1. *На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график еще какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?*

Решение 1. Мы будем пользоваться тем *фактом*, что любой многочлен четной степени с положительным старшим коэффициентом принимает минимальное значение в некоторой точке.

Обозначим данные многочлены через $Q_i(x)$. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^{2n}$, где $2n > \deg Q_i$ для всех i. Покажем, что к P можно прибавить константу c так, что график $P + c$ не пересечет ни одного из графиков Q_i. Для этого заметим, что $P - Q_i$ — многочлены четной степени, а, значит, достигают своих минимальных значений m_i. Но тогда, положив $c = \max_i(-m_i + 1)$, мы получим искомый многочлен.

Решение 2. В тех же обозначениях положим $P = Q_1^2 + \ldots + Q_n^2 + 1$. Заметим, что при любом i и любом x верно неравенство $Q_1^2(x) - Q_1(x) + 1 + Q_2^2(x) + \ldots + Q_n^2(x) > 0$, т.к. $a^2 - a + 1 > 0$ при любом a. Значит, $P(x) > Q_1(x)$. Аналогично, $P(x) > Q_i(x)$, и график P не пересекается ни с одним из графиков Q_i..

2. *В квадратной таблице* 10×10 *записано сто положительных чисел. Сумма чисел в каждой строке равна 100. Коле разрешается переставить числа внутри каждой из строк (но не между строками). После этого в каждом столбце найдут максимальное число и сложат найденные числа. Докажите, что Коля может добиться того, чтобы полученная сумма была меньше 300.*

Пусть Коля переставит числа в каждой строке в порядке невозрастания. Покажем, что эта перестановка — требуемая.

Рассмотрим i-й столбец. Пусть максимальное число в нём равно m_i; оно стоит в некоторой строке. Тогда в первых i клетках этой строки стоят числа, не меньшие m_i. Значит, сумма чисел в этой строке не меньше im_i; с другой стороны, она равна 100. Итак, $m_i \leq \dfrac{100}{i}$.

В итоге, можно оценить сумму найденных чисел как

$$\sum_{i=1}^{10} m_i \leq 100 \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} = 100 \cdot \frac{7381}{2520} < 300,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Сумму обратных необязательно вычислять явно. Достаточно, например, заметить, что она равна

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3.$$

3. *В треугольник* ABC *вписана окружность, касающаяся сторон* BC, CA *и* AB *в точках* X, Y *и* Z *соответственно. На плоскости отметили точку* K. *Серединные перпендикуляры к отрезкам* KX, KY *и* KZ *пересекают прямые* BC, CA *и* AB *в точках* X_1, Y_1 *и* Z_1 *соответственно. Докажите, что точки* X_1, Y_1 *и* Z_1 *лежат на одной прямой.*

Пусть ℓ — радикальная ось вписанной окружности ω треугольника ABC и точки K (рассматриваемой как окружность нулевого радиуса). Заметим, что ℓ существует, поскольку K отлична от центра ω (в противном случае рассматриваемые перпендикуляры параллельны соответствующим сторонам). Тогда равенство $X_1X = X_1K$ означает, что X_1 лежит на ℓ; аналогично, точки Y_1 и Z_1 также лежат на ℓ.

4. *Конечно или бесконечно множество натуральных чисел, у которых как в десятичной записи, так и в семеричной записи нет нуля?*

Ответ. Бесконечно.

При любом натуральном n положим $a_n = 7^n + 7^{n-1} + \cdots + 7 + 1$. Покажем, что к a_n можно прибавить несколько различных степеней семёрки, не превосходящих 7^n, чтобы получилось число b_n без нулей в десятичной записи. Тогда семеричная запись b_n будет состоять из единиц и двоек. Ясно, что таким образом мы построим бесконечно много различных чисел b_n, удовлетворяющих условию.

Итак, рассмотрим десятичную запись числа a_n; рассмотрим первый *слева* ноль в ней (если он есть). Пусть он стоит в i-м разряде *справа* (разряд единиц считаем нулевым). Найдётся степень семёрки 7^k, лежащая между 10^i и $7 \cdot 10^i$; заметим, что она меньше a_n, и поэтому меньше 7^{n+1}. После прибавления её к a_n перехода из i-го разряда не произойдёт (так как первая цифра 7^k меньше 9), при этом в i-м разряде окажется не ноль.

