

ИНВАРИАНТЫ ЗАЦЕПЛЕННОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАФОВ

Э. АЛКИН, Ю. ХРОМИН, А. СКОПЕНКОВ

Аннотация. Мы излагаем определения коэффициентов зацепления и чисел Ву–Саймона для пространственных графов. Мы излагаем некоторые результаты и предлагаем нерешенные задачи. Изложение основано на плоских диаграммах, поэтому знания стереометрии не требуется.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Зацепления и плоские диаграммы	2
2. Коэффициент зацепления по модулю 2	3
3. Коэффициент зацепления	4
4. Основные результаты о наборах коэффициентов зацепления	5
5. Основные результаты об изотопности и гомотопичности	8
6. Реализация коэффициентов зацепления: к доказательству теоремы 4.7	9
7. Некоторые ответы, подсказки и решения	10
8. Изотопность на языке плоских диаграмм	12
Список литературы	14

Основные определения даны в §1. Основные результаты сформулированы в §§4, 5 с использованием понятия *коэффициента зацепления*, определенного (при помощи проекций) в §3. Наброски доказательств основных результатов даны в §§6, 7, [AKS, §9].

Замечание (о стиле этого текста).

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму научного языка. Благодаря этому и текст становится доступным для начинающих, и удастся быстро добраться до интересных сложных и важных результатов, методов и теоретических идей.

Таким образом, многие из приведенных идей работают для более общих случаев. Мы не тратим время читателя на несложные обобщения. Их легко придумать или найти в литературе. Трудно именно *применить* общую теорию для ярких результатов, сформулированных вне этой теории, когда неизвестно заранее, какую теорию нужно применять (и вообще, можно ли хоть какую-то теорию применить).

Более простой материал приводится, чтобы сделать естественным и доступным более сложный. Попытка начинать с более простого (например, с частных случаев) повышает самостоятельность — а, значит, глубину и надежность — освоения материала. Проще самому доказать частный случай, самому продумать переход от частного к общему, чем самому сразу

Э. Алкин, А. Скопенков: Московский физико-технический институт.

Ю. Хромин: Физико-математическая школа №146 (Пермь).

А. Скопенков: Независимый московский университет, <https://users.mccme.ru/skopenko>.

Этот текст представлен в качестве проекта Летней Конференции Турнира Городов 2026 года, см. <https://www.turgor.ru/lktg/index.php>. Мы благодарны А. Мирошникову, А. Мизеву, О. Никитенко и Р. Никкуни за полезные обсуждения, и О. Никитенко за подготовку некоторых рисунков. Некоторые рисунки подготовлены с использованием статьи [Ta95].

доказать общий случай. Самостоятельно придуманное надежнее запоминается и легче модифицируется. Кроме того, обычно на частном случае проще отловить и исправить ошибки. Подробнее см. [ZSS, §11.2].

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировки утверждения. Некоторые результаты приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний. Если к утверждению (или задаче) не приведено ни доказательство, ни ссылка на него, то оно несложно. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», важные вспомогательные результаты — «леммами». Если не оговорено противное, то все это (а также примеры) — задачи для решения.

В тексте есть небольшое количество задач (полезно рассматривать и утверждения как задачи). Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). *Загадкой* называется не сформулированный четко вопрос; здесь нужно придумать и четкую формулировку, и доказательство.

Определения важных понятий даны **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти.

Мы приглашаем школьников представлять свои письменные решения на конференциях школьников, см., например, [ZS25].

1. ЗАЦЕПЛЕНИЯ И ПЛОСКИЕ ДИАГРАММЫ

Можно представить себе *узел* как тонкую упругую нить, концы которой склеены; см. компоненты на рисунке 1.1. Строго говоря, **узел** — это пространственная замкнутая несамопересекающаяся ломаная. **Зацепление** (рисунок 1.1) — это упорядоченный набор попарно непересекающихся узлов, которые называются *компонентами* зацепления.

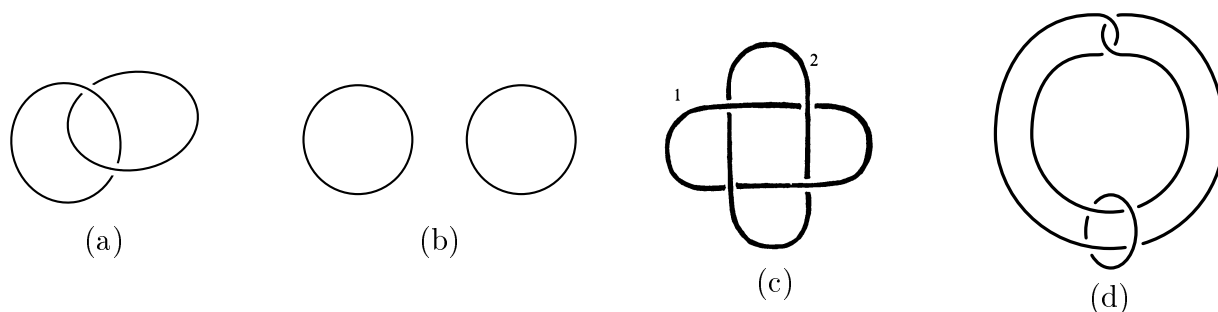


Рис. 1.1. Зацепление Хопфа (а), тривиальное зацепление (b) и еще два зацепления (с, d)

Зацепления обычно изображаются с помощью их «удачных» проекций на плоскость, называемых *плоскими диаграммами* (рисунок 1.1; под проекцией мы понимаем тень). Представьте, что вы кладете веревку на стол и аккуратно записываете, как она пересекает саму себя (т.е. какая часть лежит сверху, а какая снизу). *Плоская диаграмма зацепления* — это его проекция *общего положения* на плоскость, вместе с указанием в каждом перекрестке, какой отрезок «проходит снизу», а какой «проходит сверху» (рисунок 1.1). Проекции одного и того же зацепления на разные плоскости могут выглядеть совершенно по-разному.

В данном тексте мы строго работаем не с зацеплениями и их плоскими диаграммами, а с *абстрактными плоскими диаграммами*. Здесь «абстрактная» означает «не обязательно построенная на основе какого-либо зацепления», и в дальнейшем часто опускается.

Строго говоря, набор замкнутых ломаных на плоскости называется набором *общего положения*, если

- (i) их вершины попарно различны,
- (ii) любые два отрезка ломаных либо не пересекаются, либо пересекаются в общей концевой точке, либо пересекаются в общей внутренней точке, и
- (iii) никакие три внутренности этих отрезков не имеют общей точки.

