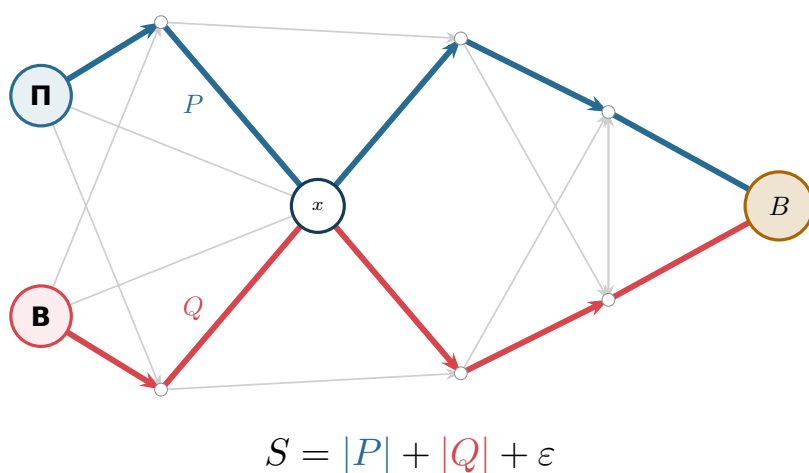


ЛКТГ: игры на меняющихся графах

Решения и открытые пункты

Пять пунктов со звёздочкой оставлены без решения



Составлено по канонической версии проекта 21 и двум дополнениям.

Все используемые леммы доказаны в тексте; ссылки ведут только на более ранние пункты сборника. Схемы набраны кодом TikZ; возле задачи 66 помещён кадр пошаговой демонстрации стратегии.

11 августа 2026 года

Как читать этот сборник

Здесь важна не только правильность ответа, но и сама игровая идея: парная стратегия, инвариант, вес или симметрия. Поэтому длинные доказательства разбиты на короткие леммы, а в трудных местах отдельно объясняется, зачем делается очередной ход.

Пункты 11ж, 11з, 13г, 14е и задача 27 отмечены звёздочкой и сознательно оставлены без решения; их полные условия сохранены в тексте. Остальные пункты доказаны без обращения к внешним теоремам как к «чёрным ящикам».

Нумерация. Задачи 1–17 соответствуют канонической версии 21, задачи 18–27 — дополнению 1, версии 6. Задачи отдельного листка от 8 августа «Камень, ножницы, бумага» и «Две лиги» получили номера 28 и 29. Таким образом, номера 25–27 здесь всегда относятся к весовой линии игры Эрдёша.

Обозначения и термины. Если явно не сказано обратное, все графы конечны и просты. Через $\omega(G)$ и $\alpha(G)$ обозначаются соответственно размер наибольшей клики и размер наибольшего независимого множества графа G . Через $d_G(v)$ обозначается степень вершины, через $\delta(G)$ — минимальная степень, а через $e_G(U)$ — число рёбер с обоими концами в U . Запись K_n означает полный граф на n вершинах. Логарифм без указанного основания — натуральный.

Основные зависимости односторонние: задача $7а \rightarrow 7б \rightarrow 8а$, а $8б$ доказан независимо; задача $9а$ независима, леммы после неё $\rightarrow 9б$, $9в \rightarrow 9г-9е$; в каждой из весовых лемм I–III сначала разобран случай $1 : 1$, затем общий случай; эти леммы применяются в задачах 18–26. Так круговых ссылок не возникает.

Содержание

Как читать этот сборник	i
A. Непосещённые вершины и новые рёбра	1
1. Игра без возвратов	1
2. Монеты на графе	2
3. Добавление рёбер до первого нечётного цикла	5
4. Добавление рёбер до связности	6
B. Динамические ориентации	8
5. Фишка и развороты рёбер	8
6. Две фишки и развороты стрелок	8
7. 2-вырожденные графы	10
8. Квадратные решётки	11
9. Игра Боллобаша–Сабо	12
C. Раскраска рёбер и кликовые игры	17
10. Первый одноцветный треугольник	17
11. Симметричная игра Эрдёша	17
12. Смещённая игра $1 : 2$	20
13. Белла и Чингиз на K_n	21
14. Белая клика на бесконечной доске	24
15. Связь игр $1 : 2$ и $1 : 1$	30
D. Графы для игр	31
16. Двусвязная доска для Красного	31
17. Фирмы и гении	32
E. Весовые стратегии с одной целью	35
18. Белые клики	35
19. Белые гамильтоновы циклы	36
20. Семейство белых целей	36
21. Чёрная степень каждой вершины	37
22. Плотность внутри больших множеств	37
23. Плотность между большими множествами	38
F. Весовые стратегии с двумя целями	39
24. Белая клика и чёрные степени	39
25. Две оценки в игре Эрдёша	40
26. Игра $p : q$ и золотое сечение	42
27*. Точная гипотеза Эрдёша	44
Дополнение 2: динамика и турниры	45
28. Камень, ножницы, бумага на графе	45
29. Две лиги	46

А. Непосещённые вершины и новые рёбра

Ниже всюду графы конечны и просты. Стратегия называется выигрышной и в том случае, когда она гарантирует ничью в задаче о монетах: там требуется именно «не проиграть».

1. Игра без возвратов

а) Критерий — совершенное паросочетание

Ответ. Вася выигрывает ровно на графах с совершенным паросочетанием.

Пусть в графе есть совершенное паросочетание M . После выбора Пети Вася идёт из стартовой вершины s в её пару по M . В дальнейшем, если Петя пришёл в вершину v , Вася идёт из v в парную ей вершину $M(v)$. Этот ход всегда допустим: ранее посещённые вершины разбиваются на целиком посещённые пары из M , поэтому вместе с $M(v)$ была бы уже посещена и v . Получилось противоречие. Значит, после каждого хода Пети ответ Васи существует. Игра конечна, поэтому первым без хода останется Петя.

Теперь пусть совершенного паросочетания нет. Возьмём паросочетание M с наибольшим числом рёбер и выберем стартом непокрытую им вершину s . Петя будет отвечать на приход Васи в вершину v ходом $vM(v)$.

Проверим, что ответ всегда возможен. Пройденный путь начинается в непокрытой вершине s ; ходы Пети идут по рёбрам M , а ходы Васи — не по M (парное ребро ведёт назад, в уже посещённую вершину). Если бы и v не была покрыта M , то на всём пути рёбра чередовались бы: не из M , из M , не из M , из M , ... Удалив из M рёбра пути, принадлежащие M , и добавив остальные рёбра пути, мы увеличили бы паросочетание на одно ребро. Это невозможно. Значит, $M(v)$ существует. Она ещё не посещена: если бы $M(v)$ встретила раньше, то сразу после её первого посещения была бы посещена и v . Итак, Петя всегда отвечает, а первым застревает Вася.

При нечётном числе вершин совершенного паросочетания быть не может, поэтому Петя выигрывает.

б) По одному пропуску

Ответ не меняется. Игрок, у которого была стратегия из пункта 1а, играет по ней, пока соперник не пропустит ход. На этот пропуск он немедленно отвечает своим пропуском. Положение фишки и множество посещённых вершин не изменились, а ход снова принадлежит тому же игроку, что и до двух пропусков; далее можно продолжать прежнюю стратегию. Если соперник пропустил именно потому, что ходить некуда, после ответного пропуска он снова получает то же безвыходное положение, но второго пропуска у него уже нет.

в) Две фишки

Для каждого чётного $n \geq 4$ подойдёт путь

$$v_1 v_2 \dots v_n.$$

У него есть совершенное паросочетание $v_1 v_2, v_3 v_4, \dots, v_{n-1} v_n$.

- Если Петя ставит фишки в v_1 и v_n , все $n-2$ остальных вершин будут по одной съедены ходами с двух концов. Число ходов чётно, последним ходит Петя, и затем Вася остаётся без хода. Значит, выигрывает Петя.
- Если Петя ставит фишки в v_1 и v_{n-1} , Вася первым ходом переводит вторую фишку в v_{n-2} . Вершина v_n теперь навсегда отрезана посещённой вершиной v_{n-1} . После этого доступные вершины $v_2, \dots, v_{n-3}$ неизбежно разбираются с двух концов. Вместе с первым ходом получается $1 + (n-4) = n-3$ ходов — нечётное число. Последний ход делает Вася, значит, он и выигрывает.

Это рассуждение работает и при $n = 4$: во втором случае после единственного хода Васи ходов уже нет.

г) По меньшей мере два старта Пети

Возьмём максимальное паросочетание M и непокрытую им вершину s . Она не изолирована, поэтому у неё есть сосед v . Вершина v покрыта некоторым ребром $vw \in M$, иначе к M можно было бы просто добавить sv . Заменим в M ребро vw на sv . Получится другое максимальное паросочетание, в котором не покрыта вершина w .

Вершины s и w различны. Из доказательства пункта 1а следует: стартуя из любой вершины, непокрытой некоторым максимальным паросочетанием, Петя выигрывает. Поэтому подходят по меньшей мере два старта — s и w .

2. Монеты на графе

Вес вершины v , то есть число монет в ней, обозначим через $w(v)$.

а) Путь

Пусть вершины пути идут в порядке $v_1, \dots, v_n$, а $a_i = w(v_i)$. Положим

$$S_0 = 0, \quad S_r = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{r-1} a_r.$$

Если $S_n \geq 0$, Петя начинает в v_1 . Дальше путь единственен, и разность «монеты Пети минус монеты Васи» равна $S_n \geq 0$.

Пусть теперь $S_n < 0$, и r — наименьший индекс, для которого $S_r < 0$. Тогда $S_{r-1} \geq 0$, а r чётно: на нечётном шаге к предыдущей сумме прибавляется неотрицательное число, и впервые стать отрицательной она не может. Петя начинает в v_r . После первого хода Васи фишка уже не сможет перейти через посещённую v_r , так что она пойдёт до одного из концов пути.

Если Вася пошёл влево, итоговая разность равна

$$a_r - a_{r-1} + \dots - a_1 = -S_r > 0.$$

Если он пошёл вправо, разность равна

$$a_r - a_{r+1} + a_{r+2} - \dots = S_{r-1} - S_n > 0.$$

(Если соответствующего направления нет, рассматривать его не нужно.) Таким образом, Петя всегда может не проиграть.

б) Произвольное дерево

Идея. Сначала вычислим цену игры в каждой ветви дерева, а затем докажем, что хотя бы одна стартовая вершина имеет неотрицательную цену. Только второй шаг требует отдельного аргумента.

Нам понадобится конечная рекурсия, в которой уже защита оптимальная игра обоих игроков. Для соседних вершин x, y удалим ребро xy и рассмотрим компоненту с x . Обозначим через $m(x | y)$ наилучшую итоговую разность

монеты игрока, только что взявшего x — монеты его соперника,

когда y уже недоступна, а следующим ходит соперник. В дереве все ранее посещённые вершины отделены от x ребром xy , поэтому дальнейшая позиция действительно определяется только состоянием $x | y$. Тогда

$$m(x | y) = w(x) - \max_{\substack{z \sim x \\ z \neq y}} m(z | x), \quad (1)$$

где максимум по пустому множеству равен 0. Действительно, соперник выбирает ветвь z , в которой его собственный перевес равен $m(z | x)$, поэтому для первого игрока этот перевес вычитается. Формула вычисляется от листьев к центру соответствующей компоненты и потому одновременно даёт стратегии обоих игроков.

Если Петя начинает в v , его гарантированная разность равна

$$w(v) - \max_{u \sim v} m(u | v). \quad (2)$$

Назовём v хорошей, если выражение (2) неотрицательно. Докажем, что хорошая вершина существует.

Предположим противное. Тогда у каждой вершины v есть сосед u , для которого

$$m(u | v) > w(v). \quad (3)$$

Будем говорить, что u угрожает v . Важное наблюдение: если u угрожает v , то v — единственная вершина, угрожающая u . В самом деле, из (1) и (3) следует

$$\max_{x \sim u, x \neq v} m(x | u) < w(u).$$

Но u тоже не хороша, поэтому кто-то ей угрожает; этим соседом может быть только v . Применяя то же рассуждение в обратную сторону, видим также, что никакой другой сосед не угрожает v .

Итак, вершины дерева разбились на соседние пары; обозначим пару вершины v через v^* . Положим

$$d_v = m(v^* | v) - w(v) > 0. \quad (4)$$

Ребро vv^* назовём парным, остальные рёбра — поперечными. Если uv поперечное, то при вычислении $m(u | v)$ среди разрешённых продолжений из u остаётся его единственная угрожающая вершина u^* . Поэтому

$$m(u | v) = w(u) - m(u^* | u) = -d_u. \quad (5)$$

Для каждой вершины v определим

$$h_v = \begin{cases} 0, & \text{если у } v \text{ нет поперечных рёбер,} \\ \min\{d_u : uv \text{ — поперечное ребро}\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Подставляя (5) в (1) для парного ребра vv^* , получаем

$$m(v | v^*) = w(v) + h_v.$$

Запишем эту формулу для обоих концов пары и воспользуемся (4):

$$d_v + d_{v^*} = h_v + h_{v^*}. \quad (6)$$

Положим $\varepsilon_v = d_v - h_v$. Из (6) $\varepsilon_{v^*} = -\varepsilon_v$.

Теперь начинается конечный «спуск», в котором ничего нельзя потерять. Возьмём лист a исходного дерева. Его единственное ребро парное, поэтому $h_a = 0$ и $\varepsilon_a = d_a > 0$. У вершины a^* , напротив, $\varepsilon_{a^*} < 0$, то есть $h_{a^*} > d_{a^*}$. Следовательно, у a^* есть поперечный сосед b , на котором достигается минимум:

$$d_b = h_{a^*} > d_{a^*}.$$

Так как a^*b — поперечное ребро, $h_b \leq d_{a^*} < d_b$, то есть $\varepsilon_b > 0$. Переходим по парному ребру к b^* ; там $\varepsilon_{b^*} < 0$, и тем же способом находим поперечного соседа c с $\varepsilon_c > 0$. Продолжая, строим ход

$$a \xleftrightarrow{\text{парное}} a^* \xleftrightarrow{\text{поперечное}} b \xleftrightarrow{\text{парное}} b^* \xleftrightarrow{\text{поперечное}} c \dots$$

Соседние рёбра здесь попеременно парные и поперечные, поэтому немедленно назад мы не возвращаемся. В дереве такой маршрут не может второй раз попасть в уже посещённую вершину: иначе между двумя её появлениями получился бы цикл. Следовательно, мы построили бесконечно много различных вершин конечного дерева — противоречие.

Значит, хорошая вершина v существует. Петя выбирает её, а стратегию после каждого ответа Васи берёт из рекурсии (1). По (2) он получает не меньше монет, чем Вася.

в) Цикл

Пусть веса по кругу равны $a_1, \dots, a_n$.

Если n чётно, разобьём вершины на два чередующихся класса. Петя выбирает вершину того класса, в котором суммарно не меньше монет. В какую бы сторону ни пошёл Вася, дальше весь цикл проходится в выбранном направлении, а Петя получает ровно свой класс. Поэтому он не проигрывает.

Пусть n нечётно. Индексы далее считаются по модулю n , а

$$D_i = a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - \dots + a_{i+n-1}$$

— разность счёта, если стартовать в i -й вершине и затем идти по часовой стрелке. При движении против часовой стрелки получится D_{i+1} . Так как n нечётно,

$$D_i + D_{i+1} = 2a_i \geq 0. \quad (7)$$

Значит, два соседних числа D_i, D_{i+1} не могут быть одновременно отрицательными. Более того, где-то два соседних числа одновременно неотрицательны: иначе по нечётному циклу знаки «отрицательно» и «неотрицательно» должны были бы строго чередоваться, что невозможно. Петя начинает в соответствующей вершине i . Оба возможных направления Васи дают ему неотрицательную разность.

г) Для общего связного графа утверждение неверно

Ответ: нет. Дадим симметричный контрпример на семи вершинах.

- Вершина z имеет вес 2.
- Вершины x_1, x_2, x_3 имеют вес 1.
- Вершины y_1, y_2, y_3 имеют вес 0.
- z соединена со всеми x_i .
- x_i соединена с y_j тогда и только тогда, когда $i \neq j$.
- Вершины y_1, y_2, y_3 образуют треугольник.

Покажем стратегию Васи. В каждом случае $i, j, k = 1, 2, 3$.

1. **Петя начал в z .** Вася идёт в любое x_i . Петя вынужден выбрать y_j , где $j \neq i$. Вася идёт в x_k ; затем Петя вынужден пойти в y_i , а Вася — в x_j :

$$z, x_i, y_j, x_k, y_i, x_j.$$

2. **Петя начал в x_i .** Вася идёт в z . После хода Пети в x_j Вася идёт в y_k . Какую бы из вершин y_i, y_j ни выбрал Петя, Вася заканчивает ходом в x_k :

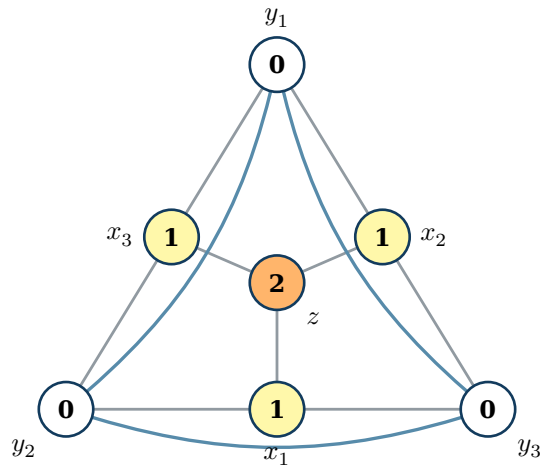
$$x_i, z, x_j, y_k, \{y_i \text{ или } y_j\}, x_k.$$

3. **Петя начал в y_i .** Вася идёт в любое соседнее x_j , $j \neq i$, и обозначает третий индекс через k . У Пети два типа ответа.

