

## ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 10 мая 2009 г.

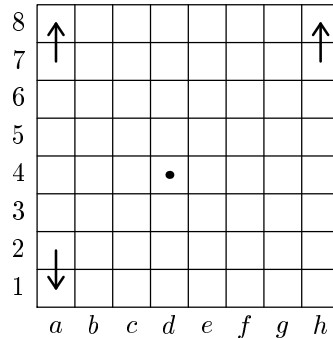
1. На доске написаны числа  $1, 2, \dots, 100$ . Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?

(И.И.Богданов)

2. Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав свой путь на клетке  $d4$ . Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку  $a1$  она попала с клетки  $a2$ , на клетку  $a8$  она попала с клетки  $a7$  и на клетку  $h8$  она попала с клетки  $h7$ . С какой клетки она попала на клетку  $h1$ ?

(Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).

(А.К.Толпыго)



3. Даны  $n$  цветов с номерами от 1 до  $n$ . Для каждого  $k$  от 1 до  $n$  пусть  $f_k(n)$  обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до  $n$  в первые  $k$  цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что числа  $f_1(n) + f_3(n) + f_5(n) + \dots$  и  $f_2(n) + f_4(n) + f_6(n) + \dots$  отличаются на 1.

(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например,  $f_1(2) = 1$  и  $f_2(2) = 2$ .)

(М.А.Берштейн, Г.А.Мерзон)

4. Сфера касается всех ребер тетраэдра  $ABCD$  кроме ребра  $CD$ . Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра кроме ребра  $AB$ .

(В.В.Произволов)

5. Дан многочлен  $P(x)$  с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального  $n$  найдется такое натуральное  $k$ , что  $P(\frac{1}{n}) = \frac{1}{k}$ . Докажите, что найдутся такие числа  $c$  и  $m$ , что  $P(x) = c \cdot x^m$ .

(С.Спиридонов)

6. Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда  $1 \times 1 \times 2$  м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)

(А.В.Шаповалов)