ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ **11 класс, очный тур, 10 мая 2009 г.**

Решения задач

1. *На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?*

(И.И.Богданов)

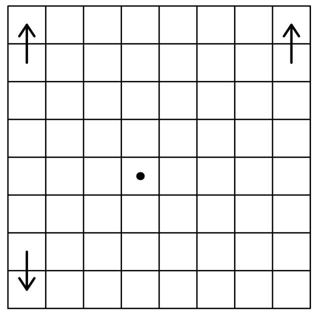
Ответ: $\frac{3}{2}100!$.

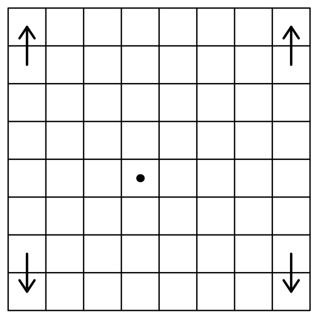
Заметим сначала, что для натуральных a и b неравенство $a+b>ab$ выполнено если и только если $a=1$ или $b=1$. Действительно, если скажем $a \geq b > 1$, то $a+b \leq 2a \leq ab$. А если, например, $a=1$, то $1+b>b=1\cdot b$.

Пусть некоторая последовательность действий привела к максимальному результату. Среди них ровно одно действие содержало в качестве аргумента единицу. Согласно лемме, все остальные действия можем считать умножениями. В самом деле, если в результате одного из действий получилось не меньшее число, чем было, то и результатом последующих действий будут числа, не меньшие, чем были. Аналогично действие, содержащее единицу, можно считать сложением. Пусть единица была сложена с числом n. В итоге получится число $\frac{n+1}{n}100! = (1+\frac{1}{n})100!$. Поскольку мы ищем максимум, $n=2$.

2. *Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав свой путь на клетке $d4$. Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку $a1$ она попала с клетки $a2$, на клетку $a8$ она попала с клетки $a7$ и на клетку $h8$ она попала с клетки $h7$. С какой клетки она попала на клетку $h1$?*
(Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).

(А.К.Толпыго)





Пусть ладья попала на клетку $h1$ с клетки $h2$. Посмотрим, в каком порядке обходятся углы доски. Противоположные углы доски не могут идти подряд в пути ладьи — тогда соединяющий их путь отделяет один из двух других противоположных углов, и в этот угол ладья попасть не может. Значит, углы обходятся либо против часовой стрелки, либо по часовой стрелке. Случаи абсолютно аналогичны, разберем первый. Достаточно разобрать варианты, когда первый угол в пути левый. Если первым проходится левый верхний угол, то путь, соединяющий первые три угла, отрезает последний угол — ладья не может в него попасть. Если первым проходится левый нижний угол, то уже пройдя следующий угол, мы оказываемся отрезанными от остальных углов.

Полученное противоречие доказывает, что на клетку $h1$ ладья могла попасть только с клетки $g1$.

3. *Даны n цветов с номерами от 1 до n. Для каждого k от 1 до n пусть $f_k(n)$ обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до n в первые k цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что числа $f_1(n)+f_3(n)+f_5(n)+\ldots$ и $f_2(n)+f_4(n)+f_6(n)+\ldots$ отличаются на 1.*
(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например, $f_1(2)=1$ и $f_2(2)=2$.)

(М.А.Берштейн, Г.А.Мерзон)

Обозначим сумму $f_1(n)+f_3(n)+\ldots$ через $O(n)$, а сумму $f_2(n)+f_4(n)+\ldots$ через $E(n)$. Докажем индукцией по n, что $|O(n)-E(n)|=1$. Для $n=1$ это равенство справедливо. Пусть оно верно для некоторого для некоторого количества цветов n. Заметим, что $f_k(n+1)=kf_k(n)+kf_{k-1}(n)$ при $1<k<n+1$, поскольку добавив число $n+1$, мы можем покрасить его в один из имеющихся k цветов, если остальные числа уже раскрашены в k цветов, либо, если остальные числа раскрашены в $k-1$

