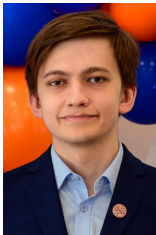


Инварианты зацепленности пространственных графов



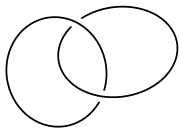
Эмиль
Алкин



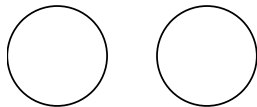
Аркадий
Скопенков



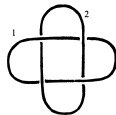
Юрий
Хромин



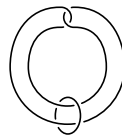
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис.: Зацепление Хопфа (a), тривиальное зацепление (b) и еще два зацепления (c, d)

Можно представить себе *узел* как тонкую упругую нить, концы которой склеены.

Строго говоря, *узел* — это пространственная замкнутая несамопересекающаяся ломаная.

Зацепление (см. рисунок) — это упорядоченный набор попарно непересекающихся узлов, которые называются *компонентами* зацепления.

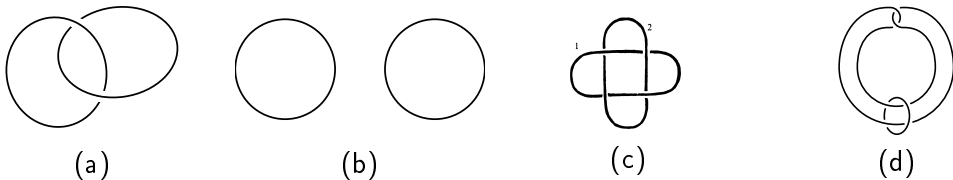


Рис.: Зацепление Хопфа (a), тривиальное зацепление (b) и еще два зацепления (c, d)

Зацепления обычно изображаются с помощью их «удачных» проекций на плоскость, называемых *плоскими диаграммами* (под проекцией мы понимаем тень). Представьте, что вы кладете веревку на стол и аккуратно записываете, как она пересекает саму себя (т.е. какая часть лежит сверху, а какая снизу).

Плоская диаграмма зацепления — это его проекция *общего положения* на плоскость, вместе с указанием в каждом перекрестке, какой отрезок «проходит снизу», а какой «проходит сверху» (рисунок).

Строго говоря, набор замкнутых ломаных на плоскости называется набором *общего положения*, если

- (i) их вершины попарно различны,
- (ii) любые два отрезка ломаных либо не пересекаются, либо пересекаются в общей концевой точке, либо пересекаются в общей внутренней точке, и
- (iii) никакие три внутренности этих отрезков не имеют общей точки.

Общие внутренние точки, такие как указано в (ii), называются **перекрестками**.

Каждая из замкнутых ломаных называется **компонентой** плоской диаграммы.

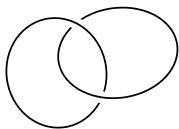
Отрезок ломаной, проходящий снизу, называется **проходом**, а проходящий сверху называется **переходом**.

Понятие *коэффициента зацепления* двух замкнутых пространственных кривых было введено К. Гауссом в его исследованиях по электромагнетизму.

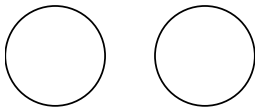
Неформально говоря, коэффициент зацепления — это число оборотов, которое одна кривая делает вокруг другой.

Не совсем ясно, как определить это число (даже неформально) для сложных пар кривых. Мы дадим строгое определение на языке плоских диаграмм.

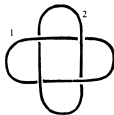
Коэффициент зацепления по модулю 2, $lk_2 \in \mathbb{Z}_2$, двухкомпонентной плоской диаграммы — это взятое по модулю 2 число перекрестков, в которых первая компонента проходит сверху.



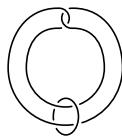
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис.: Зацепление Хопфа (a), тривиальное зацепление (b) и еще два зацепления (c, d)

Задача

Для выбранного вами порядка компонент найдите коэффициенты зацепления по модулю 2 плоских диаграмм на рисунке.

Утверждение

Перестановка компонент сохраняет коэффициент зацепления по модулю 2.

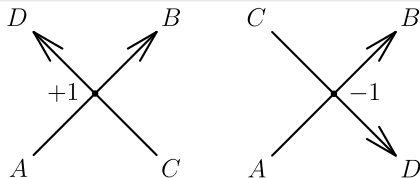


Рис.: Знак пары пересекающихся отрезков

Пусть $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ — упорядоченная пара пересекающихся векторов (ориентированных отрезков) на плоскости. Определим **знак** пары как $+1$, если ABC ориентирован по часовой стрелке, и -1 в противном случае (рисунок).