Общие внутренние точки, такие как указано в (ii), называются **перекрестками**.

Плоская диаграмма (абстрактная) состоит из

- упорядоченного набора общего положения некоторых замкнутых ломаных на плоскости,
- указания в каждом перекрестке, какой отрезок «проходит снизу», а какой «проходит сверху» (рисунок 1.1).

Каждая из замкнутых ломаных называется **компонентой** плоской диаграммы.

Отрезок ломаной, проходящий снизу, называется **проходом**, а проходящий сверху называется **переходом**.

Утверждение 1.1. * Для любой абстрактной однокомпонентной плоской диаграммы существует узел, проецирующийся в эту диаграмму. (Такой узел не обязательно единственный; см., однако, [Sk20u, Утверждение 1.1.c].)

2. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 2

Понятие *коэффициента зацепления* двух замкнутых пространственных кривых было введено К. Гауссом в его исследованиях по электромагнетизму [RN11]. Неформально говоря, коэффициент зацепления — это число оборотов, которое одна кривая делает вокруг другой. Не совсем ясно, как определить это число (даже неформально) для сложных пар кривых. Мы дадим строгое определение на языке плоских диаграмм.

Коэффициент зацепления по модулю 2, $lk_2 \in \mathbb{Z}_2$, двухкомпонентной плоской диаграммы — это взятое по модулю 2 число перекрестков, в которых первая компонента проходит сверху.

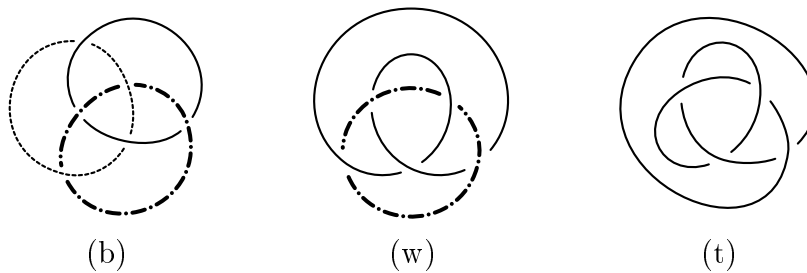


Рис. 2.1. Кольца Борромео (b), зацепление Уайтхеда (w) и трилистник (t).

Никакие два из колец Борромео не зацеплены, но все три вместе зацеплены (т.е. их нельзя продеформировать в три попарно непересекающихся шара, ср. §8)

Задача 2.1. (a,b,c) Для выбранного вами порядка компонент найдите коэффициенты зацепления по модулю 2 плоских диаграмм на рисунке 1.1, двухкомпонентных поддиаграмм колец Борромео на рисунке 2.1.b, и каждой пары непересекающихся циклов длины 3 на рисунке 4.1, справа.

Изменение перекрестка — это замена прохода на переход или наоборот, см. рисунок 2.2.

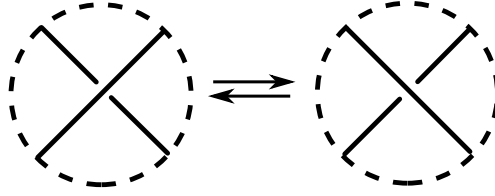


Рис. 2.2. Изменение перекрестка. Изображены фрагменты плоских диаграмм в виде дисков, ограниченных пунктирными окружностями. Вне дисков диаграммы идентичны. Никакие другие ребра плоских диаграмм, кроме изображенных, не пересекают диски. То же самое для рисунков 3.3, 4.2, 8.1.

Утверждение 2.2. Для любых двухкомпонентных плоских диаграмм D_+ и D_- , отличающихся изменением перекрестка, образованного пересечением разных компонент, имеем $\text{lk}_2 D_+ - \text{lk}_2 D_- = 1 \in \mathbb{Z}_2$.

Утверждение 2.3. Перестановка компонент сохраняет коэффициент зацепления по модулю 2.

В доказательстве (и далее) вы можете использовать без доказательства следующую *лемму о четности*: любые две замкнутые ломаные общего положения на плоскости пересекаются в четном числе точек. Обсуждение и доказательство см. в §1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости» [Sk18, Sk].

Обратная к ломаной $l = L_1 L_2 \dots L_m$ — это ломаная $\bar{l} := L_m L_{m-1} \dots L_1$. Конкатенация ломаных $l = L_1 \dots L_m$ и $p = L_m P_2 \dots P_n$ — это ломаная $lp := L_1 \dots L_m P_2 \dots P_n$.

Лемма 2.4. Пусть l_1, l_2, l_3 — ломаные, соединяющие точку A с точкой B , и не пересекающие ломаную p . Тогда

$$\text{lk}_2(l_1 \bar{l}_2, p) + \text{lk}_2(l_2 \bar{l}_3, p) = \text{lk}_2(l_1 \bar{l}_3, p).$$

3. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Вы знаете, что такое ориентированная ломаная, значит, вы знаете, что такое *ориентированное зацепление* (рисунок 3.1) и что такое *ориентированная плоская диаграмма*.

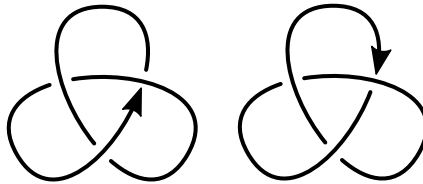


Рис. 3.1. Два трилистника с противоположными ориентациями

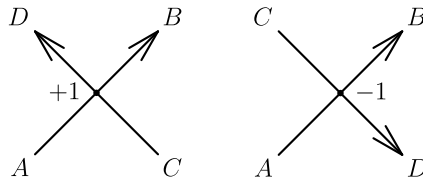


Рис. 3.2. Знак пары пересекающихся отрезков

Пусть $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ — упорядоченная пара пересекающихся векторов (ориентированных отрезков) на плоскости. Определим **знак** пары как $+1$, если ABC ориентирован по часовой стрелке, и -1 в противном случае (рисунок 3.2).

Коэффициент зацепления lk двухкомпонентной ориентированной плоской диаграммы — это сумма знаков во всех тех перекрестках, где первая компонента проходит над второй. Здесь в каждом перекрестке *первый* (*второй*) вектор — это ориентированное ребро первой (*второй*) компоненты.