цвет, покрасить его в оставшийся из k первых цветов. Заметим также, что $f_{n+1}(n+1) = (n+1)f_n(n)$ и $f_1(n+1) = f_1(n)$. Тогда

$$O(n+1) = f_1(n) + 3(f_3(n) + f_2(n)) + 5(f_5(n) + f_4(n)) + \ldots,$$

$$E(n+1) = 2(f_2(n) + f_1(n)) + 4(f_4(n) + f_3(n)) + \ldots.$$

Вычитая одно выражение из другого и производя сокращения, получим, что

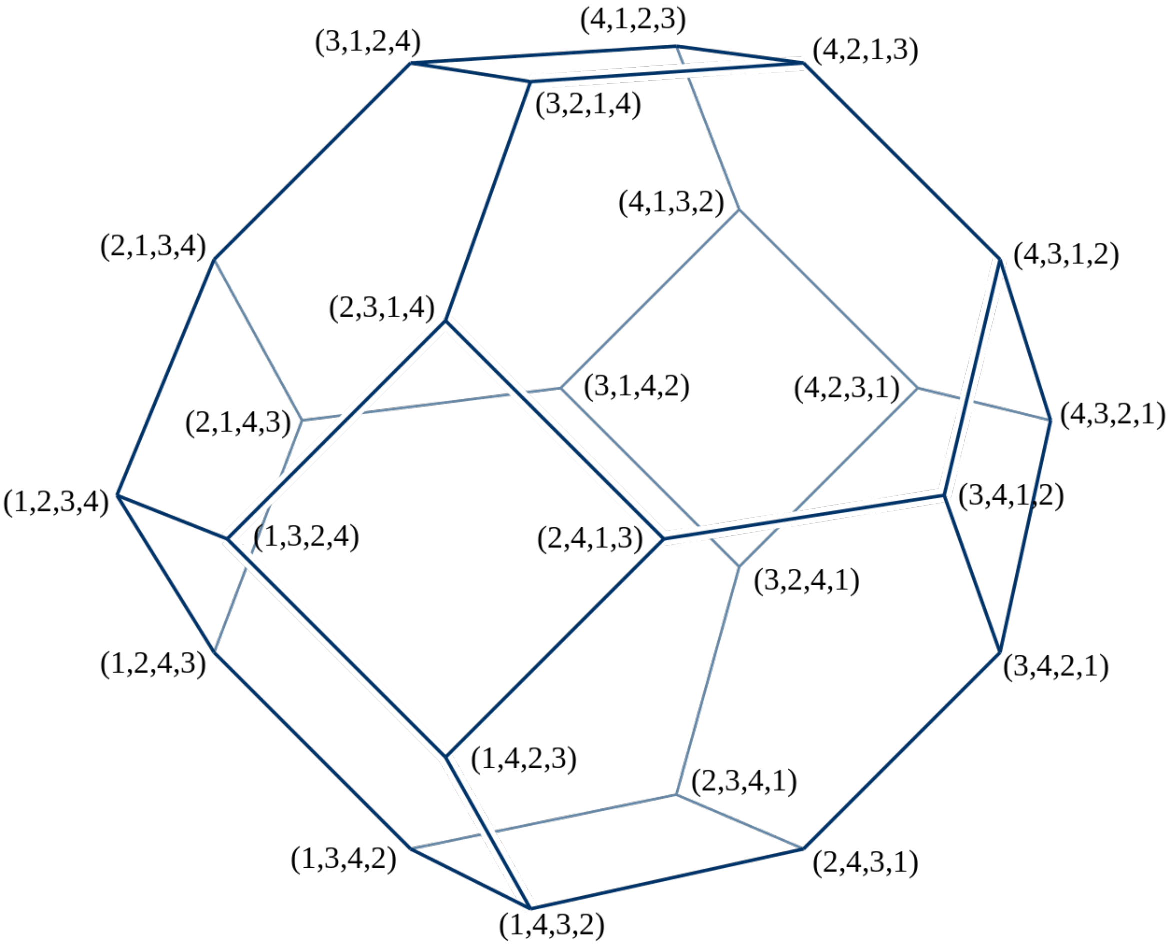
$$O(n+1) - E(n+1) = E(n) - O(n),$$

откуда следует утверждение задачи для $n+1$ цветов.

Комментарий. Как ни удивительно, у этой задачи имеется и геометрическое решение. Дело в том, что (для фиксированного n) числа $f_k(n)$ суть количества $(n-k)$-мерных граней у некоторого $(n-1)$-мерного многогранника — *пермутаэдра.* Такой многогранник можно получить, взяв в n-мерном пространстве выпуклую оболочку $n!$ точек, координаты которых — числа от 1 до n в каком-либо порядке. Чтобы разобраться в этом утверждении, можно начать с построения биекции между ребрами пермутаэдра и раскрасками множества $\{1,\ldots,n\}$ в $n-1$ цвет.

