ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ 11 класс, УСТНЫЙ ТУР, 10 марта 2014 г.

Решения задач

1. В множестве $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$ выбрали подмножество A. Оказалось, что никакой квадратный трехчлен, все три коэффициента которого принадлежат A, не имеет действительных корней. Какое наибольшее число элементов могло быть в A?

Г. Жуков

Если $p, q \in A$ и $2p \leqslant q$, то дискриминант трехчлена $px^2 + qx + p$ неотрицательный, значит, у него есть корни. Таким образом, множество A не содержит чисел, отличающихся хотя бы вдвое.

Покажем, что если в A отношение любых двух чисел меньше 2, то все трехчлены с коэффициентами из A не имеют корней. Пусть M — наибольшее из чисел в A, а m — наименьшее. Тогда дискриминант трехчлена с коэффициентами из A не больше $M^2 - 4m^2 < 0$.

Очевидно, что максимальное подмножество $\{1, \ldots, 2014\}$, в котором отношение любых двух чисел меньше 2, имеет мощность 1007 (подходит, например, $\{1008, \ldots, 2014\}$.

2. Дан треугольник ABC. Луч, проведенный из вершины B через середину AC, пересекает внешнюю биссектрису угла A в точке P. Прямая PC пересекает прямую, содержащую внутреннюю биссектрису угла A, в точке Q. Докажите, что $BA = BQ$.

Ф. Ивлев

Проведём через точку B прямую, параллельную основанию AC. Пусть она пересекает продолжение внутренней биссектрисы угла A в точке Q_1, а внешнюю биссектрису угла A — в точке R. Обозначив угол A исходного треугольника за 2α, получаем: $\alpha = \angle BAQ_1 = \angle CAQ_1 = \angle BQ_1A$, откуда $AB = BQ_1$.

Так как внутренняя и внешняя биссектрисы угла A перпендикулярны, то $\angle RAQ_1 = \angle RAB + \alpha = 90°$. Но из прямоугольного треугольника RAQ_1 имеем: $\angle BRA + \alpha = 90°$, откуда $\angle BAR = \angle BRA$, и значит $BR = BA$ и следовательно $BR = BQ_1$.

Продлим теперь Q_1C до пересечения с внешней биссектрисой угла A в точке P_1. Тогда P_1B разделит AC пополам (так как $AC \parallel RQ_1$, и B делит RQ_1 пополам), откуда $P = P_1$, и значит $Q = Q_1$ и $AB = BQ$.

3. Профессор Выбегалло написал 1001 статью. В каждой статье он может поставить ссылки на другие статьи, но никакие две статьи не должны ссылаться друг на друга. Выбегалло получит *значимость* k, если после этого у него будет k статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы k статей. Какой наибольшей значимости он может добиться?

И. Богданов, Е. Молчанов

Пусть найдётся k статей, на каждую из которых ссылается k других. Обозначим множество этих k статей через X. Заметим, что всего ссылок, ведущих из X в X, не более $\frac{k(k-1)}{2}$. Значит, в множестве X найдётся статья, в которую ведёт не более $\frac{k-1}{2}$ ссылок из X. Это значит, что в эту статью ведёт ещё как минимум $\frac{k+1}{2}$ ссылок не из X, откуда $1001 \geq k + \frac{k+1}{2}$. Преобразуя неравенство, получаем: $2002 \geq 3k + 1$, откуда $k \leq 667$.

Осталось построить пример, где найдутся 667 статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы 667 статей. Выберем из 1001 статьи любое множество X из 667 статей, расположим их по кругу и на каждую статью сделаем ссылки в следующих за ней по кругу 333 статьях.

Осталось 334 статьи, не вошедшие в множество X — в каждой из них дадим ссылку на все статьи из X. Легко видеть, что на каждую статью из множества X будет сделано 667 ссылок.

4. В равногранном тетраэдре $ABCD$ точки A', B', C', D' — центры вневписанных сфер. Докажите, что A, B, C, D — центры вневписанных сфер тетраэдра $A'B'C'D'$. (Тетраэдр называется равногранным, если его грани — равные треугольники. Вневписанная сфера — это сфера, которая касается одной из граней и продолжений остальных граней.)