Значит, в полученном числе первый слева ноль в десятичной записи (если он есть) расположен правее, чем в a_n; применим к этому нулю то же действие (при этом мы прибавим меньшую степень семёрки, чем в предыдущий раз). Продолжая так дальше, в результате мы построим требуемое число b_n.

5. *У Клары есть комплект всевозможных бус из $4n$ бусинок, где каждая бусинка либо чёрная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)*

Ответ. $2n$ бусинок.

Покажем сначала, что всегда возможно перекрасить не более $2n$ бусинок. Пусть в испорченных бусах w белых и $b = 4n - w$ чёрных бусинок. Мысленно наложим исходные бусы на испорченные $4n$ способами, отличающимися поворотами. Тогда каждая бусинка исходных бус по одному разу наложится на каждую бусинку испорченных. Значит, всего будет b^2 наложений чёрной бусинки на чёрную и w^2 наложений белой на белую. Тогда в каком-то из $4n$ способов будет не меньше, чем $\dfrac{b^2+w^2}{4n} \geq \dfrac{(b+w)^2}{8n} = 2n$ наложений одноцветных бусинок. Теперь достаточно перекрасить все бусинки испорченных бус, на которые в этом наложении накладываются бусинки другого цвета.

Осталось привести пример, когда не удастся обойтись меньшим числом перекрашиваний. Пусть исходные бусы выглядели как ···–○–●–●–○–○–●–●–○–○–●–···, а Карл их переставил в порядке ···–○–●–○–●–○–●–○–●–○–●–···. Легко видеть, что для получения исходных бус среди любых четырёх бусинок подряд надо перекрасить не меньше двух, значит, всего потребуется не менее $2n$ перекрашиваний.

Замечание. Из оценки видно, что в любом экстремальном примере должно быть $2n$ чёрных и $2n$ белых бусинок.

6. *Даны 1 000 000 окружностей, проходящих через одну точку. Докажите, что их можно разбить на 12 групп так, что среди окружностей одной группы ни одна не будет проходить через центр другой. Пусть все окружности проходят через точку O. Проведём через O четыре прямых, разбивающих плоскость на 8 углов по $45°$, так, чтобы ни один центр окружности не лежал на этих прямых. Мы разобьём окружности, центры которых лежат в двух вертикальных углах, на три группы, удовлетворяющие условию; сделав так с каждой парой вертикальных углов, получим требуемое.*

Разобьём всю плоскость, кроме точки O, на такие кольца с центром в O, что отношение внешнего и внутреннего радиусов каждого кольца равно $\sqrt{2}$. Будем считать, что внешняя окружность каждого кольца принадлежит ему, а внутренняя — нет. Занумеруем все кольца последовательно целыми числами: $\ldots, R_{-1}, R_0, R_1, \ldots$. Поместим в первую, вторую и третью группы все окружности, центры которых лежат в кольцах R_{3i+1}, R_{3i+2} и R_{3i} соответственно (при целых i); напомним, что мы имеем дело лишь с окружностями, центры которых лежат в двух вертикальных углах. Мы утверждаем, что это разбиение — искомое.

Пусть A и B — центры двух окружностей ω_A и ω_B, причём A лежит на ω_B, то есть $OB = AB$. В частности, это значит, что $\angle AOB$ острый, поэтому точки лежат в одном угле, и $\angle AOB < 45°$. Значит, $\angle ABO = 180° - 2\angle AOB > 90°$; Отсюда $OA^2 > AB^2 + OB^2 = 2OB^2$, и точка A лежит в кольце с бо́льшим номером, чем B. С другой стороны, $OA \leq OB + AB = (\sqrt{2})^2 AB$; значит, эти номера различаются не более, чем на 2. Поэтому A и B попали в разные группы, что и требовалось.

Замечание. Можно проделать аналогичную процедуру, разбив плоскость на 12 углов по $30°$ и объединив их в группы по три, как показано на рисунке справа. В этом случае отношение радиусов колец может быть любым в пределах от $\sqrt{2}$ до $\sqrt{3}$.