Задача 3.1. (a,b,c) Для выбранных вами порядка и ориентации компонент найдите коэффициенты зацепления плоских диаграмм на рисунке 1.1, двухкомпонентных поддиаграмм колец Борромео на рисунке 2.1.b, и каждой пары циклов длины 3 на рисунке 4.1, справа.

(d) Для любого целого n существует ориентированная двухкомпонентная плоская диаграмма, коэффициент зацепления которой равен n .

(e) Для любой тройки целых чисел k, l, m существует ориентированная трехкомпонентная плоская диаграмма, попарные коэффициенты зацепления которой равны k, l, m .

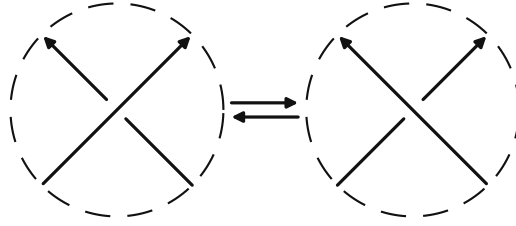


Рис. 3.3. Ориентированное изменение перекрестка

Утверждение 3.2. Для любых ориентированных двухкомпонентных плоских диаграмм D_+ и D_- (соответственно слева и справа на рисунке 3.3), отличающихся ориентированным изменением перекрестка, образованного пересечением разных компонент, имеем $\text{lk } D_+ - \text{lk } D_- = 1$.

Утверждение 3.3. (a) Изменение ориентации любой из компонент меняет знак коэффициента зацепления.

(b) Перестановка компонент сохраняет коэффициент зацепления.

Для п. (b) полезна следующая лемма.

Лемма 3.4. Коэффициент зацепления равен $(n_{12} - n_{21})/2$, где

- n_{12} — сумма знаков в тех перекрестках, в которых первая компонента проходит над второй, и
- n_{21} — сумма знаков в тех перекрестках, в которых вторая компонента проходит над первой.

В доказательстве (и далее) вы можете использовать без доказательства следующую *лемму о тривиальности*: для любых двух замкнутых ориентированных ломаных общего положения на плоскости сумма знаков их точек пересечения равна нулю. Обсуждение и доказательство см. в §1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости» [Sk18], [Sk].

Лемма 3.5. Пусть l_1, l_2, l_3 — ломаные, соединяющие точку A с точкой B , и не пересекающие замкнутую ломаную p . Тогда

$$\text{lk}(l_1 \bar{l}_2, p) + \text{lk}(l_2 \bar{l}_3, p) = \text{lk}(l_1 \bar{l}_3, p).$$

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О НАБОРАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Вложение $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ графа K в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ — это изображение без самопересечений графа K (рисунок 4.1). Мы рассматриваем такие вложения графов, для которых ребра изображаются ломаными. Простое строгое определение таких вложений дано в [AKS,

Remark 8.4]. Но вам не нужно знать его для решения задач, поскольку все результаты могут быть переформулированы и доказаны в терминах *плоских диаграмм*, см. замечание 4.2.

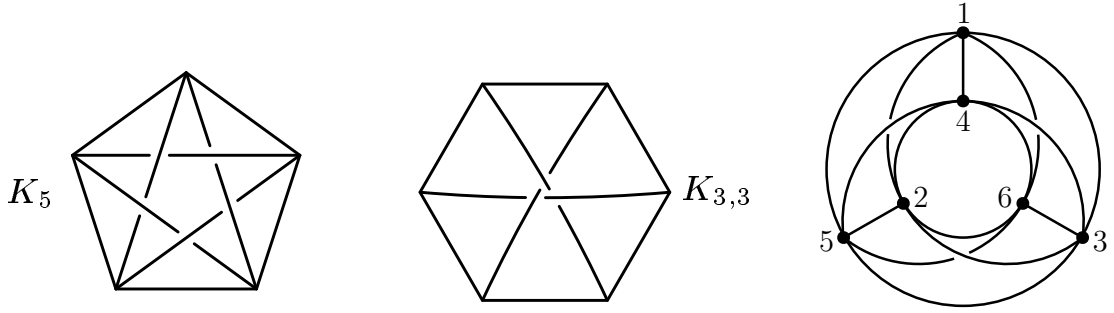


Рис. 4.1. Вложения графов в $\mathbb{R}^3$

Обозначим через

- $[n]$ множество $\{1, 2, \dots, n\}$;
- K_n полный граф с множеством вершин $[n]$;
- $K_{m,n}$ полный двудольный граф с долями $[m]$ и $[n]'$ (мы обозначаем через A' копию A).

Теорема 4.1 (Конвей–Гордон–Закс). *Для любого вложения $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ сумма коэффициентов зацепления по всем неупорядоченным парам непересекающихся циклов длины 3 в K_6 нечетна.*

Этот результат не является частью данного проекта, но лишь служит мотивацией для теорем 4.3, 4.7, утверждения 4.4 и гипотезы 4.5.

Из этого и следующих разделов для решения в рамках проекта предназначены только теоремы 4.3, 4.7, 5.2, утверждение 4.4 и задача 5.1. Некоторые из них могут быть не очень простыми без подсказок, данных в следующих разделах.

Замечание 4.2 (переформулировка в терминах плоских диаграмм). *Плоская диаграмма вложения графа в $\mathbb{R}^3$ определяется аналогично плоской диаграмме зацепления (используя понятие изображения графа на плоскости общего положения, определенного в [AKS, §8]). Плоская диаграмма графа (абстрактная) определена в [AKS, §8] аналогично (абстрактной) плоской диаграмме (определенной в §1). Теорема 4.1 переформулируется так: для любой плоской диаграммы графа K_6 сумма коэффициентов зацепления по всем неупорядоченным парам непересекающихся треугольников в K_6 нечетна. Аналогично переформулируются все те результаты этого текста, которые сформулированы в терминах вложений графов в $\mathbb{R}^3$.*

Теорема 4.3. *Для любого графа K существует вложение $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что коэффициент зацепления любых двух непересекающихся циклов длины 3 делится на 3.*

Это было доказано Р. Никкуни в 2026 году. Для графов с менее чем 6 вершинами теорема 4.3, утверждение 4.4 и гипотеза 4.5 не являются содержательными. В теореме 4.3 (и, предположительно, в гипотезе 4.9) $\text{mod } 3$ можно заменить на $\text{mod } t$ для любого нечетного целого t . Но не на $\text{mod } 2$ (ввиду теоремы 4.1).

Утверждение 4.4. То же, что и в теореме 4.3, с заменой «делится на 3» на «не равно нулю».