А. Заславский

Решение 1. Точки A', B' принадлежат внешней биссекторной плоскости двугранного угла CD. Значит прямые $A'B'$ и CD пересекаются. С другой стороны, A', B' лежат в биссекторной плоскости угла AB, которая в силу равногранности тетраэдра делит ребро CD пополам, т.е. прямая $A'B'$ проходит через середину CD. Аналогично прямые $A'C'$ и $B'C'$ проходят через середины ребер BD и AD соответственно. Следовательно, плоскость $A'B'C'$ симметрична ABC относительно центра тяжести M тетраэдра $ABCD$. Аналогично получаем, что и остальные грани $A'B'C'D'$ симметричны соответствующим граням $ABCD$ относительно M, что, очевидно, влечет утверждение задачи.

Решение 2. Переобозначим наш тетрадр $KML'N'$ и впишем его в параллелепипед $KLMNK'L'M'N'$. Тогда в каждой его грани диагонали равны (ибо они равны противоположным рёбрам тетраэдра). Значит, параллелепипед прямоугольный. Тогда из симметрии (относительно плоскости $KMK'M'$) очевидно, что плоскость $KLMN$ образует равные углы с плоскостями KML' и KMN'; из этого и подобных свойств следует, что искомые центры вневписанных сфер — это K', M', L и N. Теперь утверждение задачи очевидно из симметрии относительно центра параллелепипеда.

5. В белом клетчатом прямоугольнике, стороны которого больше 10, в черный цвет покрасили K клеток. Далее за ход выбирают ряд (горизонтальный или вертикальный), в котором черных клеток хотя бы 10, и красят в черный цвет все белые клетки этого ряда. После нескольких таких ходов все клетки стали черными. Докажите, что $K \geq 100$.

П. Кожевников

Докажем более общее утверждение для следующей (m,n)-игры для любых натуральных m, n.

В белом клетчатом прямоугольнике $M \times N$ (M строк и N столбцов), где $M > m$, $N > n$, в черный цвет покрасили K клеток. За ход выбирают строку, в которой черных клеток хотя бы n, и красят все ее белые клетки в черный цвет, или выбирают столбец, в котором черных клеток хотя бы m, и красят все его белые клетки в черный цвет. Тогда если после нескольких таких ходов все клетки станут черными, то $K \geq mn$.

Индукция по $m+n$. При $m = 1$ утверждение верно: чтобы закрасить в итоге все клетки, в начале должно быть не менее n столбцов, в которых есть хоть одна черная клетка. Аналогично при $n = 1$ утверждение верно.

Рассмотрим теперь (m,n)-игру в прямоугольнике $M \times N$, где $M > m > 1$, $N > n > 1$. Очевидно, хотя бы один ход была сделан. Пусть для определенности этот ход был в последней строке (от перестановки строк и столбцов условие задачи не меняется, для первого хода в столбце рассуждения аналогичны). Тогда далее мы можем отбросить эту строку и считать, что происходит $(m-1,n)$-игра в прямоугольнике $(M-1) \times N$. По предположению индукции в этом прямоугольнике изначально не менее $(m-1)n$ черных клеток. Плюс не менее n черных клеток в последней строке. Итого не менее чем $(m-1)n + n = mn$ черных клеток.

6. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x,y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x,y) > 0$ является квадрант $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$.

Л. Стунжас

Под квадрантом будем всегда понимать квадрант без границы. Так как в первом квадранте (и только там) многочлен положителен, то на границе этого квадранта он равен 0 (из непрерывности). Но тогда этот многочлен делится на xy (записав P в виде $P(x,y) = yQ(x,y) + R(x)$ и положив $y = 0$, получаем, что $R(x) \equiv 0$ при $x \geq 0$, то есть $P(x,y)$ делится на y; аналогично, он делится на x). Представим его в виде $P(x,y) = xyQ(x,y)$. Заметим, что знак $Q(x,y)$ совпадает со знаком $P(x,y)$ в первом и третьем квадрантах, и отличается — во втором и четвёртом. Так как $P(x,y)$ положителен в первом квадранте и неположителен в других квадрантах, то $Q(x,y)$ неотрицателен в первом, втором и четвёртом квадрантах, а в третьем квадранте — неположителен. Значит, он равен нулю на границе третьего квадранта, то есть тоже делится на xy, откуда $P(x,y) = (xy)^2 Q_1(x,y)$, и теперь знаки P и Q_1 уже совпадают во всех точках. Эти рассуждения можно продолжать до бесконечности, но степень P конечна. Значит, $P \equiv 0$, что противоречит условию задачи.