- Если Петя идёт в z , Вася идёт в x_k , после чего ходы вынуждены: y_j, x_i .
- Если Петя идёт в y_k , Вася идёт в x_i . Теперь Петя может пойти лишь в z или y_j ; в обоих случаях Вася идёт в x_k .

Во всех ветвях Вася набирает 3 монеты. В первом и третьем случаях он забирает все три вершины x_1, x_2, x_3 , а во втором — вершины z и x_k . Петя уже взял или впоследствии сможет взять положительные вершины суммарного веса не более 2, поэтому сравнять счёт он не сможет.

На рисунке числа внутри вершин — количества монет. Внешние дуги образуют треугольник $y_1 y_2 y_3$; благодаря им он не сливается с шестью прямыми рёбрами $x_i y_j$, где $i \neq j$.



3. Добавление рёбер до первого нечётного цикла

Сначала зафиксируем простой факт. Граф без нечётных циклов можно раскрасить в два цвета так, чтобы концы каждого ребра имели разные цвета. В каждой компоненте выберем корень и дерево кратчайших путей от него; цвет вершины зададим чётностью её расстояния до корня. Если ребро uv соединяет одинаковые цвета, путь от u до v по выбранному дереву имеет чётную длину (общая начальная часть двух путей к корню вычитается дважды). Вместе с ребром uv он образует нечётный цикл. Обратно, в двухцветном графе цвета вдоль цикла чередуются, поэтому длина любого цикла чётна.

Следовательно, максимальный граф, в котором ещё нет нечётного цикла, имеет вид $K_{a,b}$. Действительно, разные компоненты всегда можно безопасно соединить, перед этим при необходимости поменяв цвета в одной из них; а в связном двухцветном графе можно безопасно добавить любое недостающее ребро между двумя цветовыми классами. В $K_{a,b}$, напротив, каждое оставшееся ребро лежит внутри одного класса и сразу создаёт треугольник. Число безопасно добавленных рёбер в конце равно ab .

а) Нечётное n

Если $a + b = n$ нечётно, то ab чётно. Вася всегда делает безопасный ход, пока он существует. Перед каждым ходом Васи уже добавлено нечётное число рёбер, поэтому текущий граф ещё не может быть конечным $K_{a,b}$, в котором рёбер чётное число. Значит, безопасный ответ у Васи есть всегда. Игра конечна, так что первым нечётный цикл будет вынужден создать Петя.

При каждом нечётном n выигрывает Вася.

б) Чётное n

Ответ. Петя выигрывает при $n \equiv 2 \pmod{4}$, а Вася — при $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Назовём безопасный граф **хорошим**, если все его неизоллированные вершины покрываются некоторым паросочетанием. Нужна следующая стратегия ответа.

Пусть перед ходом соперника граф хорош, а изолированные вершины ещё есть (их число чётно). После безопасного хода соперника отвечающий восстанавливает хороший граф:

1. Если соединены две уже неизоллированные вершины, он соединяет две изолированные и добавляет это новое ребро к паросочетанию.
2. Если соединены две изолированные вершины x, y , они уже покрыты ребром xy . Если старые неизоллированные вершины есть, отвечающий соединяет x с любой из них; это просто соединение двух компонент, а паросочетание остаётся прежним вместе с xy . Если это самый первый ответ в пустом графе, он соединяет ещё две изолированные вершины.
3. Если соединены неизоллированная вершина и изолированная x , отвечающий берёт другую изолированную y и добавляет xy .

Все ответы безопасны: либо добавляется ребро внутри новой двухвершинной компоненты, либо соединяются разные компоненты, либо присоединяется новый лист. Нужные изолированные вершины существуют: пока они есть, их число перед ходом соперника чётно. После ответа хороший граф восстановлен.

Пусть $n = 4k + 2$. Петя первым добавляет любое ребро, а затем применяет описанную стратегию после каждого хода Васи, пока не исчезнут изолированные вершины. В этот момент в графе есть совершенное паросочетание; дальше Петя просто выбирает любой безопасный ход. Он не может первым остаться без такого хода. Иначе текущий граф был бы $K_{a,b}$. Совершенное паросочетание в нём возможно только при $a = b = n/2$, а тогда

$$ab = (n/2)^2 = (2k + 1)^2$$

нечётно. Но перед ходом Пети сделано чётное число ходов. Противоречие. Значит, проигрышный ход первым придётся сделать Васе.

Пусть $n = 4k$. После самого первого ребра Пети граф хорош; Вася соединяет ещё две изолированные вершины, а затем тем же способом поддерживает хороший граф. Когда изолированных вершин не останется, он выбирает произвольные безопасные ходы. Если бы первым без безопасного хода оказался Вася, конечный граф снова был бы $K_{n/2, n/2}$, но теперь

$$(n/2)^2 = (2k)^2$$

чётно, тогда как перед ходом Васи уже добавлено нечётное число рёбер. Это невозможно. Поэтому выигрывает Вася.

в) Запрет соединять две изолированные вершины

При каждом чётном n выигрывает Петя.

Первым ходом Петя добавляет ребро ab . Он поддерживает симметрию относительно **инволюции** σ , то есть перестановки с $\sigma^2 = \text{id}$: вершины a, b неподвижны, а все остальные разбиты на пары $x, \sigma(x)$. После каждого хода Пети текущий граф инвариантен при σ ; обе вершины каждой уже активной пары $x, \sigma(x)$ лежат в одном цветовом классе. Все неизолированные вершины образуют одну компоненту: после первого хода по условию нельзя начать новую компоненту из двух изолированных вершин.

Пусть Вася сделал безопасный ход.

- Если он присоединил изолированную вершину x ребром vx , Петя добавляет ребро $\sigma(v)\sigma(x)$. Вершина $\sigma(x)$ тоже была изолирована, поэтому ход разрешён и безопасен; симметрия восстановлена.
- Если Вася добавил ребро uv между активными вершинами, Петя добавляет $\sigma(u)\sigma(v)$. Это другое, ещё не добавленное ребро. Действительно, ребро, совпадающее со своим образом, было бы либо первым ребром ab , либо соединяло бы парные вершины $x, \sigma(x)$; последние находятся в одном цветовом классе, и такой ход Васи уже был бы проигрышным. Образ ребра безопасен, поскольку σ сохраняет оба цветовых класса.

Итак, после каждого безопасного хода Васи у Пети есть безопасный ответ. Пока остаётся изолированная вершина, её можно безопасно присоединить к активной компоненте, поэтому игра не может закончиться раньше, чем все вершины станут активными. Тогда в каждом цветовом классе будет одна из вершин a, b и некоторое число целых σ -пар. Поэтому размеры обоих классов нечётны. Конечный полный двудольный граф имеет нечётное число рёбер, то есть последний безопасный ход делает Петя; затем Вася вынужден создать нечётный цикл.

4. Добавление рёбер до связности

Ответ.

$n \pmod{4}$	победитель
0	Вася
1	Вася
2	Петя
3	Петя

Максимальный ещё несвязный граф состоит из двух полных компонент $K_a \sqcup K_b$, где $a + b = n$. В самом деле, при трёх компонентах можно безопасно соединить две из них, а при недостающем ребре внутри компоненты можно добавить его. Число сделанных безопасных ходов в таком положении равно

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} = \binom{n}{2} - ab. \quad (8)$$

Если n нечётно, числа a, b разной чётности, поэтому ab чётно и чётность (8) не зависит от разбиения. При $n \equiv 1 \pmod{4}$ число $\binom{n}{2}$ чётно. Вася всегда выбирает безопасный ход: перед его ходом добавлено нечётное число рёбер, поэтому конечное положение с чётным числом рёбер ещё не достигнуто. Значит, проиграет Петя. При $n \equiv 3 \pmod{4}$ число $\binom{n}{2}$ нечётно; тем же рассуждением уже Петя всегда имеет безопасный ход, и проигрывает Вася.

Осталось разобрать чётное n . В текущем несвязном графе обозначим через O число компонент нечётного порядка, а через R — суммарное число недостающих рёбер внутри компонент:

$$R = \sum_C \left(\binom{|C|}{2} - e(C) \right).$$

Число O чётно. Каждый безопасный ход имеет один из двух типов.

- **Тип I:** соединены две нечётные компоненты. Тогда O уменьшается на 2, а чётность R не меняется: при слиянии добавляется $|C||D| - 1$ новых недостающих внутренних рёбер, а это число чётно.
- **Тип II:** любой другой безопасный ход. Тогда O не меняется, а чётность R меняется. Для внутреннего ребра R уменьшается на 1; при слиянии, где хотя бы одна компонента чётна, число $|C||D| - 1$ нечётно.

Выбранный игрок будет после каждого своего хода поддерживать инвариант

$$O \equiv 0 \pmod{4}, \quad R \equiv 0 \pmod{2}. \quad (9)$$

Если соперник сделал ход типа I, число O стало равно $2 \pmod{4}$. Выбранный игрок соединяет ещё две нечётные компоненты. Такой ход безопасен: перед ходом соперника нечётных компонент было хотя бы четыре; после первого слияния остаётся созданная чётная компонента, так что второе слияние не может сделать весь граф связным. Если соперник сделал ход типа II, число R стало нечётным и потому положительным; выбранный игрок добавляет любое недостающее внутреннее ребро. Оба ответа восстанавливают (9) и безопасны.

При $n = 4k$ инвариант верен в пустом графе, и выбранным игроком является Вася: он начинает отвечать после первого хода Пети. При $n = 4k + 2$ Петя первым ходом соединяет две изолированные вершины; тогда O уменьшается с $4k + 2$ до $4k$, и (9) выполнен. После этого отвечает Петя. Выбранный игрок никогда не делает связный граф; поскольку игра конечна, проигрывает его соперник.

Схема ответов.

ход соперника	изменение $(O, R \bmod 2)$	ответ
две нечётные компоненты	$(-2, 0)$	соединить ещё две нечётные
любой другой безопасный	$(0, 1)$	добавить внутреннее ребро

В. Динамические ориентации

5. Фишка и развороты рёбер

а) Дерево

Выберем вершину r , её соседа s , направим все рёбра дерева к r и поставим фишку в s . Первым ходом Петя идёт $s \rightarrow r$.

После этого перед каждым разворотом Васи все рёбра дерева направлены к вершине, в которой стоит фишка. Вася разворачивает одно инцидентное ребро, скажем vi , и оно становится единственным исходящим ребром из v . Петя идёт по нему в i . Теперь уже все рёбра направлены к i : в дереве путь к новому корню отличается от пути к старому корню только направлением ребра vi . Инвариант восстановлен. Поэтому Петя может ходить бесконечно.

б) Граф с циклом

Докажем более сильное утверждение индукцией по числу вершин: если связный граф содержит цикл, то из любой ориентации и любого положения фишки в тот момент, когда Васе предстоит развернуть ребро, он за конечное время оставит фишку без исходящих рёбер.

База: граф является простым циклом. Если сейчас из вершины фишки выходит ровно одно ребро, Вася разворачивает его внутрь и сразу запирает фишку. Если исходящих рёбер ноль или два, Вася одним разворотом оставляет ровно одно; Петя вынужден пройти по нему. Обозначим этот первый ход через $A_1 \rightarrow A_2$. Теперь Вася смотрит на следующее ребро A_2A_3 в выбранном направлении обхода. Если оно выходит из A_2 , Вася разворачивает его внутрь, и оба ребра при A_2 становятся входящими. Если оно входит в A_2 , Вася разворачивает его наружу, и Петя вынужден перейти в A_3 . Вася повторяет это правило. Либо фишка остановится раньше, либо обойдёт весь цикл; тогда при возвращении в A_1 Вася разворачивает исходное ребро A_1A_2 внутрь и останавливает фишку.

Переход. Выберем цикл наименьшей длины C . У него нет хорды: хорда разделила бы его на два цикла, один из которых короче. Если граф не равен самому C , есть вершины вне C . Выберем среди них вершину x на наибольшем расстоянии от C . Граф $G - x$ связан и по-прежнему содержит C . Действительно, для любой $y \neq x$ кратчайший путь от y к C не может проходить через x , иначе расстояние от y до C было бы больше расстояния от x .

Внутри $G - x$ Вася применяет индукционную стратегию и не трогает рёбра, инцидентные x . Если Петя проходит по стрелке $u \rightarrow x$, Вася тут же разворачивает именно её в $x \rightarrow u$. На следующем ходу Петя обязательно выходит из x обратно в $G - x$, после чего Вася начинает индукционную стратегию заново из нового состояния.

Каждый такой уход в x навсегда уменьшает число стрелок, направленных из $G - x$ в x : Вася превращает одну из них в стрелку из x , а в остальное время граничных рёбер не касается. Поэтому уйти в x можно лишь конечное число раз. После последнего ухода индукционная стратегия в $G - x$ за конечное время останавливает фишку. Если в рассматриваемом состоянии фишка стояла в x , Вася сначала делает обязательный разворот. Если из x выходит ровно одна стрелка, он разворачивает её и сразу выигрывает. Иначе он разворачивает любое инцидентное x ребро; после этого исходящая стрелка существует, и первый ход Пети выводит фишку в $G - x$. Далее применяем уже описанную стратегию.

6. Две фишки и развороты стрелок

Идея. В каждый момент будем помнить не весь граф, а только две направленные дороги к цели:

- P — от текущего положения фишки Пети до B ;
- Q — от текущего положения фишки Васи до B ;

причём у P и Q нет общих рёбер. Общие вершины разрешены. Изначально P — данный в условии путь из A в B , а Q — пустой путь из B в B .

Рёбра вне $P \cup Q$ можно забыть. Если позже Вася воспользуется одним из них, мы увидим только пройденное ребро и присоединим его к Q . Поэтому доказательство работает даже в более наглядной усиленной модели: Вася может по ходу партии предъявлять новые вершины и рёбра, а всё вне двух цветных путей сразу исчезает. Это не новое правило исходной задачи, а способ хранить только ту часть позиции, которая нужна стратегии.

Опишем все изменения путей. На своём ходу Петя идёт по первому ребру P ; после разворота это ребро просто удаляется из P . Если P стал пустым, Петя уже находится в B .

Пусть теперь Вася прошёл по ребру $q \rightarrow r$. После хода оно стало $r \rightarrow q$.

1. Если ребро qr не лежало ни в P , ни в Q , допишем $r \rightarrow q$ в начало Q .
2. Если $q \rightarrow r$ лежало в Q , оно было первым ребром Q ; удалим его.
3. Если $q \rightarrow r$ лежало в P , представим

$$P = P_0 + (q \rightarrow r) + P_1.$$

Заменим пути по правилу

$$P \leftarrow P_0 + Q, \quad Q \leftarrow P_1. \quad (10)$$

В третьем случае это обычная «пересадка хвостов» в вершине q . Старые пути не имели общих рёбер, а перевёрнутое ребро из обоих новых путей удалено, поэтому новые маршруты тоже не имеют общих рёбер. Если после склейки вершина встретилась дважды, вырежем заключённый между двумя появлениями направленный цикл. Так из направленного маршрута получается простой направленный путь; инвариант и непересечение по рёбрам сохраняются. В первом случае циклы вырезаются так же.

