=1$ по условию. Когда расстояние OH мало, значение R близко к 1. При этом OF и HF близки к 1.

Другой предельный случай, когда D, E и F лежат на одной прямой, изображен на рисунке 1 (недостижим, так как соседние ребра не могут лежать на одной прямой). В этом случае для касательной FK имеем: $FK^2=FE\cdot FD=2$. Поэтому

$$OF^2=R^2+2 \text{ и } HF^2=OH^2+OF^2=(1-R^2)+R^2+2=3, \text{ откуда } HF=\sqrt{3}.$$

В силу непрерывности, длина HF может принимать все значения из интервала $(1,\sqrt{3})$.



Покажем, что длина HF не может быть больше $\sqrt{3}$. Для промежуточных случаев мы получим какую-то пирамиду $H'A'B'C'D'E'F'$ (пять вершин основания лежат на окружности с центром O и радиусом $R'<1$, рис. 2). Пусть $D'F'$ пересекает окружность в некоторой точке S (E' лежит на дуге SD', так как пирамида выпукла). Тогда $F'S<F'E'=F'A'=1$, а $F'D'<F'E'+E'D'$ (неравенство треугольника), и для касательной $F'K'$ получаем $F'K'^2=F'S\cdot F'D'<1\cdot 2$. Поэтому

$$H'F'^2=OH'^2+OF'^2=(1-R'^2)+R'^2+F'K'^2<3, \text{ откуда } H'F'<\sqrt{3}.$$

6. *На доске написано N чисел: все они различны, и одно из них равно 0. Можно взять любой многочлен, каждый коэффициент которого равен одному из написанных чисел (среди коэффициентов могут быть равные), и дописать на доску все корни этого многочлена. За несколько таких операций на доске оказались все целые числа от -2016 по 2016 (и возможно ещё какие-то числа). Найдите наименьшее возможное значение N.*

Г. Жуков

Ответ. $N=2$.

Из одного нуля ничего получить нельзя. Значит, хотя бы одно число дописать придется.

Покажем, как получить все целые числа от -2016 до 2016 из чисел 0 и $a=2016!$.

Получим -1. Это можно сделать с помощью многочлена $ax+a$. С помощью ax^2-1 можно получить числа $\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, из которых с помощью многочлена $\dfrac{1}{\sqrt{a}}x-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ уже можно получить 1.

Теперь, если на доске написано число b, с помощью многочлена $x+b$ можно получить $-b$. Значит, мы можем сразу дописать на доску $-a$.

Предположим, на доске написаны числа от 0 до $M-1$. Получим M. Числа $0, \ldots, M-1$ — это цифры в системе счисления с основанием M. Представим число $2016!$ в этой системе. Это то же самое, что записать $2016!$ в виде значения многочлена $f(x)$ с коэффициентами от 0 до $M-1$ в точке M. Для $M \leqslant 2016$ свободный член этого многочлена равен 0. Тогда все коэффициенты многочлена $f(x)-2016!$ уже есть на доске, а его корнем является число M.

Осталось получить для оставшихся чисел противоположные им.