Гипотеза 4.5. *Для любого графа K существует вложение $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что для любых трех попарно непересекающихся циклов длины 3 наибольший общий делитель их попарных коэффициентов зацепления равен 1.*

Аналог без ‘длины 3’ неверен ввиду теоремы Негами [Ne91, PS05] (и ввиду [FD05, Theorem 3.1], дающей конкретную константу для соответствующего частного случая теоремы Негами).

Задача 4.6. Для любого целого k существует вложение $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что коэффициент зацепления

- одной (неупорядоченной) пары непересекающихся циклов длины 3 равен $2k + 1$, а
- любой другой пары непересекающихся циклов длины 3 равен нулю.

Этот элементарный результат появился в недавних исследованиях [KS20, Proposition 1.2] и [AT21, конец §2.2], хотя мог быть известен и ранее.

Теорема 4.7. Возьмем любые 10 целых чисел $n_{123,456}, n_{124,356}, \dots$, соответствующих 10 неупорядоченным разбиениям множества [6] на два 3-элементных подмножества. Если сумма этих чисел нечетна, то существует вложение $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что коэффициент зацепления каждой пары $\{ijk, pqr\}$ непересекающихся циклов длины 3 равен $n_{ijk,pqr}$. Здесь мы считаем, что $i < j < k$ и $p < q < r$, и берем ориентации (ijk) и (pqr) на циклах.

Это доказано в [Mi]; это следует из лемм 6.4 и 6.5 ниже, ср. с теоремой 6.1.

Задача 4.8 (нерешенная). Для каждого n найдите все упорядоченные наборы целых чисел, реализуемые в качестве наборов коэффициентов зацепления вложения $K_n \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Общие подсказки. Описывайте сложные конструкции с помощью простых модификаций простых конструкций! Большинство представленных геометрических задач сводятся к простым алгебраическим задачам.

Подсказка к теореме 4.3: используйте рисунок 4.2 и лемму 3.4.

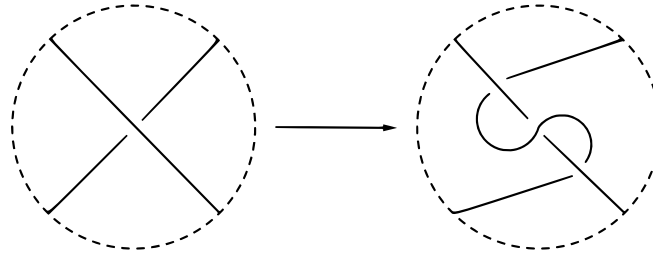


Рис. 4.2. Утроение перекрестка

Обобщение теоремы 4.1 Конвея–Гордона–Закса на многократную зацепленность.

Следующая гипотеза не является частью этого проекта, но служит мотивацией для теоремы 4.3.

Гипотеза 4.9. Пусть $K_{11} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — вложение такое, что коэффициент зацепления любых двух непересекающихся циклов длины 3 делится на 3. Тогда существует «борромеева по модулю 3» тройка попарно непересекающихся циклов длины 3 в K_{11} , т.е. тройка, у которой тройной коэффициент зацепления по модулю 3 не равен нулю.

Замечание. По поводу колец Борромео, см. рисунок 2.1.b и, например, [Zi10, Sk24], [Sk, §4] вместе с приведенными там ссылками. Целочисленный *тройной коэффициент зацепления (Милнора)* определен для ориентированного трехкомпонентного зацепления, все попарные коэффициенты зацепления которого равны нулю, см., например, [MM01, §2, Theorem (3)], [Sk24], [Sk, §4.9]. Аналогично определяется *тройной коэффициент зацепления по модулю m* для ориентированного трехкомпонентного зацепления, все попарные коэффициенты зацепления которого делятся на m . Таким образом, для содержательности гипотезы 4.9 необходима теорема 4.3. Согласно утверждению 4.4 и гипотезе 4.5, в гипотезе 4.9 нельзя опустить предположение о «попарной тривиальности по модулю 3», даже если в заключении заменить «по модулю 3» на «по модулю m для некоторого $m > 1$ ».

Для достаточно больших n и любого вложения $K_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ в графе K_n существуют три попарно непересекающихся цикла (не обязательно длины 3), образы которых образуют зацепление, изотопное кольцам Борромео. Это следует из теоремы Негами [Ne91, PS05]. Однако аналог гипотезы 4.9 с заменой K_{11} на K_n при достаточно больших n нетривиален.

По поводу других, но близких проблем о неотъемлемой n -зацепленности см., например, обзор [Na20] и приведенные там ссылки.

Предполагаемое доказательство и контрпример для K_{10} вместо K_{11} приведены в [AS].

Подробнее см. [AKS, end of §4].

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ ИЗОТОПНОСТИ И ГОМОЛОГИЧНОСТИ

Под *изотопией* зацепления мы понимаем его непрерывную деформацию в трехмерном пространстве как набора тонких упругих нитей; на протяжении всей деформации не допускаются самопересечения (ни одной нити с собой, ни разных нитей). См. рисунок 5.1 и сведение к плоским диаграммам в §8.



Рис. 5.1. Узлы, изотопные трилистнику

Задача 5.1. Пожалуйста, докажите эти утверждения на интуитивном уровне (поскольку у вас нет строгого определения изотопии).

(а) Все узлы (представленные своими плоскими диаграммами) на рисунке 5.1 изотопны друг другу.

(б) Зацепление Уайтхеда (рисунок 2.1.w) изотопно зацеплению с рисунка 1.1.d.

(с) Две плоские диаграммы зацепления получены проекциями на разные плоскости. Тогда эти диаграммы получены проекциями на одну плоскость из двух (различных, но) изотопных зацеплений.

Подсказка к (а). «Вероятно, лучший способ решить эту задачу — сделать модель узла трилистника из веревки или шнура, а затем перемещать ее из одного положения в другое» [Pr95, §2].

Теорема 5.2. (а) Существуют неизотопные вложения $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^3$, сужения которых на любой простой цикл в K_5 изотопны.

(б) (киральность [Si86]) Никакое вложение $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ не изотопно своему зеркальному образу.

(а', б') То же для $K_{3,3}$ вместо K_5 .

Вложения из пп. (а, а') различаются целыми числом Ву–Саймона и двудольным числом Ву–Саймона, определенными в [AKS, §9]. При помощи этих же инвариантов доказываются пп. (б, б').