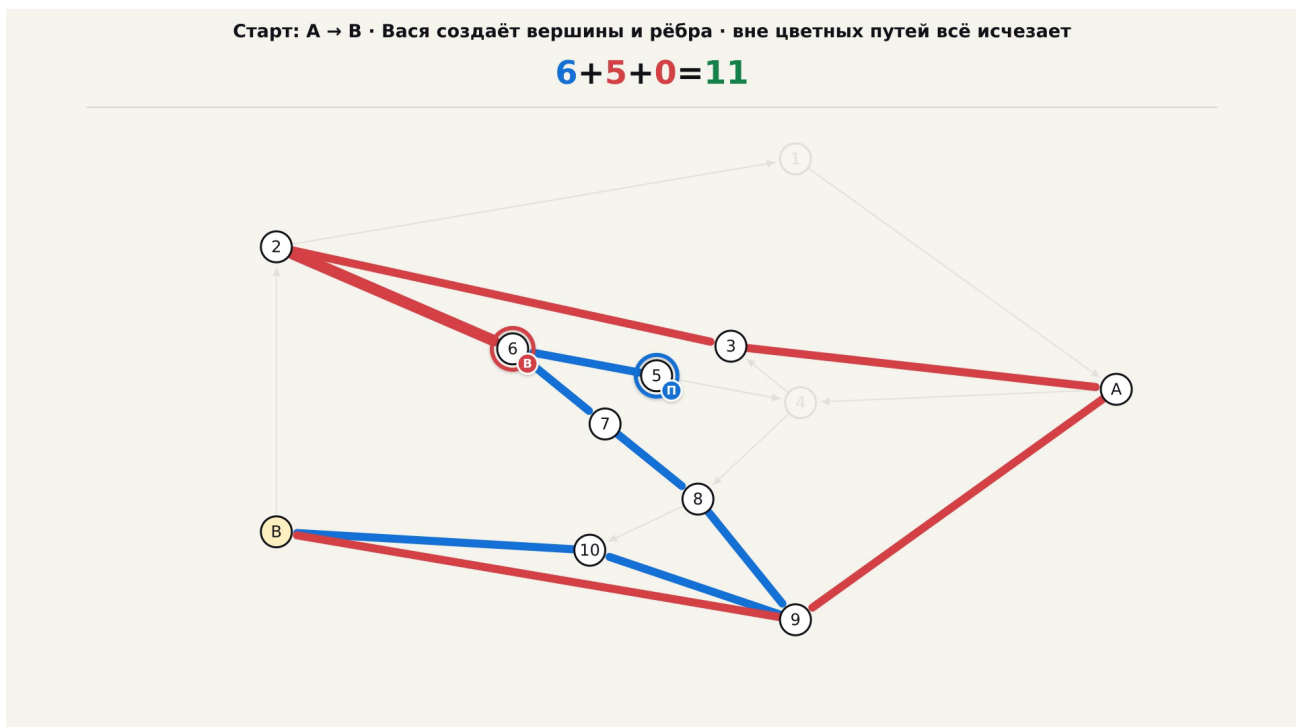
а) Сначала ходит только Вася

После каждого из конечного числа ходов Васи перестраиваем P, Q по правилам выше. Когда Вася остановился, путь P всё ещё направлен из A в B . Петя проходит его по порядку. После каждого хода разворачивается только уже пройденное и удалённое из пути ребро, поэтому оставшийся хвост пути по-прежнему направлен к B . Петя достигает цели.

б) Поочерёдная игра

Ответ: такого графа не существует; на всяком допустимом исходном графе Петя выигрывает.

Именно этот пункт показан на рисунке. Синим выделен P , красным — Q ; серые рёбра не участвуют в стратегии и потому почти стёрты. Кружки «П» и «В» показывают положения фишек, жёлтая вершина — цель B .



Запись $A \rightarrow B$ в строке «Старт» сокращённо обозначает данный в условии ориентированный путь; он не обязан состоять из одного ребра. В показанный момент очередь Пети, длины путей равны 6 и 5. Поэтому верхняя строка рисунка означает

$$|P| + |Q| + \varepsilon = 6 + 5 + 0 = 11,$$

где $\varepsilon = 0$ перед ходом Пети и $\varepsilon = 1$ перед ходом Васи. Положим

$$S = |P| + |Q| + \varepsilon. \quad (11)$$

Проверим картинку движения величины S . На ходу Пети длина P уменьшается на 1, а ε меняется с 0 на 1, так что S не меняется. После хода Васи ε меняется с 1 на 0. Если он прошёл вне $P \cup Q$, длина Q выросла не более чем на 1, и S не увеличилась. Если он прошёл по Q , то $|Q|$ уменьшилось на 1. При пересадке (10) из суммарной длины исчезло ребро qr , поэтому

$$|P_{\text{new}}| + |Q_{\text{new}}| \leq |P_{\text{old}}| + |Q_{\text{old}}| - 1.$$

Наконец, пропуск Васи не меняет пути. В последних трёх случаях S строго уменьшается. Итак, полуинвариант (11) не возрастает после каждого отдельного хода.

Предположим, что партия бесконечна. Неотрицательная целая величина S не может строго уменьшаться бесконечно, поэтому с некоторого момента она постоянна. Тогда каждый ход Васи обязан быть единственным случаем равенства: он идёт по ребру вне $P \cup Q$, добавляет к Q ровно одно ребро и при удалении циклов ничего не теряет. Такой ход совсем не меняет P . Но каждый ход Пети удаляет из P первое ребро. Значит, через конечное число ходов P станет пустым, то есть Петя попадёт в B . Противоречие.

Сколько ходов может понадобиться? Пусть в исходном графе n вершин и

$$L_0 = |P_0| \leq n - 1.$$

Рассмотрим величину $L = |P| + |Q|$ перед ходами Пети. За полный раунд она не возрастает. Пока $L = k$ и не уменьшается, Вася каждый раз попадает в случай равенства и не меняет P , а Петя укорачивает P на одно ребро. Поэтому не более чем через k ходов Пети либо величина L уменьшится, либо Петя победит. Следовательно, число ходов Пети не превосходит

$$L_0 + (L_0 - 1) + \dots + 1 \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Кадр показывает не оценку сверху, а конкретную партию на 12 вершинах, в которой Вася действительно надолго задерживает победу.

7. 2-вырожденные графы

а)

Ответ. Оба условия равносильны.

Напомним: граф 2-вырожден, если в каждом его непустом подграфе есть вершина степени не больше 2.

Пусть граф 2-вырожден. Будем по одной удалять вершины: каждый раз выбираем в оставшемся графе вершину степени не больше 2. Получим порядок $v_1, v_2, \dots, v_n$, где v_i была удалена раньше v_{i+1} . Каждое ребро направим от вершины, удалённой позже, к вершине, удалённой раньше.

В вершину v_i входят только рёбра, которые в момент удаления v_i соединяли её с ещё не удалёнными вершинами. Таких рёбер не больше двух. Кроме того, вдоль каждой стрелки номер вершины уменьшается, поэтому ориентированного цикла быть не может.

Обратно, пусть дана ациклическая ориентация, в которой входящая степень каждой вершины не больше 2. Возьмём любой непустой подграф. Ограниченная на него ориентация тоже ациклическа. В конечном ациклическом ориентированном графе есть **сток**, то есть вершина без исходящих стрелок. Действительно, если из каждой вершины выходит стрелка, можно всё время идти по стрелкам и в конце концов повторить вершину, получив цикл. У стока все рёбра подграфа входят в него, а значит, его степень не больше 2. Это и есть 2-вырожденность.

б)

Выберем ориентацию D из пункта а). Для каждой вершины, в которую в D входят ровно два ребра, объединим эти два ребра в пару. Такие пары не пересекаются: каждое ребро входит в единственную вершину.

Ключевое наблюдение: если все рёбра каждой такой пары в настоящей игре направлены *одинаково относительно её общей вершины* (либо оба входят, либо оба выходят), то

ориентированного цикла нет. В самом деле, предположим, что цикл появился. Ограничим эталонную ориентацию D на рёбра этого цикла. Она ациклична, поэтому на цикле есть вершина, в которую в D входят оба соседних ребра. Это как раз одна из выделенных пар. Но в настоящем ориентированном цикле одно из этих двух рёбер входит в вершину, а другое выходит — противоречие.

Теперь опишем стратегию Ациклиста.

- Если $|E(G)|$ чётно и начинает Циклист, число рёбер, не вошедших в выделенные пары, тоже чётно. Произвольно разобьём их на пары. После каждого хода Циклиста Ациклист берёт второе ребро той же пары. Для выделенной пары он выбирает направление так, чтобы оба ребра одинаково смотрели относительно общей вершины; для остальных пар направление неважно.
- Если $|E(G)|$ нечётно и начинает Ациклист, среди непарных рёбер есть хотя бы одно. Первым ходом Ациклист ориентирует одно такое ребро как угодно. После этого оставшиеся непарные рёбра разбиваются на пары, и далее Ациклист отвечает точно так же.

Проверим ещё, что Циклист не успеет замкнуть цикл своим ходом, до ответа Ациклиста. Перед каждым его ходом любая выделенная пара либо ещё не тронута, либо уже закончена и направлена одинаково относительно своего центра. Если бы новая стрелка замкнула цикл, возьмём сток эталонной ориентации D на этом цикле. Оба соседних с ним ребра образуют выделенную пару. Эта пара не могла быть закончена раньше: тогда её направления противоречили бы циклу. Но она не могла быть и нетронутой, ведь оба её ребра уже лежат в возникшем цикле. Противоречие.

После ответа Ациклиста ключевое наблюдение снова выполнено. Значит, цикл не появится ни после чьего хода, и Ациклист выигрывает.



На левом рисунке два эталонных ребра входят в x ; на ориентированном цикле одно из них неизбежно должно входить, а другое выходить.

8. Квадратные решётки

а)

Ответ. На бесконечной квадратной решётке Ациклист выигрывает при обоих порядках хода.

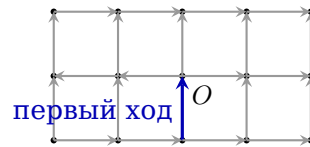
Сначала пусть начинает Циклист. В качестве эталонной ориентации D направим все горизонтальные рёбра вправо, а все вертикальные вверх. В каждую вершину входят ровно два эталонных ребра — слева и снизу; объединим их в пару. После хода Циклиста Ациклист берёт второе ребро той же пары и направляет его так же относительно общей вершины, как первое. Полная проверка из задачи 7б запрещает цикл не только после ответа Ациклиста, но и сразу после хода Циклиста. Бесконечность графа не мешает: каждый кандидат на победный цикл конечен, и рассуждение применяется только к нему.

Теперь пусть начинает Ациклист. Первым ходом она направляет ребро $(0, -1)(0, 0)$ вверх. Построим чуть изменённую эталонную ориентацию:

- все вертикальные рёбра направлены вверх;
- на строке $y = 0$ горизонтальные рёбра направлены от начала координат;
- на всех остальных строках горизонтальные рёбра направлены вправо.

Эта ориентация ациклична. Действительно, вдоль вертикальной стрелки координата y строго растёт, поэтому цикл не может содержать вертикальных рёбер; а внутри одной строки лежит ориентированный путь, не содержащий цикла.

В начало координат входит ровно одно эталонное ребро — именно уже ориентированное первым ходом. В каждую другую вершину входят ровно два ребра. Их Ациклист попарно связывает и далее отвечает, как в задаче 7б. Единственное непарное ребро уже занято её первым ходом. Поэтому ориентированного цикла снова не возникнет.



На рисунке первый ход выделен синим; в каждой другой вершине парой служат две входящие стрелки.

б)

Число рёбер равно

$$m(n-1) + n(m-1) = 2mn - m - n.$$

Следовательно,

$$|E(P_m \square P_n)| \equiv m + n \pmod{2}.$$

Дадим независимую парную стратегию. Мысленно направим все горизонтальные рёбра вправо, а вертикальные вверх. В каждой вершине, у которой есть сосед слева и сосед снизу, объединим два приходящих от них ребра в пару. Остальные рёбра пока оставим без пары.

Если число рёбер чётно и начинает Циклист, то оставшихся рёбер тоже чётное число; произвольно разобьём их на пары. Если число рёбер нечётно и начинает Ациклист, оставшееся число рёбер нечётно и потому положительно. Первым ходом Ациклист ориентирует одно из них как угодно, а остальные разбивает на пары. Далее на ход Циклиста она всегда берёт второе ребро той же пары. В структурной паре два ребра направляются одинаково относительно их общей вершины: либо оба в неё, либо оба из неё. В произвольной паре направление ответа неважно.

Почему цикл невозможен? В любом цикле решётки возьмём вершину с наибольшей суммой координат. Оба ребра цикла в этой вершине идут влево и вниз, то есть образуют одну из структурных пар. Но на ориентированном цикле одно из них входит в вершину, а другое выходит, тогда как стратегия направляет их одинаково относительно вершины. Цикл не может возникнуть и непосредственно после хода Циклиста: перед таким ходом каждая структурная пара либо совсем не тронута, либо уже закончена. В первом случае в новом цикле не могли бы лежать оба её ребра, а во втором их направления уже несовместимы с циклом.

Итак, Ациклист выигрывает. Поскольку чётность числа рёбер совпадает с чётностью $m + n$, получаются в точности оба требуемых случая. При $m = n = 1$ рёбер нет, и утверждение выполняется автоматически.

9. Игра Боллобаша-Сабо

Сток уже был определён в задаче 7; **источник** — вершина, в которую не входит ни одной стрелки.

а)

В каждой компоненте 4-регулярного графа построим замкнутый обход, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Начинаем идти по неиспользованным рёбрам. Застрять не в начальной вершине нельзя: до очередного входа в неё было использовано чётное число её рёбер, а после входа — нечётное, то есть не все четыре. Если после возвращения остались рёбра, начинаем такой же обход из вершины старого обхода, инцидентной неиспользованному ребру, и вклеиваем новый кусок. Так получаем эйлеров обход.

Направим его по ходу движения. В каждую вершину входят ровно два ребра; объединим их в пару с центром в этой вершине. Все рёбра графа разбились на такие пары.

Циклист первым берёт одно ребро любой пары и направляет его из её центра, а второе временно откладывает. Дальше он действует так:

- на ход Ациклиста в нетронутой паре берёт второе ребро этой пары и направляет его из центра;
- если Ациклист берёт отложенное ребро, Циклист открывает новую пару: одно её ребро направляет из центра, а второе откладывает;
- если новых пар уже нет, ход Ациклиста на последнем отложенном ребре просто завершает игру; отвечать уже не требуется.

В результате из центра каждой пары выходит хотя бы одна стрелка, то есть стоков нет. В конечном ориентированном графе без стоков есть ориентированный цикл: идя каждый раз по выходящей стрелке, мы когда-нибудь повторим вершину. Значит, Циклист выигрывает.

Для остальных пунктов понадобится более общее распределение рёбер по парам. Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1 (распределение по допустимым местам). Пусть каждому из нескольких предметов разрешено занять некоторые места. Если для любого набора из q предметов совокупно доступно хотя бы q мест, то можно расставить все предметы по различным допустимым местам.

Доказательство. Расставим наибольшее возможное число предметов. Если предмет p не расставлен, отметим его, затем все доступные ему места, затем все предметы, уже стоящие на отмеченных местах, и будем повторять эти два шага. Если встретилось свободное отмеченное место, вдоль получившейся цепочки можно последовательно передвинуть предметы и поставить также p , вопреки максимальнойности.

Значит, свободного отмеченного места нет. Тогда все отмеченные места заняты, а отмеченных предметов на один больше: это их владельцы плюс первоначальный предмет p . При этом все места, доступные отмеченным предметам, тоже отмечены. Получилось меньше доступных мест, чем предметов, — противоречие условию. $\square$

Лемма 2 (пары в минимальном плотном ядре). Здесь **минимальным плотным ядром** называется граф H , для которого $v(H) \geq 3$, $e(H) = 2v(H) - 2$, а каждый собственный подграф F с $v(F) \geq 3$ имеет не более $2v(F) - 3$ рёбер. Пусть H — такое ядро, и первое отмеченное ребро направлено $a \rightarrow b$.

1. Можно приписать каждое ребро одному из его концов так, чтобы вершине a не было приписано ни одного ребра, каждой другой вершине было приписано ровно два ребра, а ребро ab было приписано вершине b .
2. Пусть есть ещё одно отличное от ab ребро $c \rightarrow d$, причём $a \neq c$. Распределение можно выбрать так, чтобы дополнительно ребро cd было приписано вершине c .

После распределения два ребра, приписанные одной вершине, будем называть её *парой*.

Доказательство. Сделаем для каждой вершины, кроме a , по два свободных места. Ребро разрешается положить только на место одного из его концов.

В первом случае заранее кладём ab на одно из мест вершины b . Во втором случае дополнительно кладём cd на одно из мест вершины c . Если $b = c$, эти два ребра занимают два разных места одной вершины.

Проверим условие леммы 1 для оставшихся рёбер. Возьмём любой их набор Q , а через X обозначим множество всех его концов, кроме a . Через $e_H(S)$ будем обозначать число рёбер H с обоими концами в S . Все рёбра из Q лежат среди рёбер, посчитанных в $e_H(X \cup \{a\})$.

Если это собственное множество вершин и $|X| \geq 2$, то из определения ядра

$$e_H(X \cup \{a\}) \leq 2(|X| + 1) - 3 = 2|X| - 1. \quad (1)$$

Если $b \in X$, ребро ab посчитано в $e_H(X \cup \{a\})$, но уже не входит в Q . Поэтому в обоих случаях

$$|Q| \leq 2|X| - 1 - \mathbf{1}_{b \in X}. \quad (2)$$

В первом случае у вершин X осталось $2|X| - \mathbf{1}_{b \in X}$ мест, и (2) даже на единицу сильнее нужного. Во втором случае осталось

$$2|X| - \mathbf{1}_{b \in X} - \mathbf{1}_{c \in X}$$

мест. Если $c \in X$, это в точности правая часть (2); если $c \notin X$, правая часть (2) снова на единицу меньше числа свободных мест. Значит, и во втором случае мест достаточно. Заметим, что здесь не требуется считать ребро cd внутри $X \cup \{a\}$: вершина d могла не попасть в это множество, а нужную потерю одного места оплачивает строгая единица в (1).

Если $X \cup \{a\} = V(H)$, число всех оставшихся рёбер в точности равно числу всех оставшихся мест: соответственно $2v(H) - 3$ и $2v(H) - 4$, поэтому тем более хватает мест для Q . Наконец, при $X = \emptyset$ набор Q пуст. При $X = \{x\}$ в нём может быть лишь единственное ребро ax . В первом случае свободно $2 - \mathbf{1}_{x=b}$ мест, а при $x = b$ ребро $ax = ab$ уже занято. Во втором случае свободно

$2 - \mathbf{1}_{x=b} - \mathbf{1}_{x=c}$ мест; единственная возможность получить ноль мест — $x = b = c$, но тогда $ax = ab$ опять уже занято. Все малые случаи тоже проверены.