Коэффициент зацепления lk двухкомпонентной ориентированной плоской диаграммы — это сумма знаков во всех тех перекрестках, где первая компонента проходит над второй. Здесь в каждом перекрестке *первый* (*второй*) вектор — это ориентированное ребро первой (*второй*) компоненты.

Задача

Для любого целого n существует ориентированная двухкомпонентная плоская диаграмма, коэффициент зацепления которой равен n .

Задача

Для любой тройки целых чисел k, l, m существует ориентированная трехкомпонентная плоская диаграмма, попарные коэффициенты зацепления которой равны k, l, m .

Утверждение

- (а) Изменение ориентации любой из компонент меняет знак коэффициента зацепления.
- (б) Перестановка компонент сохраняет (а не меняет знак!) коэффициент зацепления.

Вложение $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ графа K в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ — это изображение без самопересечений графа K (см. рисунок). Мы рассматриваем такие вложения графов, для которых ребра изображаются ломаными.

Вам не нужно знать строгое определение вложений для решения задач, поскольку все результаты могут быть переформулированы и доказаны в терминах **плоских диаграмм**.

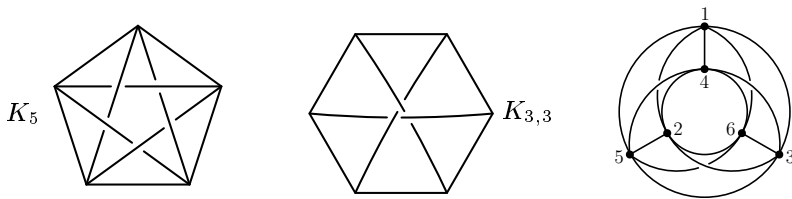


Рис.: Вложения графов в $\mathbb{R}^3$

Теорема (Конвей–Гордон–Закс)

Для любого вложения $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ сумма коэффициентов зацепления по всем неупорядоченным парам непересекающихся циклов длины 3 в K_6 нечетна.

Этот результат не является частью данного проекта, но лишь служит мотивацией для других теорем и утверждений проекта.

Переформулировка теоремы Конвея–Гордона–Закса

Для любой плоской диаграммы графа K_6 сумма коэффициентов зацепления по всем неупорядоченным парам непересекающихся циклов длины 3 в K_6 нечетна.

Аналогично переформулируются все те результаты проекта, которые сформулированы в терминах вложений графов.

Теорема

Для любого графа K существует вложение $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что коэффициент зацепления любых двух непересекающихся циклов длины 3 делится на 3.

Эта теорема доказана Рё Никкуни в 2026 году.

В теореме (и, предположительно, в гипотезе) $\text{mod } 3$ можно заменить на $\text{mod } m$ для любого нечетного m . Но не на $\text{mod } 2$ (из-за теоремы Конвея–Гордона–Закса).

Следующая гипотеза не является частью этого проекта, но служит лишь мотивацией для теоремы.

Гипотеза

Пусть $K_{11} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — вложение такое, что коэффициент зацепления любых двух непересекающихся циклов длины 3 делится на 3. Тогда существует «борромеева по модулю 3» тройка попарно непересекающихся циклов длины 3 в K_{11} , т.е. тройка, у которой тройной коэффициент зацепления по модулю 3 не равен нулю.

Любые два из колец Борромео не зацеплены, но все три вместе зацеплены (т.е. их нельзя переместить в три попарно непересекающихся шара)

Целочисленный **тройной коэффициент зацепления** определен для ориентированного трехкомпонентного зацепления, все попарные коэффициенты зацепления которого равны нулю.

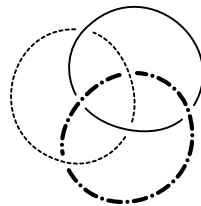


Рис.: Кольца Борромео

Аналогично определяется **тройной коэффициент зацепления по модулю m** для ориентированного трехкомпонентного зацепления, все попарные коэффициенты зацепления которого делятся на m .

Гипотеза (напоминание)

Пусть $K_{11} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — вложение такое, что коэффициент зацепления любых двух непересекающихся циклов длины 3 делится на 3. Тогда существует «борромеева по модулю 3» тройка попарно непересекающихся циклов длины 3 в K_{11} , т.е. тройка, у которой тройной коэффициент зацепления по модулю 3 не равен нулю.

Таким образом, для содержательности гипотезы необходима теорема.

Теорема (напоминание)

Для любого графа K существует вложение $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что коэффициент зацепления любых двух непересекающихся циклов длины 3 делится на 3.

Задача

Для любого целого k существует вложение $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что коэффициент зацепления

- одной (неупорядоченной) пары непересекающихся циклов длины 3 равен $2k + 1$, а*
- любой другой пары непересекающихся циклов длины 3 равен нулю.*

Этот элементарный результат возник в недавних исследованиях Р. Карасева и А. Скопенкова (2020 год), Г. Аврамиди и Т. Т. Нгуен-Фана (2021 год), хотя мог быть известен ранее.