Например, количество вершин этого многоугольника $n!$, то есть равно $f(n)$. (В качестве хорошего упражнения можно попробовать установить биекцию между ребрами пермутаедра и раскрасками множества $\{1,\ldots,n\}$ в $n-1$ цвет.)

Для $n=2$ пермутаэдр — это просто отрезок, для $n=3$ — шестиугольник, для $n=4$ — усеченный октаэдр (см. рисунок).



Таким образом, для решения задачи достаточно доказать, что знакопеременная сумма количеств k-мерных граней пермутаэдра равна 1. Но формула Эйлера гарантирует, что такая сумма равна 1 вообще для любого выпуклого (многомерного) многогранника. Например, для трехмерных многогранников эта формула превращается в известное равенство $V - E + F - 1 = 1$, где V, E и F — числа вершин, ребер и граней многогранника, а слагаемое "-1" соответствует его внутренности; равенство количеств вершин и ребер многоугольника — тоже частный случай это формулы.

4. *Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$ кроме ребра CD. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра кроме ребра AB.*

(В.В.Произволов)

Лемма. *Существует сфера, касающаяся всех рёбер тетраэдра, быть может, кроме CD, если и только если $AC + BD = AD + BC$.*

Пусть искомая сфера существует. Тогда вписанные окружности треугольников ABC и ABD касаются в точке касания данной сферы с ребром AB. Наоборот, если вписанные окружности треугольников ABC и ABD имеют общую точку (а значит, касаются), то содержащая их сфера — искомая. Пусть M_1 и M_2— точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ABD с ребром AB. По известной формуле для длин отрезков, на которые разбиваются стороны треугольника точками касания вписанной окружности, $AM_1 = \frac{AB+AC-BC}{2}$ и $AM_2 = \frac{AB+AD-BD}{2}$. Касание вписанных окружностей эквивалентно тому, что $AM_1 = AM_2$, то есть $\frac{AB+AC-BC}{2} = \frac{AB+AD-BD}{2}$, что равносильно равенству $AC + BD = AD + BC$.

Вернёмся к решению задачи. Так как существует сфера, касающаяся всех рёбер тетраэдра, кроме CD, то по лемме $AC + BD = AD + BC$. И по той же лемме, применённой к ребру AB, получаем искомую сферу. Осталось доказать, что полученная сфера не касается всех рёбер тетраэдра. Предположим противное. Тогда она бы пересекала плоскости ABC и ABD по вписанным окружностям соответствующих треугольников, то есть имела бы две общие окружности со сферой, данной в условии, а значит, совпадала бы с ней.

5. *Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального n найдется такое натуральное k, что $P(\frac{1}{n}) = \frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся такие числа c и m, что $P(x) = c \cdot x^m$.*

(С.Спиридонов)

Пусть $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$. Приведя дроби $a_m, \ldots, a_1, a_0$ к общему знаменателю t, запишем $P(x)$ в виде

$$\frac{1}{t}(b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0),$$

где числа $t, b_m, \ldots, b_0$ — целые. Возьмем x равным достаточно большому простому числу p. Тогда

$$P\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{b_m + p b_{m-1} + \ldots + p^m b_0}{t \cdot p^m}.$$

Если $p > |b_m|$, то числитель полученной дроби взаимно прост с p^m. С другой стороны, если хотя бы один из коэффициентов $b_{m-1}, \ldots, b_0$ отличен от нуля и p достаточно велико,

$$|b_m + p b_{m-1} + \ldots + p^m b_0| > |t|,$$

откуда числитель нашей дроби не может полностью сократится со знаменателем, и значит число $P(\frac{1}{p})$ не имеет вида $\frac{1}{k}$, что противоречит условию. Поэтому $b_{m-1} = \ldots = b_0 = 0$, и утверждение задачи доказано.

6. *Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)*

(А.В.Шаповалов)

У параллелепипеда есть две квадратные грани со стороной 1 м — назовем их малыми. За первые три минуты каждый муравей находит малую грань: он идет по ребру до конца, потом по другому — и тогда он знает, какие ребра образуют малую грань. Далее второй бегает по своей малой грани против часовой стрелки, а первый с начала 4-й по конец 5-й минуты обходит два ребра своей малой грани по часовой стрелке. Либо он встретит второго, либо затем за 2 минуты перейдет на другую малую грань, и там, идя снова по часовой стрелке, не позднее чем через 1,5 минуты встретит второго. Итого максимум будет потрачено 8,5 минут.