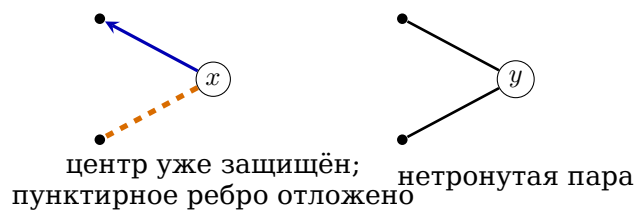
Итак, условие леммы 1 выполнено, и все оставшиеся рёбра можно расставить. $\square$

Механизм пар и отложенного ребра. Если два ребра пары приписаны вершине x , то Циклист может *защитить* x от превращения в сток, направив хотя бы одно из них из x .

Нам понадобится следующий режим игры. Есть несколько ещё не тронутых пар и, возможно, одно *отложенное* ребро; вершина, которой оно приписано, уже защищена.

- Если Ациклист берёт ребро нетронутой пары, Циклист берёт второе и направляет его из центра пары.
- Если Ациклист берёт отложенное ребро, Циклист начинает любую нетронутую пару: одно её ребро направляет из центра, а второе объявляет новым отложенным.
- Если нетронутых пар уже нет, ход на последнем отложенном ребре просто завершает ориентацию.

Так Циклист постепенно защищает все центры.



б)

Пусть первый ход Ациклиста — $a \rightarrow b$. Применим первую часть леммы 2. Вершина a уже не является стоком. Ребро ab входит в пару вершины b . Циклист немедленно берёт второе ребро этой пары и направляет его из b .

После каждого дальнейшего хода Ациклиста Циклист берёт второе ребро той же пары и направляет его из её центра. Поэтому каждая вершина, кроме a , тоже получит выходящую стрелку. Итоговая ориентация не имеет стоков.

По условию этого пункта игра продолжается до конца, даже если цикл возник раньше. Стратегия всё равно остаётся определённой.

в)

Пусть Циклист первым направил $a \rightarrow b$, а Ациклист ответил $c \rightarrow d$.

Сначала предположим, что $a \neq c$. Применим вторую часть леммы 2: ребро ab приписано b , а cd — c . Вершина a защищена первым ребром, вершина c — вторым.

Если $b \neq c$, Циклист сейчас берёт второе ребро пары вершины b и направляет его из b . Неиспользованное второе ребро пары вершины c объявляется отложенным. Если $b = c$, два первых ребра уже составляют одну пару и защищают её центр; тогда Циклист открывает любую нетронутую пару и оставляет её второе ребро отложенным.

Теперь действует механизм пар и отложенного ребра. В итоге стоков нет, если только ориентированный цикл не появился раньше.

Остался случай $a = c$. Тогда, поскольку два хода сделаны на разных рёбрах, $b \neq d$. Мысленно развернём все стрелки. Первые две стрелки станут $b \rightarrow a$ и $d \rightarrow a$, то есть их начала различны. Уже разобранный механизм гарантирует отсутствие стоков после такого разворота, а значит, в исходной ориентации не будет источников. Ориентированный цикл при развороте всех стрелок остаётся ориентированным циклом.

Итак, Циклист обеспечивает одну из требуемых альтернатив.

г)

Сначала выделим нужную часть графа. Среди подграфов графа G , имеющих не менее $2v - 2$ рёбер и хотя бы три вершины, выберем минимальный по включению и обозначим его H . Тогда

$$e(H) = 2v(H) - 2.$$

Действительно, при большем числе рёбер можно было бы удалить одно ребро. Кроме того, каждый собственный подграф $F \subsetneq H$ с $v(F) \geq 3$ имеет не более $2v(F) - 3$ рёбер, иначе он был бы выбран вместо H . Значит, H — минимальное плотное ядро.

Циклист играет только на H и начинает с произвольной стрелки $a \rightarrow b$. Нужно лишь аккуратно учесть, что ход Ациклиста вне H является пропуском хода внутри H .

- Если первый ответ Ациклиста сделан в H , применяем построение пункта в). После следующего хода Циклиста внутри H остаются нетронутые пары и одно отложенное ребро.
- Если первый ответ сделан вне H , применяем первую часть леммы 2 к $a \rightarrow b$. Циклист берёт второе ребро пары b и направляет его из b . После этого внутри H остаются только нетронутые пары.

Дальнейшие пропуски обрабатываются так. Если отложенного ребра нет и Ациклист ходит вне H , Циклист открывает новую пару и оставляет её второе ребро отложенным. Если отложенное ребро есть и Ациклист снова ходит вне H , Циклист просто ориентирует отложенное ребро, после чего отложенного ребра опять нет. На ход в нетронутой паре он, как обычно, отвечает на втором ребре; на ход на отложенном ребре открывает следующую пару. Если подходящих рёбер уже нет, все рёбра H ориентированы.

Таким образом, независимо от ходов вне H , Циклист получает на H ориентацию без стоков либо без источников, если цикл не возник раньше. В ветви «без источников» все ответы направляются противоположно: не из центра пары, а в центр. Конечная ориентация без стоков или без источников обязательно содержит ориентированный цикл. Следовательно, Циклист выигрывает.

Зависимости односторонние:

$$\text{леммы } 1-2 \rightarrow 9б, 9в \rightarrow 9г.$$

Пункт 9а в доказательстве 9г не используется.

д)

У 4-регулярного графа на N вершинах

$$2e = 4N, \quad e = 2N.$$

Если Циклист начинает, он выигрывает по пункту а) (или по пункту г)). Если начинает Ациклист, забудем о его первом ориентированном ребре. Неориентированными остались $2N - 1 \geq 2N - 2$ рёбер, и теперь первым среди них ходит Циклист. Пункт г) даёт ему ориентированный цикл, целиком состоящий из оставшихся рёбер.

Теперь рассмотрим клеточное вложение на замкнутую ориентируемую поверхность рода $g \geq 1$. Слово **клеточное** означает, что каждая компонента дополнения графа является диском; эти компоненты называются гранями. Пусть число граней равно f . Каждая грань имеет четыре стороны, а каждое ребро граничит с двумя гранями, поэтому

$$4f = 2e, \quad f = \frac{e}{2}.$$

Для данного клеточного разбиения выполнено

$$N - e + f = 2 - 2g.$$

Вот короткое обоснование, не использующее эту формулу как готовую теорему. Величина $V - E + F$ не меняется при двух операциях измельчения. Если поставить новую вершину на ребре, то V и E увеличатся на 1. Если провести внутри грани простую дугу и разделить грань надвое, то на 1 увеличатся E и F . Любые два конечных клеточных разбиения одной поверхности имеют общее измельчение: слегка сдвинем их рёбра, отметим все точки пересечения, а затем при необходимости разделим получившиеся области дугами. Поэтому величину $V - E + F$ можно считать на стандартном разбиении поверхности рода g : это многоугольник с $4g$ сторонами, склеенными в $2g$ пар. После склейки у него одна вершина, $2g$ рёбер и одна грань. Следовательно, $V - E + F = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$, как и требовалось.

Подставляя $f = e/2$, получаем

$$e = 2N + 4g - 4.$$

При $g \geq 1$ это не меньше $2N$. Поэтому при первом ходе Циклиста применим пункт г). Если первым ходит Ациклист, после его хода остаётся не менее $2N - 1$ рёбер, и к ним снова применим пункт г). Циклист выигрывает при обоих порядках.

е)

Из задачи 8а мы знаем, что на бесконечной квадратной решётке при обоих порядках выигрывает Ациклист. Построим конечные графы, на которых при обоих порядках выигрывает Циклист.

Для данного $R \geq 0$ положим

$$L = 2R + 3, \quad G_R = C_L \square C_L.$$

Иными словами,

$$V(G_R) = (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2,$$

а две вершины соединены, если они отличаются на ± 1 ровно в одной координате. В качестве v_R берём $(0, 0)$. Параметры конструкции:

$$|V(G_R)| = L^2 = (2R + 3)^2, \quad |E(G_R)| = 2L^2 = 2(2R + 3)^2.$$

Граф простой и 4-регулярный, так как $L \geq 3$. По пункту д) Циклист выигрывает на нём при обоих порядках хода.

Напомним: корневой шар радиуса R — подграф, порождённый вершинами на расстоянии не больше R от отмеченного корня. Осталось проверить этот шар. Каждая его вершина имеет единственного представителя $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ с

$$|x| + |y| \leq R.$$

Два разных таких представителя не могут совпасть по модулю L , поскольку абсолютная разность каждой их координаты не превосходит $2R < L$. Не возникает и лишних рёбер «через шов» тора: абсолютная разность двух координат не превосходит $2R$, тогда как для ложного соседства она должна была бы равняться $L - 1 = 2R + 2$. Следовательно, внутри шара соседство в точности такое же, как в $\mathbb{Z}^2$.

Итак, корневые шары радиуса R изоморфны, но победители при каждом из двух порядков противоположны.

С. Раскраска рёбер и кликовые игры

10. Первый одноцветный треугольник

Ответ. При каждом $n \geq 5$ выигрывает Синий.

Стратегия использует не более пяти вершин, но эти вершины удобно выбирать после первого ответа Красного.

Синий начинает с ребра P_1P_2 . Первый красный ход относится к одному из двух случаев.

Случай 1: красное ребро имеет общий конец с P_1P_2 . Переобозначим концы так, чтобы это ребро было P_2P_3 , и выберем ещё две свежие вершины P_4, P_5 . Синий красит P_2P_4 . Теперь он угрожает взять P_1P_4 и закончить синий треугольник $P_1P_2P_4$. Поэтому Красный вынужден сам взять P_1P_4 ; двумя рёбрами он ещё не может выиграть.

После этого Синий берёт P_2P_5 . На следующем ходу он угрожает взять любое из двух рёбер

$$P_1P_5, \quad P_4P_5.$$

Первое завершает треугольник $P_1P_2P_5$, второе — треугольник $P_2P_4P_5$.

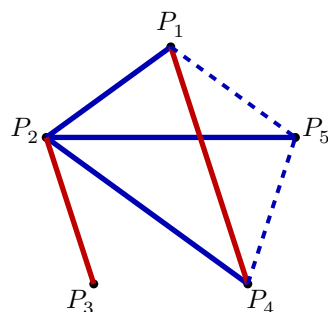
Случай 2: первое красное ребро не имеет общих концов с P_1P_2 . Обозначим его P_3P_4 и выберем пятую вершину P_5 . Синий красит P_1P_5 , угрожая ребром P_2P_5 . Красный вынужден взять P_2P_5 . Затем Синий берёт P_1P_3 и создаёт две угрозы:

$$P_2P_3 \quad \text{и} \quad P_3P_5.$$

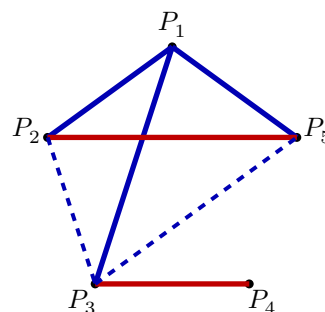
Они завершают соответственно треугольники $P_1P_2P_3$ и $P_1P_3P_5$.

В обоих случаях перед третьим ходом Красного два его ребра не имеют общего конца: это пары P_2P_3, P_1P_4 или P_3P_4, P_2P_5 . Поэтому одним третьим ребром Красный не может получить треугольник: любые два ребра одного треугольника имеют общий конец. Он успевает закрыть лишь одну из двух синих угроз, после чего Синий осуществляет вторую и выигрывает.

Если Красный когда-либо не закрывает единственную указанную угрозу, Синий выигрывает ещё раньше. Условие $n \geq 5$ нужно ровно для выбора пяти различных вершин.



случай 1



случай 2

Сплошные синие и красные рёбра показывают положение после третьего хода Синего; два пунктирных ребра — его одновременные угрозы.

Ниже клика из одной вершины тоже считается кликой. Через ω_R и ω_B обозначаются размеры наибольших клик соответствующих цветов, а через $\alpha(G)$ — размер наибольшего независимого множества графа G .

11. Симметричная игра Эрдёша

Сначала договоримся об одном приёме, который несколько раз понадобится дальше.

Приём воображаемых рёбер. Если мы доказываем, что игрок выигрывает даже после того, как подарили противнику несколько ещё свободных рёбер, то тем более он выигрывает в настоящей игре. В самом деле, можно мысленно считать подаренные рёбра уже занятыми противником. Если позднее противник действительно возьмёт такое ребро, считаем его ход пропуском, а свой вынужденный лишний ход делаем где угодно: дополнительное ребро своего цвета не может уменьшить свою клику и не может увеличить клику противника. Точно так же можно пропускать ход, когда в рассматриваемой части доски свободных рёбер уже нет.

а)

Предположим противное: у Синего есть стратегия, которая при любой игре Красного даёт

$$\omega_B > \omega_R.$$

Красный первым ходом красит произвольное ребро e , а затем делает вид, что играет **вторым**, и применяет стратегию Синего, поменяв названия цветов. В этой воображаемой игре рёбра настоящего Синего играют роль рёбер первого игрока, а все красные рёбра, кроме e , — роль рёбер второго. Поэтому стратегия обещает

$$\omega(R - e) > \omega(B).$$

Добавочное красное ребро e может только помочь. Получилось, что та же стратегия одновременно обещает победу обоим игрокам — противоречие. Значит, Красный может гарантировать $\omega_R \geq \omega_B$.

б)

Игра конечна, поэтому просмотром её дерева с конца получаем: либо Синий умеет обеспечить $\omega_R \leq \omega_B + 1$, либо Красный умеет обеспечить $\omega_R \geq \omega_B + 2$. Покажем, что второе невозможно.

Пусть S — такая предполагаемая стратегия Красного, а f — её первый ход. Рассмотрим первый настоящий ход Красного e . Синий хочет сам разыгрывать стратегию S , поменяв цвета местами.

- Если $e \neq f$, Синий красит f и дальше буквально следует S . Тогда стратегия S , применённая к синим рёбрам и красным рёбрам без e , обещала бы

$$\omega_B \geq \omega(R - e) + 2 \geq \omega_R + 1.$$

Последнее неравенство следует из того, что удаление одного ребра уменьшает кликовое число не более чем на один. Этого уже достаточно для противоречия с обещанием Красного $\omega_R \geq \omega_B + 2$.

- Если $e = f$, Синий делает произвольный свободный ход g , а затем не учитывает его. В воображаемой партии стратегии S первым синим ребром считается e ; настоящие красные ходы, начиная со второго, играют роль ходов её противника, а настоящие синие ходы, начиная со второго, — ответов стратегии. Поэтому S даёт

$$\omega((B - g) + e) \geq \omega(R - e) + 2. \quad (*)$$

Добавление одного ребра увеличивает кликовое число не более чем на один: из клики, использующей это ребро, достаточно удалить один его конец. Значит, левая часть (*) не больше $\omega(B) + 1$, а правая не меньше $\omega(R) + 1$. Отсюда $\omega_B \geq \omega_R$.

Если после e осталось не более одного свободного ребра, требуемая оценка очевидна: у Красного всего одно ребро. Поэтому во второй ветви можно считать, что после хода g воображаемая партия действительно продолжается. Это замечание нужно лишь для произвольной доски из пункта в); на K_n , $n \geq 3$, свободных рёбер и так достаточно.

В обоих случаях стратегия Красного и построенная по ней стратегия Синего не могут одновременно выполнить свои обещания. Противоречие доказывает требуемое.

в)

В рассуждениях пунктов а) и б) нигде не использовалась полнота графа: нужны были лишь конечность игры и тот факт, что добавление одного ребра увеличивает кликовое число не более чем на один. Поэтому оба доказательства без изменений работают на произвольной конечной доске G . При правильной игре Красный обеспечивает разность не меньше нуля, а Синий — не больше единицы; следовательно, она равна 0 или 1.

г)

Пусть первый ход Красного на K_{n+1} — ребро uv . Усилим Красного: мысленно отдадим ему все остальные рёбра из v . На оставшихся n вершинах получилась чистая доска K_n , и первым на ней ходит Синий. Он применяет выигрышную стратегию первого игрока из условия. Ход Красного вне этой доски считается пропуском в воображаемой партии; если доска K_n уже заполнена, Синий красит любое оставшееся свободное ребро.

Если внутри этого K_n наибольшие клики имеют размеры r и b , то $b \geq r + 1$. В полном графе красная клика может дополнительно использовать универсальную красную вершину v , а синяя — нет. Поэтому

$$\omega_R = r + 1 \leq b = \omega_B.$$

Синий не проигрывает, то есть выигрывает по правилу задачи.

д)

Пусть Красный начал с xy , а $H = K_{n+2} - \{x, y\} \cong K_n$. Первым своим ходом Синий начинает на H выигрышную стратегию первого игрока из условия. Далее он отвечает по двум правилам:

1. на красный ход внутри H отвечает внутри H по этой стратегии;
2. на ход xz , где $z \in H$, отвечает yz , и наоборот.

Во втором правиле ответ всегда свободен: два ребра пары $\{xz, yz\}$ до этого могли быть затронуты только вместе.