Замечание 5.3 (вложения с точностью до узлов). *Изотопическая классификация узлов настолько сложна, что вряд ли может быть получена. Если вложения $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ изотопны, то их сужения на любой простой цикл в K изотопны. Таким образом, вряд ли удастся получить изотопическую классификацию вложений графов в $\mathbb{R}^3$. Поэтому интересно определить и классифицировать «вложения с точностью до узлов». Существует несколько формализаций этой идеи: гомологичность (определена в [AKS, §10]), сингулярная гомотопия, почти изотопия, необъемлемая изотопия; см. обзор [Sk'].*

Теорема 5.4. Два вложения графа (не обязательно связного) в пространство гомологичны тогда и только тогда, когда гомологичны их сужения на любой подграф, гомеоморфный

$K_5, K_{3,3}$ или $K_3 \sqcup K_3$. Или, эквивалентно, когда все коэффициенты зацепления, числа Ву–Саймона и двудольные числа Ву–Саймона (сужений отображений f, g) равны.

Эта теорема не является частью данного проекта. Она доказана в [ST03] с использованием гомологической классификации в терминах инварианта Ву–Саймона [Ta95] и вычисления некоторой группы гомологий $H_2^{\text{skew-sym}}(K \times K - \text{diag}; \mathbb{Z})$ [Ni00]; см. подробнее в [AKS, Remark 9.9].

Задача 5.5 (нерешенная; ср. с задачей 4.8). * (а) Для каждого n найдите наборы целых чисел, реализуемые как наборы коэффициентов зацепления и чисел Ву–Саймона вложений $K_n \rightarrow \mathbb{R}^3$. (начните с $n = 6$).

(b) Аналогичный вопрос с добавлением двудольных чисел Ву–Саймона.

6. РЕАЛИЗАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАЦЕПЛЕНИЯ: К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 4.7

Переформулируем теорему 4.7. Обозначим через X множество неупорядоченных разбиений множества $[6]$ на два 3-элементных подмножества. **Функция зацепленности** $l_f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ вложения $f : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ сопоставляет каждому разбиению $x = \{\{i, j, k\}, \{p, q, r\}\} \in X$, где $i < j < k$ и $p < q < r$, коэффициент зацепления $f(ijk)$ и $f(pqr)$. (Множество всех функций $X \rightarrow \mathbb{Z}$ можно рассматривать как множество всех векторов с целыми координатами, индексированных разбиениями из X .)

Теорема 6.1 (ср. с теоремой 4.7). Для любой функции $\varphi : X \rightarrow \mathbb{Z}$ с нечетной суммой значений существует вложение f с $l_f = \varphi$.

Задача 6.2. (а) Как меняется l_f при преобразовании вложения $f : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$, показанном на рисунке 6.1?

(b) (загадка) Тот же вопрос для вложения $f : K_n \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Решив задачу 6.2.b, вы можете доказать утверждение 4.4.

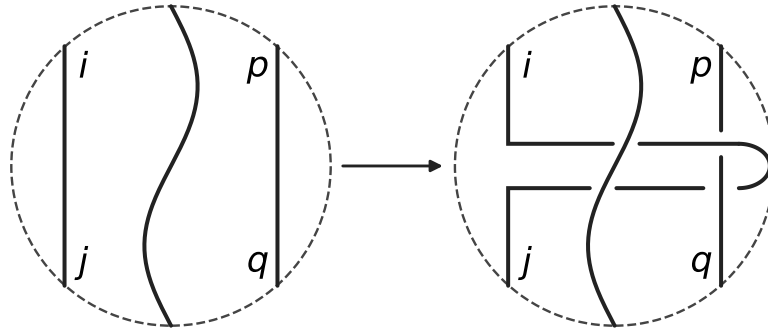


РИС. 6.1. Пальцевое движение одного ребра через другое

Интересной парой назовем упорядоченную пару (ij, pq) непересекающихся ориентированных ребер графа K_6 таких, что $i < j$ и $p < q$. Возьмем интересную пару (ij, pq) . Возьмем $a, b \in [6]$ такие, что $\{i, j, p, q, a, b\} = [6]$. Определим функцию $v_{ij,pq} : X \rightarrow \mathbb{Z}$ по формуле¹

$$v_{ij,pq}(\{i, j, a\}, \{p, q, b\}) := \text{sgn}(a - i) \text{sgn}(a - j) \text{sgn}(b - p) \text{sgn}(b - q) \in \{+1, -1\},$$

$$v_{ij,pq}(\{i, j, b\}, \{p, q, a\}) := \text{sgn}(b - i) \text{sgn}(b - j) \text{sgn}(a - p) \text{sgn}(a - q) \in \{+1, -1\},$$

и $v_{ij,pq}(x) := 0$ для всех остальных $x \in X$.

Например, $v_{15,23}(\{2, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}) = 0$, а

$$v_{15,23}(\{2, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}) = v_{15,23}(\{1, 5, 4\}, \{2, 3, 6\}) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1.$$

¹Хотя формулы используют выбор a и b из $\{a, b\}$, они не зависят от этого выбора.

Задача 6.3. Как зависит функция $v_{ij,pq}$ от перестановки ребер ij, pq ?

Лемма 6.4. Для любого вложения $f : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и любой интересной пары (ij, pq) существуют вложения $f_+, f_- : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такие, что $l_{f_\pm} - l_f = \pm v_{ij,pq}$.

Функция $v : X \rightarrow \mathbb{Z}$ называется *реализуемой*, если v равна некоторой целочисленной линейной комбинации функций $v_{ij,pq}$ по всем интересным парам (ij, pq) .

Лемма 6.5 ([Mi]). Любая функция $X \rightarrow \mathbb{Z}$ с четной суммой значений реализуема.

Лемма следует из утверждений 6.6.ab.

Для любого $x \in X$ определим индикаторную функцию

$$\chi_x : X \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{следующим образом} \quad \chi_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = y \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Утверждение 6.6. (a) Для любых двух разбиений из X либо сумма, либо разность их индикаторных функций реализуема.

(b) Удвоенная индикаторная функция любого разбиения из X реализуема.