Теорема (А. Мизёв, 2026)

Возьмем любые 10 целых чисел $n_{123,456}, n_{124,356}, \dots$, соответствующих 10 неупорядоченным разбиениям множества $[6]$ на два 3-элементных подмножества. Если сумма этих чисел нечетна, то существует вложение $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что коэффициент зацепления каждой пары $\{ijk, pqr\}$ непересекающихся циклов длины 3 равно $n_{ijk,pqr}$. Здесь мы считаем, что $i < j < k$ и $p < q < r$, и берем ориентации (ijk) и (pqr) на циклах.

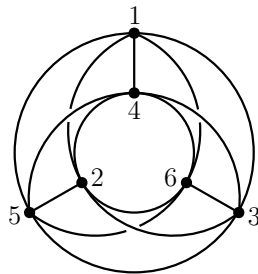
Задача (нерешенная)

Для каждого n найдите множества целых чисел, реализуемые в качестве наборов коэффициентов зацепления вложения $K_n \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Общие подсказки. Описывайте сложные конструкции с помощью простых модификаций простых конструкций! Большая часть представленных геометрических задач сводится к чисто алгебраическим задачам.

Переформулируем теорему.

Обозначим через X множество неупорядоченных разбиений множества $[6]$ на два 3-элементных подмножества. **Функция зацепленности** $l_f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ вложения $f : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ сопоставляет каждому разбиению $x = \{\{i, j, k\}, \{p, q, r\}\} \in X$, где $i < j < k$ и $p < q < r$, коэффициент зацепления $f(ijk)$ и $f(pqr)$.



Например, функция зацепленности для вложения с рисунка принимает значение $+1$ для разбиения $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$, и значение 0 — для остальных.

Другая форма теоремы

Для любой функции $\varphi : X \rightarrow \mathbb{Z}$ с нечетной суммой значений существует вложение f с $l_f = \varphi$.

Под *изотопией* зацепления мы понимаем его непрерывную деформацию в пространстве как набора тонких упругих нитей; на протяжении всей деформации не допускаются самопересечения (ни одной нити с собой, ни разных нитей).



Рис.: Узлы, изотопные трилистнику

Задача

Докажите, что все узлы на рисунке изотопны друг другу.

Пожалуйста, докажите это утверждение на интуитивном уровне.

Теорема

- (a) Существуют неизотопные вложения $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^3$, сужения которых на любой простой цикл в K_5 изотопны.
- (b) (киральность, Саймон 1986) Никакое вложение $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ не изотопно своему зеркальному образу.
- (a', b') То же для $K_{3,3}$ вместо K_5 .

Теорема (Танияма-Никкуни-Шиндзе, 1994-2003)

Два вложения графа (не обязательно связного) в пространство гомотопичны тогда и только тогда, когда гомотопичны их сужения на любой подграф, гомеоморфный K_5 , $K_{3,3}$ или $K_3 \sqcup K_3$.

Гомотопичность определена в полном тексте проекта.

Вместо зацеплений с точностью до изотопии мы изучаем плоские диаграммы с точностью до эквивалентности, порожденной **движениями Райдемайстера** (рисунок) и *плоской изотопией*.

Под *плоской изотопией* плоской диаграммы мы понимаем ее непрерывную деформацию на плоскости без появления самопересечений.

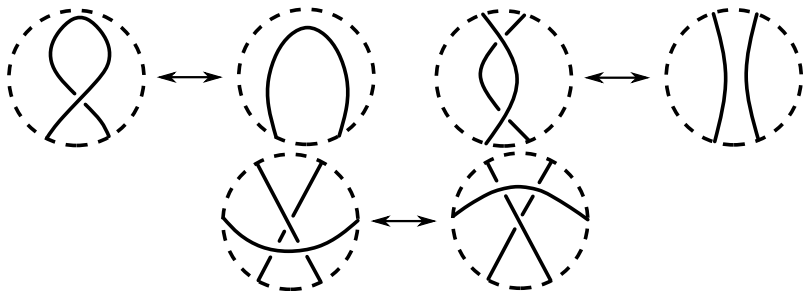


Рис.: Движения Райдемайстера

Теорема (Райдемайстер)

Два зацепления изотопны тогда и только тогда, когда некоторая плоская диаграмма первого зацепления может быть получена из некоторой плоской диаграммы второго зацепления с помощью движений Райдемайстера и плоской изотопии.

Лемма

Коэффициент зацепления сохраняется при движениях Райдемайстера.

По желанию можете сдавать **программистские задачи**, например, программы вычисления инвариантов.

Приходите на встречи в 13.40 на 3м этаже корпуса, в котором столовая. А также консультироваться и сдавать задачи в корпус 9, комната 4.

Спасибо за внимание!