Если внутренний ответ стратегии уже был сделан раньше как лишний синий ход или если внутри H рёбер не осталось, Синий берёт любое свободное ребро. Приём воображаемых рёбер из начала задачи показывает, что такое ведение счёта не меняет обещания стратегии на H .

Обозначим кликовые числа внутри H через r и b . Тогда $b \geq r + 1$. Красная клика размера хотя бы три не может содержать одновременно x и y : для каждой третьей вершины одно из двух нужных рёбер синее. Значит,

$$\omega_R \leq r + 1 \leq b \leq \omega_B.$$

е)

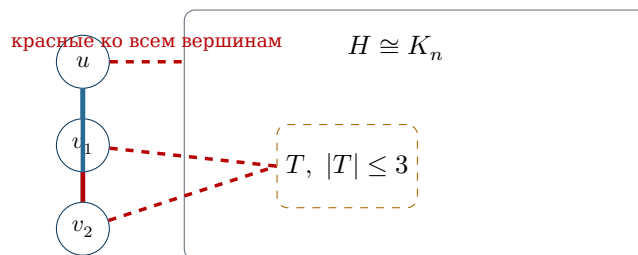
Зафиксируем выигрышную стратегию S первого игрока на K_n . Сначала опишем позицию, из которой Синий уже легко доводит игру до победы.

Целевая позиция.

Пусть вершины разбиты на $H \cong K_n$ и три особые вершины u, v_1, v_2 , причём:

- внутри H Синий играет первым по стратегии S , и сейчас у него на одно ребро больше, чем у Красного (либо H уже закончен);
- все рёбра из u в H красные, а uv_1, uv_2 синие;
- ребро v_1v_2 красное, а все общие красные соседи v_1, v_2 в H лежат в некотором множестве T , где $|T| \leq 3$.

На схеме сплошные синие и красные рёбра уже окрашены, а пунктир показывает подаренные Красному рёбра. Прямоугольник обозначает весь граф H , маленькая область внутри него — множество T .



Почему целевая позиция выигрышна. Из этой позиции на красный ход внутри H Синий отвечает по S , а на v_1w отвечает v_2w и наоборот. Если Красный берёт одно из мысленно подаренных рёбер, этот ход считается пропуском, как в приёме воображаемых рёбер. Поэтому в конце, если r, b — кликовые числа цветов внутри H , то $b \geq r + 1$. Красная клика, использующая не более одной особой вершины, имеет размер не более $r + 1$. Клика, использующая две особые вершины, не может содержать u вместе с v_1 или v_2 ; значит, это могут быть лишь v_1, v_2 и не более трёх их общих красных соседей. Итак,

$$\omega_R \leq \max\{r + 1, 5\}. \quad (1)$$

Нам понадобится совсем грубая рамсеевская оценка, которую здесь же докажем. В любой двухцветной раскраске рёбер K_{70} есть одноцветный K_5 . Действительно, индукцией по $a + b$

докажем, что среди $\binom{a+b-2}{a-1}$ вершин есть красный K_a или синий K_b . Для выбранной вершины либо не меньше $\binom{a+b-3}{a-2}$ рёбер одного цвета, либо не меньше $\binom{a+b-3}{a-1}$ рёбер другого; применяем индукцию к соответствующим соседям. При $a = b = 5$ получаем $\binom{8}{4} = 70$.

Так как $n > 100$, внутри H есть красный или синий K_5 . Во втором случае сразу $b \geq 5$, а в первом $r \geq 5$, откуда $b \geq r + 1 \geq 6$. Следовательно, $b \geq 5$, и вместе с (1) это даёт $\omega_B \geq \omega_R$.

Как получить целевую позицию. Пусть первое красное ребро имеет конец x . Синий первым ходом берёт xy , где y — новый конец. После второго хода Красного выберем вершину z так, чтобы она не была соединена красным ребром ни с x , ни с y , и чтобы всякое уже проведённое красное ребро, не содержащее x, y , имело конец z . Такой выбор всегда возможен: красное ребро вне $\{x, y\}$ пока не более одного; если оно есть, берём его подходящий конец, иначе берём новую вершину. Тогда ни одно уже окрашенное ребро не лежит в

$$H = K_{n+3} - \{x, y, z\}.$$

Синий начинает на H стратегию S и отвечает ею на все красные ходы в H , пока Красный впервые после этого не возьмёт ребро e , не лежащее в H . В частности, e может быть одним из рёбер xz, yz . Синий берёт свободное ребро из $\{xz, yz\}$, не совпадающее с e . Такой ход всегда возможен: до хода e оба ребра были свободны, а сам e занимает не более одного из них. Та из вершин x, y , у которой теперь две синие связи с двумя остальными, получает имя u ; две другие — имена v_1, v_2 .

Есть лишь одна техническая мелочь. Если Красный только что взял последнее ребро H , Синему нечем отвечать внутри H . Тогда он сразу берёт любое из xz, yz и назначает имена u, v_1, v_2 . Целевая позиция уже получена, причём H полностью окрашен.

До этого момента Красный сделал не более трёх рёбер, не лежащих в H . Поэтому объединение уже возникших красных соседей v_1, v_2 внутри H имеет размер не больше трёх. Включим его в множество $T \subset H$, $|T| \leq 3$. По приёму воображаемых рёбер подарим Красному все недостающие рёбра из u в H , оба ребра из каждой вершины T в v_1, v_2 , а также ребро $v_1 v_2$. Ни одно из них не синее. Получена ровно целевая позиция. Это завершает доказательство.

ж)*

Условие. Докажите или опровергните: существует такое натуральное число N , что для каждого $n \geq N$, если на K_n Красный может гарантировать строгую победу, то на K_{n+4} Синий имеет выигрышную стратегию.

Открытый пункт. По условию проекта решение здесь не приводится.

з)*

Условие. Докажите или опровергните: для каждого $n \geq 3$ при правильной игре выигрывает Синий.

Открытый пункт. По условию проекта решение здесь не приводится.

12. Смещённая игра 1 : 2

а)

После окончания игры каждое ребро K_n , не принадлежащее белому графу W , чёрное. Поэтому множество вершин образует чёрную клику тогда и только тогда, когда никакие две его вершины не соединены белым ребром, то есть когда оно независимо в W . Следовательно,

$$\omega(\text{чёрного графа}) = \alpha(W).$$

б)

После первого белого ребра uv обозначим две остальные вершины через x, y . Чингиз немедленно красит чёрным xy и любое ещё свободное ребро. Теперь всякое следующее белое ребро имеет общий конец с uv , поскольку единственное ребро, не имеющее с ним общего конца, уже чёрное.

На K_4 Белла успевает сделать ровно два хода. Поэтому её белый граф — два смежных ребра и одна изолированная вершина. В нём $\omega(W) = 2$, а три вершины можно выбрать независимо, то есть $\alpha(W) = 3$. По пункту а) чёрная клика имеет размер $3 > 2$, и Чингиз выигрывает.

13. Белла и Чингиз на K_n

а) Чётное n , четыре чёрных ребра

Идея. Чингиз разбивает вершины на чёрные пары. Почти каждый блок между двумя парами он сразу делает полностью чёрным, кроме одного белого ребра. Исключения образуют лес; в любом ориентированном лесу есть источник.

Изначально все вершины назовём *свободными*. По ходу игры Чингиз создаёт непересекающиеся пары $\{x, \bar{x}\}$, причём ребро $x\bar{x}$ чёрное. Четыре ребра между двумя парами назовём их *блоком*. Некоторые блоки будут отмечены; отмеченные блоки образуют граф F на множестве пар.

Ответ на белое ребро xy задаётся тремя правилами.

1. Если x, y свободны, берём ещё две свободные вершины $\bar{x}, \bar{y}$, красим

$$x\bar{x}, \quad y\bar{y}, \quad \bar{x}\bar{y}$$

и создаём пары $X = \{x, \bar{x}\}$, $Y = \{y, \bar{y}\}$. Блок XY отмечаем, то есть добавляем ребро XY в F .

2. Если x уже входит в пару $X = \{x, \bar{x}\}$, а y свободна, выбираем свободную $\bar{y}$, красим

$$y\bar{y}, \quad x\bar{y}, \quad \bar{x}\bar{y}$$

и создаём новую пару $Y = \{y, \bar{y}\}$. Блок XY отмечаем и пока ориентируем $X \rightarrow Y$.

3. Если обе вершины уже имеют пары, Чингиз красит чёрным все ещё свободные рёбра их блока. Если блок не отмечен, таких рёбер не более трёх; если отмечен — не более двух.

В первых двух случаях использовано не более трёх рёбер. Четвёртым ребром Чингиз при необходимости устраняет единственную неприятность: если после создания пар остались ровно две свободные вершины, он красит ребро между ними и объявляет их парой. Поэтому перед каждым ходом Беллы свободных вершин либо нет, либо не меньше четырёх, и правило 1 всегда выполнимо. Все неиспользованные ходы Чингиз делает произвольно.

Граф F является лесом. В правиле 1 его новое ребро соединяет две новые вершины, а в правиле 2 новая вершина подвешивается к старой. Пары, созданные четвёртым ходом, становятся изолированными вершинами F .

После окончания партии доориентируем рёбра F . Для блока из правила 1 первое белое ребро есть xy , а $\bar{x}\bar{y}$ чёрное. Из двух остальных рёбер $x\bar{y}, \bar{x}y$ белым может стать не более одного: после такого хода Беллы правило 3 немедленно красит второе. Если $x\bar{y}$ чёрное, ориентируем $X \rightarrow Y$; если оно белое, ориентируем $Y \rightarrow X$.

Получаем простое свойство:

$$X \rightarrow Y, p \in X, q \in Y, pq \text{ белое} \implies p\bar{q} \text{ чёрное.} \quad (*)$$

Для блока из правила 2 оно верно уже при ориентации $X \rightarrow Y$, потому что оба ребра $x\bar{y}, \bar{x}y$ чёрные. Для блока из правила 1 свойство следует из только что выбранной ориентации.

Если к концу партии свободные вершины всё же остались, ни одно белое ребро им не инцидентно: иначе соответствующая вершина давно получила бы пару по правилу 1 или 2. Поэтому все их рёбра уже чёрные. Разобьём эти вершины на пары и добавим в F как изолированные вершины.

Пусть C — наибольшая белая клика, $|C| = s$. Белла сделала хотя бы один ход, поэтому $s \geq 2$. В C не более одной вершины из каждой пары. Обозначим через $\bar{C}$ множество противоположных вершин.

Множество $\bar{C}$ является чёрной кликой. Действительно, в неотмеченном блоке после первого белого ребра все остальные рёбра стали чёрными. В отмеченном блоке ребро, противоположное первому белому, Чингиз красит сразу, а ребро, противоположное возможному второму белому, — по правилу 3.

Рассмотрим ориентированный подлес F на парах, представленных в C , и возьмём в нём источник X . Пусть c — вершина C из пары X . Для любой другой $q \in C$ ребро cq чёрное. Если пары c и q соседни в F , это следует из того, что X — источник, и из (*). Если не соседни, их блок не отмечен, а значит, кроме белого cq , весь он чёрный. Кроме того, $c\bar{c}$ — ребро пары и тоже чёрное. Следовательно,

$$\bar{C} \cup \{c\}$$

— чёрная клика размера $s + 1$. Чингиз выигрывает.

6) Чётное n , три чёрных ребра

Для пунктов б) и в) используем более экономную, но чуть более тонкую стратегию. Если правило предписывает меньше трёх новых чёрных рёбер (часть из них уже чёрная), Чингиз добирает оставшиеся ходы любыми свободными рёбрами. Через $\bar{v}$ снова обозначаем противоположную вершину. Блок назовём **ранним**, если его первое белое ребро появилось до того, как обе пары были созданы.

Полезно заранее видеть три инварианта:

- ребро каждой противоположной пары чёрное;
- ребро, противоположное белому ребру между двумя парами, чёрное;
- ранние блоки образуют лес на множестве пар.

Пусть $n = 2m$. В начале вершины не имеют имён. По ходу игры Чингиз разбивает затронутые вершины на противоположные пары $\{v, \bar{v}\}$; ребро каждой пары он сразу делает чёрным.

Пока остаётся хотя бы четыре безымянные вершины, ответ задаётся так.

1. Если Белла взяла ребро uv между двумя безымянными вершинами, Чингиз выбирает ещё две безымянные вершины $\bar{u}, \bar{v}$ и красит

$$u\bar{u}, \quad \bar{u}\bar{v}, \quad v\bar{v}.$$

2. Если u уже имеет пару, а v безымянна, Чингиз выбирает ей пару $\bar{v}$ и красит

$$\bar{u}\bar{v}, \quad v\bar{v}.$$

3. Если обе вершины уже имеют пары, то после белого uv он красит все ещё свободные рёбра из трёх остальных рёбер между парами $\{u, \bar{u}\}$ и $\{v, \bar{v}\}$:

$$u\bar{v}, \quad \bar{u}v, \quad \bar{u}\bar{v}.$$

Если их меньше трёх, оставшуюся часть квоты он добирает произвольными свободными рёбрами.

На схеме показан первый случай: белое ребро uv создаёт две противоположные пары, а противоположное ему ребро $\bar{u}\bar{v}$ сразу становится чёрным.



Если в конце раунда остались ровно две безымянные вершины, назовём их x, y и дальше отвечаем так:

ход Беллы	рёбра Чингиза
xv	$x\bar{v}, yv, y\bar{v}$
yv	$xv, x\bar{v}, y\bar{v}$
xy	специальный ответ не нужен.

(2)

На ход между уже спаренными вершинами по-прежнему действует правило 3.

Докажем победу и заодно проверим заявленные инварианты.

Ранние блоки образуют лес на множестве пар. Действительно, ход между двумя безымянными вершинами создаёт отдельное ребро между двумя новыми вершинами этого леса, а ход между именованной и безымянной вершиной подвешивает новую вершину к старой. Ребро между двумя уже созданными парами ранним быть не может, поэтому цикла в этом лесу не появится.

В нераннем блоке белым бывает не более одного ребра. В раннем блоке первое белое ребро имеет чёрное противоположное; после следующего белого хода правило 3 красит все оставшиеся свободные рёбра. Поэтому в раннем блоке белых рёбер не более двух, и если их два, они имеют общий конец.

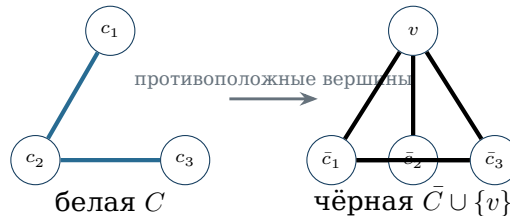
Теперь возьмём белую клику C из s спаренных вершин. Она содержит не более одной вершины каждой пары. Множество противоположных вершин $\bar{C}$ образует чёрную клику:

ребро, противоположное каждому белому ребру C , чёрное. Белое ребро между C и $\bar{C}$ возможно лишь в раннем блоке, соответствующем двум парам из C , и в каждом таком блоке оно не более одно. Индуцированный этими s парами подграф леса имеет не более $s-1$ рёбер. Значит, между C и $\bar{C}$ не более $s-1$ белых рёбер. Поэтому найдётся $v \in C$, не имеющая ни одного белого соседа в $\bar{C}$. Все эти рёбра чёрные, и

$$\bar{C} \cup \{v\}$$

— чёрная клика размера $s+1$.

На схеме показан случай $s=3$: белая клика C переходит в чёрную клику $\bar{C} \cup \{v\}$, которая на одну вершину больше. Синий цвет на рисунке, как и выше, обозначает белые рёбра Беллы.



Если наибольшая белая клика содержит x , но не y , запишем её как $C \cup \{x\}$. По (2) вершина y чёрно соединена и со всей $\bar{C}$, и с найденной вершиной v . Поэтому $\bar{C} \cup \{v, y\}$ имеет на одну вершину больше белой клики. Случай с y симметричен. Наконец, белое ребро xy не входит ни в один белый треугольник: для всякой третьей вершины правило (2) делает одну из двух связей чёрной. Если белая клика состоит только из x, y , то ещё до появления этих двух остаточных вершин внутри спаренной части уже было белое ребро; применённое к нему предыдущее рассуждение даёт чёрную тройку. Итак, наибольшая чёрная клика всегда строго больше белой.

в) Нечётное n , три чёрных ребра

Сначала Чингиз действует точно как в пункте б), создавая противоположные пары. Он останавливает этот этап в один из двух моментов:

- остались три безымянные вершины и Белла впервые затронула одну из них;
- остались пять безымянных вершин и Белла взяла ребро между двумя из них.

Спаренные вершины обозначим через L . Возможны три случая.

Случай 1. Остались a, b, c , и первый новый ход Беллы имеет вид av_0 , где $v_0 \in L$. Чингиз красит чёрным треугольник abc . Затем на белое ребро dv , где $d \in \{a, b, c\}$ и $v \in L$, он красит все ещё свободные рёбра

$$a\bar{v}, \quad b\bar{v}, \quad c\bar{v},$$

а на ходы внутри L отвечает правилом 3 пункта б). Единственное исключение — начальное белое ребро av_0 : если оно встречается среди предписанных рёбер при ответе на dv_0 , Чингиз просто пропускает его и красит остальные свободные рёбра.