Замечание. Вот другое, более концептуальное определение (не используемое в этом проекте). *Интересной* парой назовем упорядоченную пару (ij, pq) непересекающихся ориентированных ребер графа K_6 . Возьмем интересную пару (ij, pq) . Возьмем $a, b \in [6]$ такие, что $\{i, j, p, q, a, b\} = [6]$. Определим функцию $v_{ij,pq} : X \rightarrow \mathbb{Z}$ по формуле

$$v_{ij,pq}(\{i, j, a\}, \{p, q, b\}) := \text{sgn}(i, j, a) \text{sgn}(p, q, b), \quad v_{ij,pq}(\{i, j, b\}, \{p, q, a\}) := \text{sgn}(i, j, b) \text{sgn}(p, q, a),$$

и $v_{ij,pq}(x) := 0$ для всех остальных $x \in X$. Здесь *знак* вектора из 3 целых чисел равен

$$\text{sgn}(k, l, m) := \text{sgn}(k - l) \text{sgn}(l - m) \text{sgn}(m - k) \in \{+1, -1\}.$$

Это знак перестановки, упорядочивающей k, l, m по возрастанию.

Например, $v_{15,23}(\{2, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}) = 0$, а

$$v_{15,23}(\{2, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}) = v_{15,23}(\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}) = \text{sgn}(1, 5, 4) \text{sgn}(2, 3, 6) = (-1) \cdot 1 = -1.$$

7. НЕКОТОРЫЕ ОТВЕТЫ, ПОДСКАЗКИ И РЕШЕНИЯ

1.1. См. рисунок 7.1. На верхнем ребре каждого перекрестка плоской диаграммы выберем две близкие точки по разные стороны от перекрестка. Заменим отрезок ломаной между двумя выбранными точками на «мостик», поднимающийся над плоскостью диаграммы и соединяющий эти две точки. Заменим соответствующими мостиками отрезки ломаных во всех перекрестках. Получим узел, проекция которого является объединением отрезков данной плоской диаграммы.

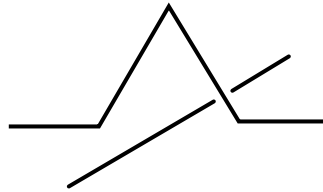


Рис. 7.1. Мостик над перекрестком

2.1. Ответы: (a) 1 для зацепления Хопфа и 0 для остальных зацеплений; (b) 0; (c) 1 для пары циклов (123) и (456); 0 для остальных пар.

2.3. Возьмем плоскую диаграмму зацепления. По лемме о четности (сформулированной после утверждения 2.3) число перекрестков, в которых первая компонента проходит над второй, имеет ту же четность, что и число перекрестков, где вторая компонента проходит над первой. Это завершает доказательство.

3.1. Ответы: (a) 1; 0; 2; 0 (знаки могут заменяться на противоположные в зависимости от выбранной ориентации);

(b) 0; (c) +1 для пары циклов (123) и (456); 0 для остальных пар.

3.3. (a) Изменение ориентации любой из компонент меняет знак в каждом перекрестке на противоположный.

(b) Перестановка компонент меняет знак в каждом перекрестке на противоположный. Таким образом, п. (b) следует из леммы 3.4.

3.4. Это следует из того, что по лемме о тривиальности (сформулированной после леммы) $n_{12} + n_{21} = 0$.

4.3. Следуем тексту Р. Никкуни, с его любезного разрешения.

Заменим каждый перекресток тремя перекрестками как показано на рисунке 4.2. Возьмем любые два непересекающихся ориентированных цикла длины 3 в графе. Тогда определен знак каждого перекрестка этих циклов, и в исходной, и в новой диаграмме. Для каждого из перекрестков исходной диаграммы ребро, проходившее *сверху*, после замены проходит *сверху* в двух из новых перекрестков и *снизу* в оставшемся новом перекрестке. Знак каждого из этих двух новых перекрестков совпадает со знаком исходного перекрестка. Знак оставшегося нового перекрестка противоположен знаку исходного перекрестка. Используем для исходной диаграммы обозначения n_{12} и n_{21} из леммы 3.4, а для новой диаграммы аналогично определим n'_{12} и n'_{21} . Для каждого исходного перекрестка, вносящего вклад ± 1 в сумму $n_{12} - n_{21}$, соответствующие три новых перекрестка вносят вклад $\pm(1 - (-1) + 1) = \pm 3$ в сумму $n'_{12} - n'_{21}$. Тогда для любых двух непересекающихся циклов сумма $n'_{12} - n'_{21}$ делится на 3. Значит, по лемме 3.4 полученная плоская диаграмма является требуемой.

4.4. Указание. Выберем пару циклов с нулевым коэффициентом зацепления. Модифицируем плоскую диаграмму так, чтобы коэффициент зацепления в этой паре циклов стал ненулевым, а новых пар с нулевыми коэффициентами зацепления не появилось. Для этого многократно применим лемму 6.4. При этом коэффициенты зацепления нужной и некоторых других пар циклов изменятся на $\pm N$ для произвольного наперед заданного целого N .

4.6. Это следует из леммы 6.4, утверждения 6.6.a и результата задачи 3.1.c.

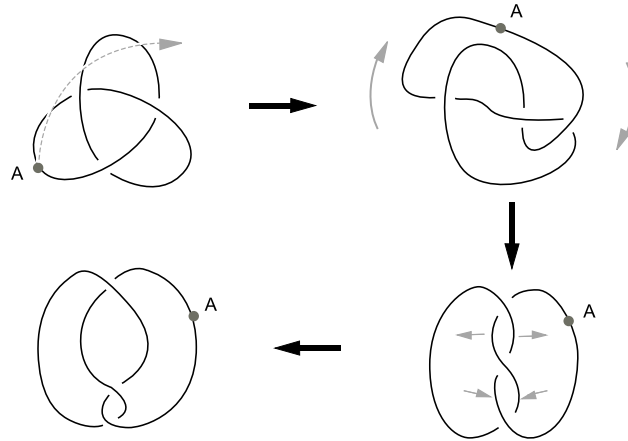


Рис. 7.2. Изотопия трилистника

5.1. (a) Выполнить некоторые преобразования трилистника поможет рисунок 7.2 (выполненный Д. Кроо).

6.2. (a) См. лемму 6.4.

6.3. Не изменяется.

6.4. Приведем упрощенное изложение доказательства из [KS20].

Приведем решение для вложения f_- . Неформально, мы получаем f_- , оборачивая ребро $f(ij)$ на -1 оборот вокруг ребра $f(pq)$, как на рисунке 6.1. Приведем строгую конструкцию.