Белая клика содержит не более одной из вершин a, b, c . Если она имеет вид $C \cup \{d\}$, где $C \subset L$ и $|C| = s$, то

$$(\bar{C} \setminus \{v_0, \bar{v}_0\}) \cup \{a, b, c\}$$

— чёрная клика размера не меньше $s+2$, то есть строго больше. Если белая клика целиком лежит в L , работает доказательство пункта б).

Случай 2. Остались a, b, c , и первый новый ход Беллы — ab . Чингиз красит ac, bc . Далее ответы таковы:

$$\begin{array}{l|l} av & bv, b\bar{v}, c\bar{v} \\ bv & av, a\bar{v}, c\bar{v} \\ cv & a\bar{v}, b\bar{v}, c\bar{v}. \end{array} \quad (3)$$

Внутри L снова действует прежнее правило. Если белая клика равна $C \cup \{a\}$, то $\bar{C} \cup \{b, c\}$ — чёрная клика на одну вершину больше. Для b всё симметрично, а для c годится $\bar{C} \cup \{a, c\}$. Белая клика не может содержать одновременно a, b и вершину L , что сразу видно из первой строки (3). Само ребро ab также не опасно. При $n=5$ сразу возникает случай 3. При $n \geq 7$ перед появлением трёх остаточных вершин был хотя бы один обычный спаривающий ход; его белое

ребро после ответа целиком лежит в L . Лесной аргумент пункта б) при $s = 2$ даёт чёрный K_3 внутри L .

Случай 3. Остались пять вершин. Концы первого белого ребра назовём x, y , остальные — a, b, c . Чингиз красит чёрным треугольник abc . Дальнейшие ответы:

1. на одно из рёбер av, bv, cv он красит $a\bar{v}, b\bar{v}, c\bar{v}$;
2. на xv или yv он красит три остальных ребра между $\{x, y\}$ и $\{v, \bar{v}\}$;
3. если, например, Белла красит ax , Чингиз красит ay, by, cy ; если позднее Белла берёт bx или cx , он красит оставшееся из этих двух рёбер. Остальные пять вариантов получаются переименованием;
4. внутри L действует старое правило.

Белая клика, содержащая не более одной из пяти особых вершин, разбирается как в пункте б) (для a, b, c чёрный треугольник даже даёт лишний запас). Ребро xy не входит в белый треугольник. Наконец, если белая клика содержит две особые вершины, то с точностью до переименования она имеет вид

$$C \cup \{a, x\}.$$

Тогда

$$\bar{C} \cup \{b, c, y\}$$

— чёрная клика, на одну вершину большая. Все случаи исчерпаны, поэтому Чингиз выигрывает при каждом нечётном $n > 3$.

Все ответы легальны. Правило 3 по определению берёт только свободные рёбра; в раннем блоке после второго белого хода все прочие свободные рёбра становятся чёрными. Для ребра между особой вершиной и v рассуждение такое: если бы одно из требуемых рёбер к $\bar{v}$ раньше стало белым, ответ на тот прежний ход уже сделал бы нынешнее ребро к v чёрным. Наконец, в правиле с ax любой более ранний белый ход на одном из ay, by, cy по симметричному ответу сделал бы ax чёрным. Поэтому ни одна из таблиц не требует перекрашивать белое ребро; уже чёрные предписанные рёбра просто не считаются новыми, а квота добирается произвольными свободными рёбрами.

г)*

Условие. Докажите или опровергните: при $k = 2$ Чингиз имеет выигрышную стратегию для каждого чётного $n > 3$.

Открытый пункт. По условию проекта решение здесь не приводится.

14. Белая клика на бесконечной доске

Во всех пунктах ходом Беллы называется одно белое ребро. Поэтому $T_b(r)$ — это число белых ходов, а не общее число окрашенных рёбер.

а) Как Белла строит клику

Сначала опишем вспомогательный рисунок, по которому Белла будет выбирать ходы. Это конечное дерево с уровнями

$$0, 1, \dots, r-1.$$

На уровне 0 находится одна вершина — **корень**. Из каждой вершины уровней $0, \dots, r-2$ выходят вниз ровно $b+1$ ветвей. Вершины последнего уровня называются **листьями**. Вершину x назовём предком вершины y , если путь от корня к y проходит через x .

Вершины этого дерева — лишь места на вспомогательном рисунке. Некоторым из них Белла постепенно сопоставляет настоящие вершины бесконечного полного графа. Такую вершину дерева будем называть **занятой**, а сопоставленную ей вершину графа — её **представителем**.

Белла всё время сохраняет следующее свойство:

если две занятые вершины дерева лежат на одном пути от корня вниз, то их представители соединены белым ребром.

Сначала Белла занимает корень, выбрав для него любого представителя. Далее она повторяет одну и ту же попытку.

1. Белла выбирает новую вершину u настоящего графа. Она требует, чтобы из u не шло чёрных рёбер ни к одному уже выбранному представителю. Такая вершина существует: представителей и уже проведённых чёрных рёбер пока лишь конечное число, а вершин в K_∞ бесконечно много.
2. Белла начинает в корне вспомогательного дерева. Пусть сейчас она стоит в занятой вершине x . Она красит белым ребро от u к представителю x .
3. Под вершиной x начинаются $b + 1$ ветвей — по одной от каждого её сына. Ответ Чингиза состоит из b чёрных рёбер, поэтому он может провести чёрное ребро от u к занятому представителю не более чем в b из этих ветвей. Значит, хотя бы одна ветвь остаётся без такого ребра. Белла выбирает её.
4. Если первый сын в выбранной ветви уже занят, Белла переходит в него и повторяет шаги 2–3. Если он ещё не занят, Белла делает u его представителем и заканчивает попытку.

Почему главное свойство сохранилось? В течение попытки Белла соединила u белыми рёбрами со всеми занятыми вершинами пути, по которому она спускалась. Именно они являются занятыми предками нового места u .

Чёрные ответы не могут остановить спуск: на каждом уровне продолжений $b + 1$, а чёрных рёбер в ответе только b . Кроме того, все чёрные рёбра, проведённые на предыдущих уровнях этой попытки, ведут в уже отброшенные ветви.

Если Белла дошла до занятой вершины уровня $r - 2$, то следующий её ход уже даёт белый K_r . Действительно, на пути от корня до этой вершины находится $r - 1$ занятая вершина. Их представители попарно соединены белыми рёбрами, а новая вершина u в этой попытке бело соединена с каждым из них.

Наконец, процесс не может продолжаться бесконечно. Каждая неудачная попытка занимает новую вершину конечного вспомогательного дерева. Значит, рано или поздно Белла дойдёт до последнего уровня и победит.

Можно сразу оценить число ходов. Чтобы занять вершину уровня j , Белла проводит j белых рёбер. На уровне j находится $(b + 1)^j$ вершин. Даже если Белле придётся занять все вершины уровней $1, \dots, r - 2$, а затем один лист, она сделает не более

$$T_b(r) \leq \sum_{j=0}^{r-2} j(b+1)^j + (r-1). \quad (4)$$

В частности, $T_b(r)$ конечно.

6) Точный ответ для треугольника

Докажем оба неравенства.

Белле достаточно $b + 3$ ходов. Она выбирает вершину v и проводит из неё $b + 2$ белых ребра

$$vx_1, vx_2, \dots, vx_{b+2}.$$

Каждую новую вершину x_i Белла выбирает так, чтобы все рёбра от неё к уже названным вершинам были свободны. Это возможно по той же причине, что и в пункте а): окрашено лишь конечное число рёбер.

После хода vx_{b+2} свободны все $b + 1$ рёбер от x_{b+2} к $x_1, \dots, x_{b+1}$. Любое из них завершает белый треугольник с вершиной v . Чингиз закрасит не более b таких рёбер. Следующим ходом Белла берёт оставшееся и получает треугольник. Поэтому $T_b(3) \leq b + 3$.

Раньше $b + 3$ -го хода Белла победить не может. Назовём свободное ребро **опасным**, если, покрасив его белым, Белла сразу получит белый треугольник. После каждого из первых $b + 1$ ходов Беллы Чингиз закрашивает чёрным все новые опасные рёбра, а оставшиеся ходы тратит произвольно.

Проверим, что ему хватает b рёбер. Пусть Белла только что провела своё t -е белое ребро uv . Каждое новое опасное ребро должно вместе с uv и одним из прежних белых рёбер образовать треугольник. Прежних белых рёбер ровно $t - 1$, и каждое из них создаёт не более одного нового опасного ребра. Значит, новых опасных рёбер не более $t - 1 \leq b$.

После ответа Чингиза на $(b + 1)$ -й ход опасных свободных рёбер нет. Поэтому своим $(b + 2)$ -м ходом Белла ещё не может завершить треугольник. Итак,

$$T_b(3) = b + 3.$$

Подготовка к пунктам в) и г): весовая лемма

Сначала разберём конечную игру в общей форме. Пусть X — конечное множество игровых элементов. В нашей задаче элементами будут рёбра полного графа. Пусть также задан набор целей $\mathcal{F}$; каждая цель $A \in \mathcal{F}$ есть некоторое подмножество X . Белла выигрывает, если заберёт все элементы хотя бы одной цели. За ход она берёт один свободный элемент, а Чингиз — b свободных элементов.

Положим $\lambda = b + 1$. Для цели A , в которой ещё нет элемента Чингиза, обозначим через $u(A)$ число её свободных элементов и дадим этой цели вес

$$\lambda^{-u(A)}.$$

Если Чингиз взял хотя бы один элемент цели, цель уже недоступна Белле и её вес считается равным нулю. Сумму весов всех доступных целей обозначим через Φ .

Весовая лемма. Если до начала игры

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda^{-|A|} < \frac{1}{\lambda}, \quad (5)$$

то Чингиз может не дать Белле полностью собрать ни одну цель.

Доказательство. Первый ход Беллы умножает вес каждой затронутой цели не более чем на λ . Поэтому сразу после этого хода $\Phi < 1$.

Дальше Чингиз каждое из своих b рёбер выбирает по следующему правилу. Для каждого свободного элемента он складывает веса всех доступных целей, содержащих этот элемент, и берёт элемент с наибольшей такой суммой.

Рассмотрим следующий ход Беллы, скажем элемент x . После всех b выборов Чингиза сумма весов доступных целей, содержащих x , равна некоторому L . Во время каждого выбора Чингиза элемент x ещё был свободен. Поэтому выбранный Чингизом элемент имел сумму весов не меньше L , а его выбор уничтожал все эти цели. За b выборов Чингиз уменьшил общий вес не меньше чем на bL .

Затем Белла берёт x . Вес каждой сохранившейся цели с x умножается на λ , поэтому общий вес увеличивается на

$$(\lambda - 1)L = bL.$$

Итак, после ходов Беллы величина Φ не возрастает и всё время меньше 1. Но полностью собранная цель имела бы вес 1. Значит, Белла не может её получить. Лемма доказана.

Почему конечная лемма годится для K_∞ . Пусть нужно защищаться только в течение первых t ходов Беллы. За это время будет окрашено не более $(b + 1)t$ рёбер, а у них не более $2(b + 1)t$ концов. Возьмём конечный полный граф

$$K_N, \quad N = 2(b + 1)t.$$

По мере появления настоящих вершин K_∞ будем давать им разные имена вершин K_N . Если конечная стратегия Чингиза просит ребро с ещё не использованным именем, этому имени сопоставляется новая настоящая вершина. Имен хватит, потому что за t раундов встретится не более N концов рёбер. Так любая защитная стратегия на K_N переносится на первые t ходов игры на K_∞ .

в) Оценки для $T_1(r)$

Нижняя оценка. Положим

$$t = \lfloor 2^{r/2} \rfloor - 1, \quad N = 4t < 2^{r/2+2}.$$

На K_N каждой клике из r вершин соответствует цель из всех её $\binom{r}{2}$ рёбер. Таких целей $\binom{N}{r}$. При $b = 1$ имеем $\lambda = 2$, поэтому условие (5) принимает вид

$$\binom{N}{r} 2^{-\binom{r}{2}} < \frac{1}{2},$$

или, что то же самое,

$$\binom{N}{r} < 2^{\binom{r}{2}-1}. \quad (6)$$

Проверим (6). Так как

$$\binom{N}{r} < \frac{N^r}{r!} < \frac{2^{r^2/2+2r}}{r!},$$

достаточно доказать

$$r! > 2^{5r/2+1}. \quad (7)$$

При $r = 17$ это верно:

$$17! = 355687428096000 > 2^{43.5}.$$

Дальше левая часть при переходе от r к $r + 1$ умножается на $r + 1 \geq 18$, а правая — лишь на $2^{5/2} < 6$. Поэтому (7), а вместе с ней и (6), верна для всех $r \geq 17$.

Весовая лемма даёт Чингизу защиту в течение первых t ходов. Значит,

$$T_1(r) \geq t + 1 = \lfloor 2^{r/2} \rfloor.$$

Верхняя оценка. В формуле (4) берём $b = 1$. Равенство

$$\sum_{j=0}^{r-2} j2^j = (r-3)2^{r-1} + 2$$

легко проверяется по индукции. Поэтому

$$T_1(r) \leq (r-3)2^{r-1} + r + 1.$$

г) Оценки для $T_2(r)$

Нижняя оценка. Теперь положим

$$t = \lfloor 3^{r/2} \rfloor - 1, \quad N = 6t < 6 \cdot 3^{r/2}.$$

Здесь $b = 2$ и $\lambda = 3$. Как и в пункте в), весовая лемма применима, если

$$\binom{N}{r} < 3^{\binom{r}{2}-1}. \quad (8)$$

Имеем

$$\binom{N}{r} < \frac{N^r}{r!} < \frac{6^r 3^{r^2/2}}{r!}.$$

Поэтому для (8) достаточно неравенства

$$r! > 6^r 3^{r/2+1}. \quad (9)$$

При $r = 30$ обе стороны можно сравнить непосредственно:

$$\begin{aligned} 30! &= 265252859812191058636308480000000, \\ 6^{30} 3^{16} &= 9516507342594806772904803434496. \end{aligned}$$

Первая больше. При увеличении r левая часть (9) умножается на $r + 1 \geq 31$, а правая — на $6\sqrt{3} < 12$. Следовательно, (9) верно при всех $r \geq 30$. Весовая лемма теперь даёт

$$T_2(r) \geq \lfloor 3^{r/2} \rfloor.$$

Верхняя оценка. Подставляя $b = 2$ в (4), получаем даже немного более сильную оценку

$$T_2(r) \leq \sum_{j=0}^{r-2} j3^j + r - 1.$$

Отсюда, конечно,

$$T_2(r) \leq \sum_{j=0}^{r-2} j3^j + r + 1.$$

Кроме того,

$$\sum_{j=0}^{r-2} j3^j \leq (r-2) \sum_{j=0}^{r-2} 3^j = \frac{r-2}{2} (3^{r-1} - 1),$$

и при $r \geq 2$ правая часть вместе с $r + 1$ меньше $r3^{r-1}$. Поэтому

$$T_2(r) < r3^{r-1}.$$

д) Оценка Бека

Здесь $b = 1$. При $r = 2$ Белла выигрывает первым ходом, поэтому дальше считаем $r \geq 3$. Нам понадобится простая вспомогательная игра.

Лемма о выборе половины. Пусть дан граф F на чётном числе вершин. Два игрока по очереди выбирают по одной ещё не выбранной вершине, первым ходит Первый. Тогда Первый может добиться, чтобы среди выбранных им вершин оказалось не более $e(F)/4$ рёбер графа F . Здесь $e(F)$ означает общее число рёбер F .

Доказательство леммы. Будем следить только за рёбрами, ни один конец которых ещё не выбрал Второй. Такое ребро назовём сохраняющимся. Если у сохраняющегося ребра ещё не выбраны s концов, дадим ему вес 2^{-s} . Вначале каждое ребро имеет вес $1/4$, так что общий вес равен $e(F)/4$.

Первый выбирает вершину с наименьшей суммой весов сохраняющихся рёбер, выходящих из неё. При его ходе вес каждого такого ребра удваивается, то есть общий вес увеличивается ровно на найденную сумму. После этого Второй выбирает вершину и уничтожает все сохраняющиеся рёбра, выходящие из неё. До хода Первого сумма у этой вершины была не меньше выбранного минимума, а после хода могла только увеличиться. Значит, Второй уничтожает вес не меньше того, на сколько Первый его только что увеличил.

После каждой пары ходов общий вес не возрастает. В конце сохраняются ровно те рёбра, оба конца которых выбрал Первый; каждое из них имеет вес 1. Поэтому таких рёбер не больше $e(F)/4$. Лемма доказана.

Теперь положим

$$n = r + 2$$

и выберем в бесконечном графе множество V_0 из 2^n вершин. Белла построит вложенные множества

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$$

и вершины $u_1, u_2, \dots$ так, чтобы u_i была соединена белыми рёбрами со всеми вершинами V_i .

Первый шаг. Белла выбирает $u_1 \in V_0$ и проводит из неё белые рёбра, пока не получит

$$s_1 = 2^{n-1}$$

белых соседей. Они образуют V_1 . Это возможно: всего из u_1 в $V_0 \setminus \{u_1\}$ выходит $2^n - 1 = 2s_1 - 1$ рёбер, и между двумя ходами Беллы Чингиз может отнять не более одного из них.

Обозначим через e_i число чёрных рёбер с обоими концами в V_i , через s_i — число вершин V_i , а через δ_i — наименьшее число чёрных рёбер из одной вершины V_i к другим вершинам V_i . За первый шаг Чингиз сделал не более s_1 ходов, поэтому

$$e_1 \leq s_1, \quad \delta_1 \leq \frac{2e_1}{s_1} \leq 2. \quad (10)$$

Последнее неравенство следует из того, что сумма чисел чёрных рёбер во всех вершинах равна $2e_1$.

Как построить V_i из V_{i-1} . Выберем в V_{i-1} вершину u_i , из которой выходит ровно δ_{i-1} чёрных рёбер внутри V_{i-1} . Удалим саму u_i и всех её чёрных соседей. Из оставшихся вершин возьмём наибольшее чётное множество A .

Все рёбра из u_i в A свободны. Чёрных среди них нет по выбору A . Белых тоже нет: на предыдущих шагах белыми были только рёбра из u_j в V_j , причём центр u_j не входил в V_j . Поэтому внутри каждого V_j белых рёбер пока нет.

Рассмотрим граф F , состоящий из уже имеющихся чёрных рёбер внутри A , и мысленно разыграем на его вершинах лемму о выборе половины. Когда Первый в этой мысленной игре выбирает вершину x , Белла красит белым ребро $u_i x$. Если Чингиз в ответ красит ребро $u_i y$, где $y \in A$ ещё не выбрана в мысленной игре, считаем, что Второй выбрал y . Во всех остальных случаях отдаём Второму любую ещё не выбранную вершину A .

Предписанный Белле луч всегда свободен. Действительно, если Чингиз раньше закрасил луч к некоторой вершине, эта вершина тогда же была отдана Второму и Первый уже не сможет её выбрать. Пусть V_i состоит из вершин, выбранных Первым. Тогда

$$s_i = \left\lfloor \frac{s_{i-1} - 1 - \delta_{i-1}}{2} \right\rfloor. \quad (11)$$

По лемме среди них не более четверти старых чёрных рёбер. Во время этого шага Чингиз добавляет не более одного нового чёрного ребра за каждый из s_i ходов Беллы. Следовательно,

$$e_i \leq \frac{e_{i-1}}{4} + s_i. \quad (12)$$

Почему множества остаются достаточно большими. Докажем по индукции, что при $1 \leq i \leq n-4$

$$2^{n-i} - 7 \leq s_i \leq 2^{n-i}, \quad \delta_i \leq 5. \quad (13)$$

Для $i = 1$ это следует из определения s_1 и (10).

Пусть утверждение уже доказано для $i-1$, и обозначим

$$x = 2^{n-i}.$$

Тогда $s_{i-1} \geq 2x - 7$, $\delta_{i-1} \leq 5$, и из (11) получаем

$$s_i \geq \frac{(2x - 7) - 5 - 2}{2} = x - 7.$$

Вычитание дополнительной единицы здесь учитывает округление вниз. Верхняя оценка $s_i \leq x$ очевидна из (11).

Повторяя (12), получаем

$$e_i \leq s_i + \frac{s_{i-1}}{4} + \frac{s_{i-2}}{4^2} + \dots.$$

При этом $s_{i-k} \leq 2^k x$. Поэтому

$$e_i < s_i + x,$$

так как

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k}{4^k} = 1.$$

В рассматриваемом диапазоне $x \geq 16$, а $s_i \geq x - 7$. Следовательно, среднее число чёрных рёбер, выходящих из одной вершины V_i , меньше

$$\frac{2(s_i + x)}{s_i} \leq 2 + \frac{2x}{x-7} \leq 2 + \frac{32}{9} < 6.$$

Значит, хотя бы из одной вершины выходит не более пяти чёрных рёбер, то есть $\delta_i \leq 5$. Индукция закончена.

Завершение. При $i = n-4$ из (13) следует

$$|V_{n-4}| \geq 16 - 7 = 9, \quad \delta_{n-4} \leq 5.$$

Белла выбирает вершину u_{n-3} с наименьшим числом чёрных соседей в V_{n-4} . После удаления её самой и не более пяти чёрных соседей остаётся хотя бы одна вершина u_{n-2} , причём ребро $u_{n-3}u_{n-2}$ свободно. Белла красит его белым.

Теперь вершины

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-2}$$

образуют белую клику. В самом деле, при $j < k$ вершина u_k лежала в V_j , а u_j была бело соединена со всем V_j ; для последней пары ребро только что провела Белла. В клике $n-2 = r$ вершин.

На построение V_i ушло s_i ходов, и ещё один ход понадобился в конце. По верхней оценке из (13)

$$\sum_{i=1}^{n-4} s_i + 1 \leq \sum_{i=1}^{n-4} 2^{n-i} + 1 < 2^n = 2^{r+2}.$$

Вместе с уже разобранным случаем $r = 2$ получаем для всех $r \geq 2$

$$T_1(r) < 2^{r+2}.$$

е)*

Условие. Улучшите при больших r расхождение между лучшими известными оценками

$$2^{r/2} \leq T_1(r) \leq 2r^7 2^{2r/3}.$$

Комментарий. Верхняя оценка принадлежит Гебауэр и заметно сильнее оценки Бека, но её известное доказательство слишком техническое для этого проекта.

Открытый пункт. По условию проекта решение здесь не приводится.

15. Связь игр $1 : 2$ и $1 : 1$

Выберем вершину z . На первом этапе Белла всякий раз берёт свободное ребро из z и продолжает, пока таких рёбер не останется. Из $M - 1 \geq 6N$ рёбер звезды Чингиз за каждый раунд может отнять не более одного, поэтому Белле достанется множество S не менее чем из $3N$ белых соседей вершины z . Пусть $|S| = s$. За это время Чингиз сделал не более s ходов, так что в чёрном графе, порождённом S , не более s рёбер.

Покажем элементарный факт: в графе на s вершинах с e рёбрами есть независимое множество размера не меньше

$$\frac{s^2}{2e + s}. \quad (12)$$

Возьмём случайный порядок вершин и выберем вершину, если она стоит раньше всех своих соседей. Выбранные вершины независимы, а вершина степени d выбирается с вероятностью $1/(d+1)$. Поэтому среднее число выбранных равно $\sum_v 1/(d(v)+1)$. Оно не меньше (12), поскольку для положительных $a_1, \dots, a_s$

$$\left(\sum a_i\right) \left(\sum \frac{1}{a_i}\right) \geq s^2;$$

после раскрытия скобок это всего лишь сумма неравенств $a_i/a_j + a_j/a_i \geq 2$. Значит, хотя бы для одного порядка достигается (12).

У нас $e \leq s$, поэтому в S есть множество X из не менее чем $s/3 \geq N$ вершин, между которыми нет чёрных рёбер. Оставим ровно N из них.

На втором этапе Белла разыгрывает на X свою выигрышную стратегию из игры $1 : 2$. Настоящий Чингиз за раунд берёт лишь одно ребро. Если оно лежит в X и ещё свободно в воображаемой игре, Белла считает его первым из двух воображаемых чёрных рёбер. Если же оно лежит вне X или уже было мысленно окрашено чёрным в одном из прежних раундов, Белла считает настоящий ход пропуском, то есть нулём новых воображаемых рёбер. Затем она мысленно красит чёрным произвольные ещё свободные рёбра внутри X , пока в воображаемом раунде не получится два чёрных хода (или пока доска не закончится). Всякое настоящее чёрное ребро внутри X учтено в воображаемой игре, поэтому белый ход, предписанный исходной стратегией, всегда свободен и в настоящей игре.

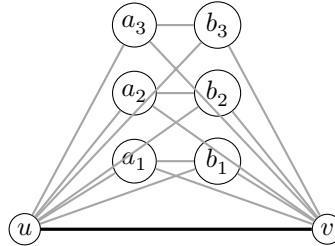
Так Белла получает белый K_r внутри X . Все его вершины бело соединены с z , следовательно, вместе с z они образуют белый K_{r+1} .

Д. Графы для игр

16. Двусвязная доска для Красного

Для $t \geq 2$ построим граф H_t из t копий K_4 , имеющих ровно одно общее ребро uv . В i -й копии две остальные вершины обозначим a_i, b_i , а саму копию назовём **страницей** C_i .

показаны три страницы; их число произвольно



Возьмём

$$t \geq \max \left\{ 2, \left\lceil \frac{M-2}{2} \right\rceil \right\}.$$

Тогда в H_t ровно $2 + 2t \geq M$ вершин.

Сначала проверим двусвязность. После удаления u вершина v соединяет все оставшиеся вершины, после удаления v ту же роль играет u . После удаления одной из a_i, b_i общее ребро uv по-прежнему соединяет все страницы. Значит, удаление любой вершины оставляет граф связным.

Теперь стратегия Красного. Первым ходом он берёт uv . Первый ход Синего лежит в некоторой странице C_j . Красный выбирает другую, ещё не затронутую страницу C_1 и вторым ходом берёт противоположное ребро a_1b_1 . Страницу первого синего хода переименуем в C_2 .

Опишем локальные ответы в остальных страницах.

- В C_2 уже есть одно синее ребро e . Если $e = a_2b_2$, Красный спаривает оставшиеся рёбра как

$$\{ua_2, ub_2\}, \quad \{va_2, vb_2\}.$$

Если, например, $e = ua_2$, пары таковы

$$\{a_2b_2, ub_2\}, \quad \{va_2, vb_2\};$$

остальные лучи симметричны. На синий ход в паре Красный берёт её второе ребро.

- Пусть Синий впервые вошёл в ещё нетронутую страницу C_i . Если он взял a_ib_i , Красный берёт ua_i , а два ребра va_i, vb_i объявляет парой и при необходимости отвечает одним на другое. Если первый синий ход был лучом, например ua_i , Красный сразу берёт a_ib_i . После этого никакой синий треугольник в странице уже невозможен. Все варианты получаются переименованием вершин.

Ответ, требуемый одним из этих локальных правил, Красный делает прежде всего. Если локального ответа не требуется, он работает в целевой странице C_1 . Её четыре луча разбиты на две пары противоположных рёбер

$$P = \{ua_1, vb_1\}, \quad Q = \{ub_1, va_1\}.$$

Красный берёт свободное ребро из той пары, из которой у него ещё нет ребра. Если обе пары уже представлены, свободным ходом можно, например, взять a_ib_i в ещё нетронутой странице; это сразу делает такую страницу безопасной для Синего.

Красный обязательно получит по ребру из P и Q . Действительно, если Синий сам впервые входит в одну из этих пар, на этом ходу локального ответа нет и Красный сразу берёт другое её ребро. Если же Синий избегает C_1 , то после конечного числа ходов все остальные страницы исчерпаются и ему всё равно придётся туда войти. Любые два ребра, по одному из P, Q , имеют общий конец; третьим ребром соответствующего красного треугольника служит одно из uv, a_1b_1 .

Остаётся проверить защиту. Всякий треугольник H_t целиком лежит в одной странице. В C_1 оба противоположных ребра uv, a_1b_1 красные. В C_2 каждый возможный синий треугольник требует обоих рёбер одной из указанных пар. В новой странице после первого синего луча ребро a_ib_i становится красным; после первого синего a_ib_i треугольник через u закрыт красным ua_i , а треугольник через v требует оба ребра пары $\{va_i, vb_i\}$. Наконец, треугольники через uv невозможны, поскольку uv красное. Значит, у Синего нет треугольника.

Итак, $\omega_R \geq 3$, а $\omega_B \leq 2$, и Красный строго выигрывает.

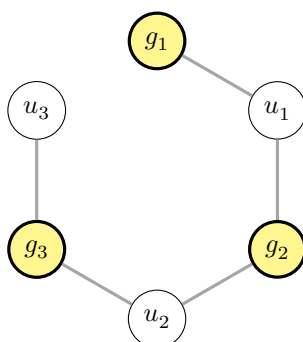
17. Фирмы и гении

а) Шестиугольник

Возьмём цикл

$$g_1 - u_1 - g_2 - u_2 - g_3 - u_3 - g_1$$

и объявим гениями вершины g_1, g_2, g_3 .



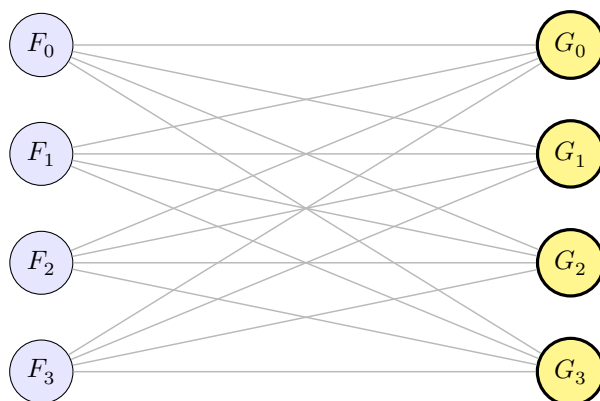
Пусть сначала Петя нанял гения, например g_1 . Вася нанимает противоположную вершину u_2 . Если следующим ходом Петя берёт u_1 , то Вася берёт g_2 ; если Петя берёт u_3 , то Вася берёт g_3 . После этого игра на цикле вынуждена, и второй из оставшихся гениев тоже достаётся Васе.

Если Петя начинает с обычной вершины, например с u_1 , Вася берёт соседнего гения g_1 . Тогда Петя вынужден взять g_2 , после чего Вася берёт u_3 ; далее Петя вынужден взять u_2 , а Вася — g_3 . В обоих случаях у Васи два гения.

б) Четыре знаменитых программиста

Кроме гениев G_0, G_1, G_2, G_3 , возьмём четырёх знаменитых программистов F_0, F_1, F_2, F_3 . Для каждой пары i, j соединим F_i с G_j своим путём длины k_{ij} ; внутренние вершины всех шестнадцати путей различны, других рёбер нет. Длины задаются таблицей

	G_0	G_1	G_2	G_3
F_0	13	12	11	10
F_1	12	11	10	13
F_2	11	10	13	12
F_3	10	13	12	11

(13)


каждый отрезок означает отдельный путь;
его длина указана в таблице

В этой конструкции $8 + \sum_{i,j} (k_{ij} - 1) = 176$ вершин. Для сравнения, общая конструкция пункта в) при $r = 4$ содержит $\binom{15}{3} = 455$ вершин.

Назовём расстоянием фирмы до свободного программиста наименьшее число её будущих ходов, нужное, чтобы до него добраться. После первого хода Пети Вася выбирает первого работника так.

1. Если Петя взял знаменитого, то Вася берёт другого знаменитого, который ближе к трём гениям. Например, после F_0 он берёт F_1 : расстояния до G_0, G_1, G_2 равны у Пети 13, 12, 11, а у Васи 12, 11, 10. Остальные случаи получаются циклическим переименованием.
2. Если Петя взял гения, назовём его G_3 . Вася берёт любого знаменитого. До каждого из G_0, G_1, G_2 Васе не больше 13 ходов, а Пете надо пройти через один из знаменитых, то есть сделать не меньше $10 + 10 = 20$ ходов.
3. Если Петя начал во внутренней вершине пути $F_i G_3$, Вася берёт F_i . Путь через F_i теперь закрыт для Пети, поэтому до каждого из G_0, G_1, G_2 ему надо сначала дойти до G_3 , затем пройти ещё два пути: это не меньше $1 + 10 + 10 = 21$ хода. Васе снова нужно не больше 13.

Во всех случаях обозначим выбранных трёх гениев через G_0, G_1, G_2 . От своего знаменитого Вася идёт к каждому из них по прямому пути из конструкции. Петя не может войти в эти три пути с другого конца, не наняв сначала соответствующего гения.

Стратегия Васи такова. Если Петя продвинулся по пути к одному из трёх выбранных гениев, Вася делает шаг по своему пути к тому же гению. Если ход Пети не приближает его ни к одному из них, Вася делает шаг к тому гению, до которого ему сейчас дальше всего.

После каждого хода Васи его расстояние до каждого из трёх гениев меньше расстояния Пети. Для внутренней вершины пути это проверяется сразу: ход Пети может уменьшить лишь одно из трёх расстояний на единицу, и Вася уменьшает именно своё расстояние до того же гения. Одновременно несколько расстояний могут уменьшиться только при выходе Пети в знаменитую вершину или в G_3 . Но перед таким выходом он прошёл по пути длины не меньше 10; эти ходы Вася распределял между самыми далёкими гениями. В случаях 2 и 3, кроме того, с самого начала имеется запас не меньше $20 - 13 = 7$ ходов. Поэтому прямой проверкой чисел 10, 11, 12, 13 неравенства остаются строгими и в точках ветвления.

Если бы Петя мог нанять один из выбранных гениев, перед его ходом расстояние Пети до него было бы 1, а расстояние Васи — меньше 1; значит, гений уже работал бы у Васи. Противоречие. Поэтому все три гения достанутся Васе.

в) Общая конструкция

Положим $L = r(r - 1)$. Программистами будут все наборы

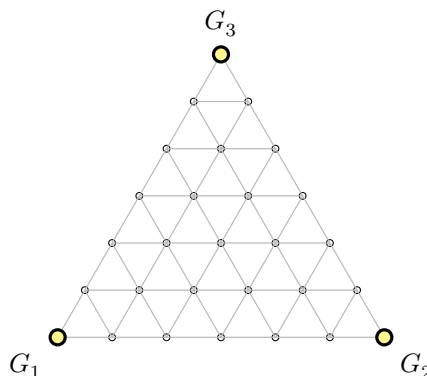
$$x = (x_1, \dots, x_r), \quad x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad x_1 + \dots + x_r = L. \quad (14)$$

Два программиста знакомы, если от одного набора к другому можно перейти, увеличив одну координату на 1 и уменьшив другую на 1. Гениями объявим

$$G_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-я координата}}{L}, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq r.$$

Это конечный граф, и гениев в нём ровно r .