На ребре ij выберем близкие точки I и J , между которыми нет перекрестков, так чтобы ориентация отрезка IJ совпадала с ориентацией ребра ij . На ребре pq аналогично выберем точки P и Q , так, чтобы ориентация отрезка PQ совпадала с ориентацией ребра pq . При помощи пальцевого движения заменим отрезок IJ исходной диаграммы (т.е. диаграммы вложения f) на несамопересекающуюся ориентированную ломаную l_1 общего положения, так, чтобы она проходила через точки P и Q , как показано на рисунке 6.1. В частности, в перекрестке P ломаная l_1 проходит сверху, а в перекрестке Q и во всех остальных перекрестках — снизу.

Рассмотрим в исходной диаграмме любые два непересекающиеся цикла x и y длины 3. Обозначим через x_- и y_- соответствующие им циклы в полученной диаграмме (т.е. диаграмме вложения f_-). Обозначим через $\bar{x}$ разбиение множества вершин графа K_6 на два трехэлементных подмножества, в котором одно из подмножеств состоит из вершин цикла x . Везде далее после введения ориентации на циклах x и y будем брать согласованные с ними ориентации на циклах x_- и y_- .

Если ребро ij не входит ни в один из циклов x и y , то при любой ориентации на этих циклах выполняется

$$\text{lk}(x_-, y_-) = \text{lk}(x, y).$$

Отсюда $l_{f_-}(\bar{x}) - l_f(\bar{x}) = 0$.

Если ребро ij входит в один из циклов x и y , то не уменьшая общности оно входит в цикл x . Возьмем на цикле x ориентацию такую же, как у ребра ij . Будем считать цикл x первым. Обозначим через l_2 ориентированную ломаную, являющуюся дополнением до ориентированного отрезка IJ в цикле x .

Тогда если цикл y не содержит ребро pq , то при любом выборе ориентации на нем, по лемме 3.5 выполняется

$$\text{lk}(x_-, y_-) = \text{lk}(l_1 l_2, y) = \text{lk}(l_1 JI, y) + \text{lk}(IJ l_2, y) = 0 + \text{lk}(x, y).$$

Отсюда $l_{f_-}(\bar{x}) - l_f(\bar{x}) = 0$.

Если же цикл y содержит ребро pq , то обозначим вершины циклов x и y так, что $x = ija, y = pqb$. Возьмем на цикле y ориентацию такую же, как у ребра pq . Тогда знак перекрестка в точке P равен -1 . Следовательно, по лемме 3.5 выполняется

$$\text{lk}(x_-, y_-) = \text{lk}(l_1 l_2, y) = \text{lk}(l_1 JI, y) + \text{lk}(IJ l_2, y) = -1 + \text{lk}(x, y).$$

Отсюда $l_{f_-}(\bar{x}) - l_f(\bar{x}) = -\text{sgn}(a - i) \text{sgn}(a - j) \text{sgn}(b - p) \text{sgn}(b - q)$.

Из всего вышесказанного вытекает формула $l_{f_-} - l_f = -v_{ij,pq}$.

Конструкция вложения f_+ получается из вышеприведенной конструкции изменением перекрестков в точках P и Q (проход меняется на переход и наоборот).

6.6. Следуем [Mi].

(а) Для любых различных разбиений $x, y \in X$ найдутся $\alpha \in x, \beta \in y$ такие, что $|\alpha \cap \beta| = 2$. Тогда существует интересная пара (ij, pq) такая, что $\{i, j\} = \alpha \cap \beta$ и $\{p, q\} = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$.

Следовательно, $v_{ij,pq}(z) = \begin{cases} \pm 1 & \text{если } z = x \text{ или } z = y \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$. Значит, $\pm v_{ij,pq} = \chi_x \pm \chi_y$.

(б) Возьмем любое разбиение $x \in X$, и обозначим $s := \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\} \in X$. По п. (а), $\chi_x \pm \chi_s$ реализуема, следовательно, $2\chi_x \pm 2\chi_s$ реализуема. Тогда $2\chi_s = v_{12,45} + v_{16,34} + v_{23,56}$, значит, $2\chi_s$ реализуема. Следовательно, $(2\chi_x \pm 2\chi_s) \mp 2\chi_s = 2\chi_x$ также реализуема.

(По-иному, для любой перестановки σ множества $[6]$ имеем $\pm 2\chi_{\sigma(s)} = v_{\sigma(12),45} + v_{\sigma(16),34} + v_{\sigma(23),56}$, где мы расширяем определение $v_{ij,kl}$ с помощью замечания после утверждения 6.6.)

8. ИЗОТОПНОСТЬ НА ЯЗЫКЕ ПЛОСКИХ ДИАГРАММ

Вместо зацеплений с точностью до изотопии в этом тексте мы изучаем плоские диаграммы с точностью до эквивалентности, порожденной движениями Райдемайстера (рисунки 8.1) и плоской изотопией. Под плоской изотопией плоской диаграммы мы понимаем ее

непрерывную деформацию на плоскости без появления самопересечений. Это мотивируется следующей теоремой (которая не является частью данного проекта).

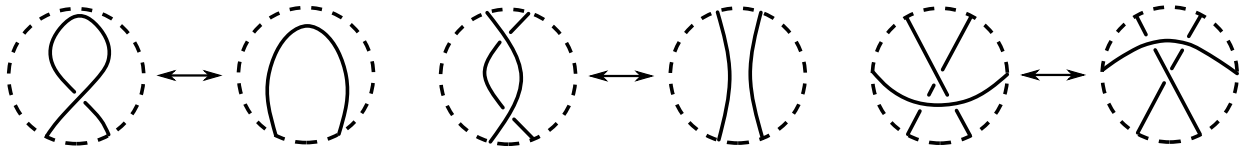


Рис. 8.1. Движения Райдемайстера

Теорема 8.1 (Райдемайстер; [PS96, §1.7]). *Два зацепления изотопны тогда и только тогда, когда некоторая плоская диаграмма первого зацепления может быть получена из некоторой плоской диаграммы второго зацепления с помощью движений Райдемайстера и плоской изотопии.*

Задача 8.2. Для первой пары узлов на рисунке 5.1 разложите вашу изотопию между ними на движения Райдемайстера, показанные на рисунке 8.1, и плоскую изотопию.

Лемма 8.3. (a) Коэффициент зацепления по модулю 2

(b) Коэффициент зацепления

сохраняется при движениях Райдемайстера.

Эта лемма легко доказывается отдельно для каждого движения Райдемайстера. Для п. (b) проверьте, что знаки всех перекрестков не меняются.

Подробнее см., например, [Sk20u, §§1-3].

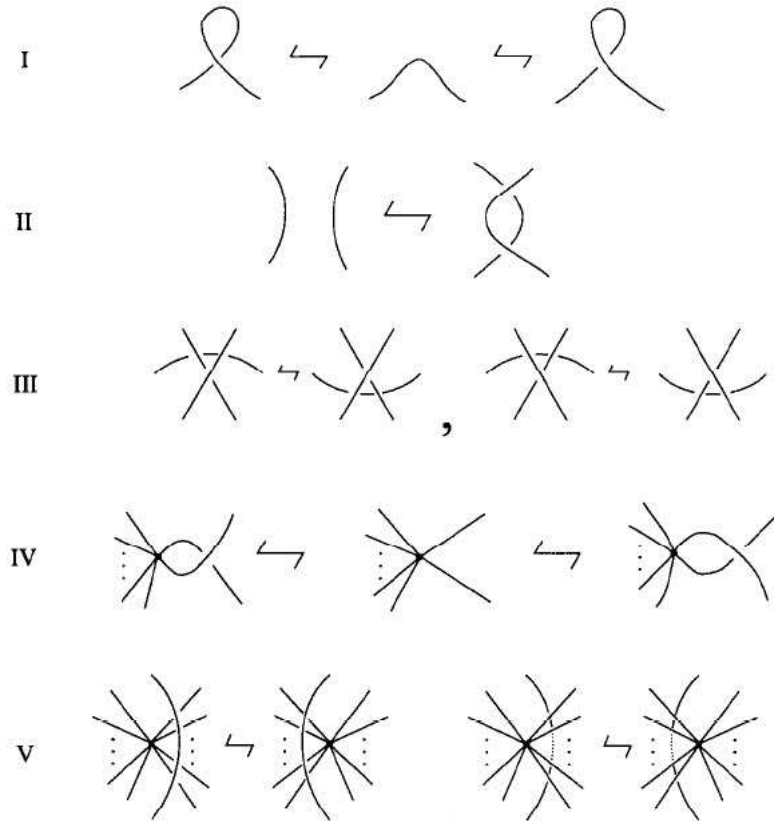


Рис. 8.2. Преобразования Райдемайстера для плоских диаграмм графов

Аналогично теореме 8.1, два вложения графа в $\mathbb{R}^3$ изотопны тогда и только тогда, когда некоторая плоская диаграмма первого вложения (см. замечание 4.2) может быть получена

из некоторой плоской диаграммы второго вложения с помощью движений Райдемайстера для плоских диаграмм графов (рисунок 8.2) и плоской изотопии. Понятие плоской диаграммы графа определено в [AKS, §8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [AKS] *E. Alkin, Yu. Khromin, A. Skopenkov*, Linking invariants of spatial graphs, English version of this text.
- [AS] *E. Alkin, A. Skopenkov*, A multiple version of the Conway-Gordon-Sachs theorem, draft.
- [AT21] *G. Avramidi, T. Tam Nguyen Phan*, Fungible obstructions to embedding 2-complexes, arXiv:2105.10984.
- [FD05] *T. Fleming, A. Diesl*, Intrinsically linked graphs and even linking number, *Algebr. Geom. Topol.*, 5 (2005), 1419–1432.
- [HC19] * *C. Herbert Clemens*. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.
- [KS20] *R. Karasev and A. Skopenkov*. Some ‘converses’ to intrinsic linking theorems, *Discr. Comp. Geom.*, 70:3 (2023), 921–930, arXiv:2008.02523.
- [Mi] *A. Mizev*, Realization of sets of integers by linking numbers of embeddings of K_6 in 3-space, draft
- [MM01] *B. Mellor and P. Melvin*. A geometric interpretation of Milnor’s triple linking numbers, *Algebr. Geom. Topol.*, 3 (2003), 557–568, arXiv:math/0110001.
- [Na20] * *R. Naimi*, A brief survey on intrinsically knotted and linked graphs, arXiv:2006.07342.
- [Ne91] *S. Negami*. Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324 (1991), 527–541.
- [Ni00] *R. Nikkuni*. The second skew-symmetric cohomology group and spatial embeddings of graphs, *J. Knot Theory Ram.* 9 (2000), 387–411.
- [Pr95] * *B. B. Прасолов*. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.
- [PS96] * *V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky* Knots, Links, Braids, and 3-manifolds. Amer. Math. Soc. Publ., Providence, R.I., 1996.
- [PS05] * *V. V. Prasolov and M.B. Skopenkov*. Ramsey link theory, *Mat. Prosvescheniye*, 9 (2005), 108–115.
- [RN11] * *R. L. Ricca, B. Nipoti*. Gauss’ linking number revisited. *J. of Knot Theory and Its Ramif.* 20:10 (2011) 1325–1343. <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/ricca.pdf>.
- [Si86] *J. Simon*. Topological chirality of certain molecules, *Topology*, 25 (1986), 229–235.
- [Sk] * *A. Skopenkov*. Algebraic Topology From Algorithmic Standpoint, draft of a book, mostly in Russian, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>.
- [Sk’] * *A. Skopenkov*. Knotting of graphs in 3-space, and configuration spaces, <https://old.mccme.ru/circles/oim/knogramodkno.pdf>.
- [Sk16] * *A. Skopenkov*, A user’s guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141v5. Abridged earlier published version: *Russian Math. Surveys*, 73:2 (2018), 323–353.
- [Sk18] * *A. Skopenkov*. Invariants of graph drawings in the plane. *Arnold Math. J.*, 6 (2020) 21–55; full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk20u] * *A. Skopenkov*. A user’s guide to basic knot and link theory, in: *Topology, Geometry, and Dynamics, Contemporary Mathematics*, vol. 772, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2021, pp. 281–309. Russian version: *Mat. Prosveschenie* 27 (2021), 128–165. arXiv:2001.01472.
- [Sk24] * *A. Скопенков*. Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве. *Мат. просвещение*, 33 (2024), 87–132.
- [ST03] *R. Shinjo, K. Taniyama*, Homology classification of spatial graphs by linking numbers and Simon invariants, *Topol. Appl.* 134 (2003), 53–67.
- [Ta95] *K. Taniyama*, Homology classification of spatial embeddings of a graph, *Topol. Appl.* 65 (1995) 205–228.
- [Zi10] * *D. Živaljević*, Borromean and Brunnian Rings, <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/borromean.html>.
- [ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. Обновляемая версия части книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>.
- [ZS25] А.А. Заславский и А.Б. Скопенков, Исследовательские задачи и Московская математическая конференция школьников, arXiv:2512.22191.

В этом списке звездочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.