При $r = 3$ конструкция выглядит как треугольная решётка; три угловые вершины — гении.



Пусть первым Петя нанял $A = (A_1, \dots, A_r)$. Какая-то координата, скажем A_k , не меньше $L/r = r-1$. Вася первым нанимает

$$B_i = A_i + 1 \quad (i \neq k), \quad B_k = A_k - (r-1). \quad (15)$$

Все координаты неотрицательны, а их сумма по-прежнему равна L , так что такой программист существует.

Для каждой фирмы и каждого $i \neq k$ следим за наибольшей i -й координатой среди уже нанятых ею программистов. Обозначим эти максимумы через m_i у Пети и M_i у Васи. Сразу после (15)

$$M_i > m_i \quad (i \neq k). \quad (16)$$

Вася всё время сохраняет эти неравенства.

За один ход Петя нанимает соседа одного из своих прежних работников. Поэтому у нового набора увеличилась ровно одна координата, и то на единицу. Значит, из неравенств (16) после хода Пети не более одного может превратиться в равенство, и ни одно не может обратиться в противоположную сторону.

Если возникло $m_i = M_i = d$, у Васи уже есть работник S с $S_i = d$. Число d меньше L : при $d = L$ единственный такой программист — гений G_i , а он не мог бы одновременно принадлежать двум фирмам. Поэтому у S есть положительная координата S_j с $j \neq i$. Вася нанимает соседа

$$S' = S + e_i - e_j. \quad (17)$$

Здесь e_i — единичный вектор в направлении i -й координаты. Ход законен, а S' ещё никем не нанят: его i -я координата равна $d+1$, больше обоих прежних максимумов. После хода снова $M_i > m_i$.

Если ни одного равенства нет, Вася выбирает любую координату $i \neq k$, для которой $M_i < L$, и тем же ходом (17) увеличивает M_i . Такой сосед также не нанят, поскольку его новая координата превосходит максимумы обеих фирм. Таким образом, каждый ход Васи увеличивает на единицу сумму $\sum_{i \neq k} M_i$, пока все эти максимумы не станут равны L . Вася не может застрять раньше; если Петя прекратит набор, Вася просто продолжит один.

Равенство $M_i = L$ означает, что Вася нанял единственный набор с такой координатой, то есть гения G_i . В итоге ему достанутся все гении, кроме, быть может, G_k : не меньше $r-1$ гениев.

Е. Весовые стратегии с одной целью

Весовая лемма I: белые цели

Сначала игра 1 : 1. Живой назовём цель, в которой ещё нет чёрного ребра. Если в ней осталось r свободных рёбер, дадим ей вес 2^{-r} ; неживой цели дадим вес 0. Опасность свободного ребра — сумма весов содержащих его живых целей.

Чингиз красит в чёрный цвет ребро наибольшей опасности D . Потенциал, то есть сумма весов целей, уменьшается на D . Опасность любого оставшегося ребра теперь не больше D . Когда Белла красит одно из них белым, веса содержащих его целей удваиваются, поэтому потенциал возрастает не больше чем на D . Значит, за раунд потенциал не растёт. В конце каждая полностью белая цель имеет вес 1, откуда

$$N_{\mathcal{F}} \leq \left\lfloor \sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} \right\rfloor. \quad (1a)$$

Теперь общий случай $p : q$. Пусть Чингиз за раунд красит p свободных рёбер, затем Белла красит не более q свободных рёбер. Рассмотрим семейство целей $\mathcal{F}$; каждая цель $F \in \mathcal{F}$ — непустой набор рёбер. Цель называется живой, пока ни одно её ребро не стало чёрным. Положим

$$\lambda = (p + 1)^{1/q}.$$

Если в живой цели F осталось $r(F)$ свободных рёбер, дадим ей вес $w(F) = \lambda^{-r(F)}$. Неживая цель имеет вес ноль. Для свободного ребра e его опасность — сумма весов всех живых целей, содержащих e .

Стратегия Чингиза. Каждое из своих p рёбер он выбирает с наибольшей текущей опасностью (после предыдущих чёрных рёбер того же хода).

Пусть опасности выбранных рёбер равны $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$, а после хода Чингиза наибольшая опасность свободного ребра равна d . Тогда $d \leq d_p$, а суммарный вес уменьшился на $d_1 + \dots + d_p \geq pd$.

Одно белое ребро умножает вес каждой содержащей его живой цели на λ . Перед j -м белым ребром опасность любого ребра не превосходит $\lambda^{j-1}d$. Поэтому весь прирост за ход Беллы не превосходит

$$(\lambda - 1)d(1 + \lambda + \dots + \lambda^{q-1}) = (\lambda^q - 1)d = pd.$$

Итак, полный раунд не увеличивает сумму весов. Если последний ход Чингиза неполон, он закрашивает все оставшиеся рёбра и Белла уже не ходит; если неполон ход Беллы, прирост лишь уменьшается. В конце живая цель целиком белая и имеет вес 1. Следовательно,

$$N_{\mathcal{F}} \leq \left\lfloor \sum_{F \in \mathcal{F}} (p + 1)^{-|F|/q} \right\rfloor. \quad (1)$$

При $p = q = 1$ формула (1) превращается в уже доказанную формулу (1a).

18. Белые клики

Для каждой k -вершинной группы целью служат все $\binom{k}{2}$ рёбер между её вершинами. В пункте а) применяем короткую лемму 1 : 1, то есть (1a); в пункте б) — общую формулу (1).

Для пункта в) положим

$$k = \lceil 2q \log_{p+1} n \rceil + 2.$$

Тогда $k - 1 > 2q \log_{p+1} n$, поэтому

$$\binom{n}{k} (p + 1)^{-\binom{k}{2}/q} \leq n^k (p + 1)^{-k(k-1)/(2q)} < 1.$$

Если $k > n$, требуемая оценка тривиальна. Если же $k \leq n$, то по пункту б) белой клики на k вершинах нет. Значит, в обоих случаях

$$\omega(W) \leq k - 1 = \lceil 2q \log_{p+1} n \rceil + 1.$$

Случай $1 : 1$ получается при $p = q = 1$.

19. Белые гамильтоновы циклы

Через $h(W)$ обозначается число гамильтоновых циклов белого графа, причём выбор начальной вершины и направление обхода цикл не меняют.

В K_n имеется $(n-1)!/2$ гамильтоновых циклов: фиксируем начальную вершину, упорядочиваем остальные и делим на два за два направления обхода. Каждый цикл содержит n рёбер. В пункте а) применяем (1а). В пункте б) общая формула (1) даёт

$$h(W) \leq \left\lfloor \frac{(n-1)!}{2(p+1)^{n/q}} \right\rfloor.$$

При $p = q = 1$ знаменатель равен 2^{n+1} . Если выражение под знаком пола меньше единицы, белого гамильтонова цикла нет. Это и есть пункт в).

20. Семейство белых целей

Это в точности весовая лемма I: её цели F и есть члены семейства $\mathcal{F}$. Пункт а) даёт короткая формула (1а), пункт б) — общая формула (1).

Весовая лемма II: почти правильная доля чёрных рёбер

Сначала игра $1 : 1$. Выберем $c > 1$, а затем $s > 1$ настолько близким к 1, чтобы

$$s - 1 \leq 1 - s^{-c}.$$

Цели A дадим вес $a_A s^{w_A - cb_A}$. Опасностью ребра назовём величину

$$(1 - s^{-c}) \sum_{A \ni e} a_A s^{w_A - cb_A}.$$

Чёрное ребро наибольшей опасности D уменьшает потенциал на D , а следующее белое ребро увеличивает его не больше чем на $(s-1)D/(1-s^{-c}) \leq D$. Поэтому потенциал не растёт. Поскольку c можно взять сколь угодно близким к 1, долю $1/(c+1)$ можно сделать сколь угодно близкой снизу к $1/2$.

Теперь общий случай $p : q$. Пусть каждой цели A соответствует набор рёбер. Обозначим через w_A, b_A числа уже белых и чёрных рёбер этого набора. Сначала выберем

$$c > \frac{q}{p}.$$

Затем выберем $s > 1$ настолько близким к 1, чтобы

$$s^q - 1 \leq p(1 - s^{-c}). \quad (2)$$

Такое s существует: при $s \downarrow 1$ левая и правая части, поделённые на $s - 1$, стремятся соответственно к q и p , а $ps > q$.

Дадим цели вес

$$a_A s^{w_A - cb_A}, \quad (3)$$

где $a_A > 0$ — заранее выбранный постоянный коэффициент. После белого ребра вес умножается на s , после чёрного — на s^{-c} . Сумму весов всех целей будем называть **потенциалом**. Опасностью свободного ребра назовём

$$D(e) = (1 - s^{-c}) \sum_{A \ni e} a_A s^{w_A - cb_A}.$$

Чингиз снова последовательно выбирает p рёбер наибольшей опасности. Одно чёрное ребро уменьшает потенциал ровно на свою текущую опасность. Кроме того, чёрные рёбра могут лишь уменьшать опасности. Поэтому, если после хода Чингиза максимальная опасность равна D , каждое из p выбранных рёбер в момент выбора имело опасность не меньше D , и потеря потенциала не меньше pD . За q белых рёбер опасности могут последовательно вырасти не более чем в $1, s, \dots, s^{q-1}$ раз. Поэтому прирост не превосходит

$$\frac{s-1}{1-s^{-c}} D(1+s+\dots+s^{q-1}) = \frac{s^q-1}{1-s^{-c}} D \leq pD.$$

Значит, сумма весов (3) не растёт. Рассуждение о неполном последнем раунде дословно такое же, как в лемме I.

Важно: c можно выбрать сколь угодно близко справа к q/p . Поэтому $1/(c+1)$ можно сделать сколь угодно близким снизу к $p/(p+q)$.

21. Чёрная степень каждой вершины

Цели — звёзды всех вершин: цель v состоит из $n-1$ рёбер, инцидентных v . Берём все коэффициенты $a_v = 1$. Начальный потенциал равен n , поэтому в конце для каждой вершины

$$s^{d_W(v)-cd_B(v)} \leq n.$$

Так как $d_W(v) + d_B(v) = n-1$,

$$d_B(v) \geq \frac{n-1-\log_s n}{c+1}. \quad (4)$$

Разделив (4) на $n-1$, получаем

$$\frac{d_B(v)}{n-1} \geq \frac{1}{c+1} - \frac{\log_s n}{(c+1)(n-1)}.$$

Сначала выбираем c настолько близко к q/p , чтобы

$$\frac{1}{c+1} > \frac{p}{p+q} - \frac{\varepsilon}{2},$$

затем берём достаточно большое n , чтобы второй член справа был меньше $\varepsilon/2$. Получаем пункт б). Для пункта а) достаточно короткого случая $1:1$, доказанного перед общей леммой.

22. Плотность внутри больших множеств

Выберем c, s как в лемме II, причём

$$\frac{1}{c+1} > \frac{p}{p+q} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем постоянную $C = C(p, q, \varepsilon)$ настолько большой, чтобы

$$\frac{8}{(c+1)C \log s} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и положим

$$m = \lceil C \log n \rceil.$$

Для каждого множества U из $u \geq m$ вершин берём цель из всех рёбер внутри U и коэффициент

$$a_U = n^{-2u}.$$

Начальная сумма весов меньше единицы:

$$\sum_{u=m}^n \binom{n}{u} n^{-2u} \leq \sum_{u=m}^{\infty} n^{-u} < 1.$$

Поэтому в конце вес каждой отдельной цели меньше единицы. Положив $M = \binom{u}{2}$, получаем

$$n^{-2u} s^{M-(c+1)e_B(U)} < 1,$$

откуда

$$\frac{e_B(U)}{M} > \frac{1}{c+1} - \frac{2u \log_s n}{(c+1)M}. \quad (5)$$

Второй член справа равен $4 \log_s n / ((c+1)(u-1))$. При достаточно больших n из $u \geq t$ следует $u-1 \geq (C/2) \log n$, поэтому этот член не превосходит

$$\frac{8}{(c+1)C \log s} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь (5) даёт требуемую плотность в пункте б). В пункте а) то же вычисление проводится с короткой леммой 1 : 1.

23. Плотность между большими множествами

Выберем c, s как в лемме II так, чтобы

$$\frac{1}{c+1} > \frac{p}{p+q} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем выберем постоянную $C = C(p, q, \varepsilon)$ настолько большой, чтобы

$$\frac{4}{(c+1)C \log s} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и положим $m = \lceil C \log n \rceil$.

Для каждой упорядоченной пары непересекающихся множеств (X, Y) , где $|X| = x$, $|Y| = y$ и $x, y \geq m$, целью служат все xy рёбер между ними, а коэффициент равен

$$a_{X,Y} = n^{-2(x+y)}.$$

Число пар данных размеров не превосходит n^{x+y} , поэтому начальный потенциал меньше

$$\sum_{x,y \geq m} n^{-(x+y)} < 1.$$

Как и выше,

$$n^{-2(x+y)} s^{xy-(c+1)e_B(X,Y)} < 1,$$

и значит

$$\frac{e_B(X,Y)}{xy} > \frac{1}{c+1} - \frac{2 \log_s n}{c+1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right). \quad (6)$$

Если $x, y \geq m$, последний член не превосходит

$$\frac{4}{(c+1)C \log s} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Формула (6) завершает доказательство пункта б). Для пункта а) берём специализацию 1 : 1, сформулированную перед общей леммой.

F. Весовые стратегии с двумя целями

Весовая лемма III: несколько типов целей и q белых рёбер

Сначала игра $1 : 1$. Если чёрное ребро умножает вес цели типа i на α_i , а белое — на β_i , достаточно условия

$$\beta_i - 1 \leq 1 - \alpha_i.$$

Действительно, чёрный ход максимальной опасности уменьшает потенциал хотя бы на D , а следующий белый увеличивает его не больше чем на D .

Теперь общий случай. В каждом раунде Чингиз красит p рёбер, затем Белла — q рёбер. Каждая цель отнесена к некоторому типу i . Если ребро цели становится чёрным, её вес умножается на $\alpha_i \in [0, 1)$; если белым — на $\beta_i > 1$. Предположим, что для каждого типа

$$\beta_i^q - 1 \leq p(1 - \alpha_i). \quad (7)$$

Удобно держать в уме следующую таблицу.

ребро цели стало чёрным	ребро цели стало белым	условие баланса
$\times \alpha_i$	$\times \beta_i$	$\beta_i^q - 1 \leq p(1 - \alpha_i)$

Потенциалом назовём сумму весов всех целей, а опасностью свободного ребра —

$$D(e) = \sum_{i, A \ni e} (1 - \alpha_i) w_A.$$

Стратегия Чингиза. Он p раз подряд выбирает свободное ребро наибольшей текущей опасности. Чёрный ход уменьшает потенциал ровно на опасность выбранного ребра и может лишь уменьшить опасности остальных рёбер. Пусть после всех p выборов наибольшая опасность свободного ребра равна D . Каждое выбранное ребро в момент выбора имело опасность не меньше D , поэтому потенциал уменьшился не менее чем на pD .

Оценим весь следующий ход Беллы сразу. Пусть цель A типа i содержала t из выбранных ею рёбер, где $0 \leq t \leq q$, а её вес перед ходом Беллы равнялся w_A . Её вклад в прирост равен $w_A(\beta_i^t - 1)$. Функция $x \mapsto \beta_i^x - 1$ выпукла и равна нулю при $x = 0$, поэтому

$$\beta_i^t - 1 \leq \frac{t}{q}(\beta_i^q - 1) \leq \frac{pt}{q}(1 - \alpha_i).$$

Просуммируем это неравенство по всем целям и затем по белым рёбрам, которые они содержат. Опасность каждого из этих рёбер, вычисленная до хода Беллы, не превосходит D . Поэтому весь прирост потенциала не больше

$$\frac{p}{q} \sum_{e \text{ белого хода}} D(e) \leq pD.$$

Итак, полный раунд не увеличивает потенциал. Если последний ход Беллы неполон, оценка только усиливается; если неполон ход Чингиза, он забирает все оставшиеся рёбра и Белла уже не ходит. Лемма доказана. При $q = 1$ получается прежний принцип: $\beta_i - 1 \leq p(1 - \alpha_i)$.

24. Белая клика и чёрные степени

Проведём одну выкладку для игры $p : 1$. При $p = 1$ в ней используется короткий случай $1 : 1$ леммы III, а при произвольном p — её общий случай.

Положим $a = p + 1$ и

$$t = \lceil 2 \log_a n \rceil, \quad k = t + 2.$$

Первый вид целей — все k -вершинные множества. Живая цель с r свободными рёбрами имеет вес a^{-r} . Для неё $\alpha = 0, \beta = a$, и при $q = 1$ в (7) стоит равенство.

Второй вид целей — звёзды вершин с весами

$$n^{-2} s^{d_W(v) - c d_B(v)},$$

где $c > 1/p$ выбрано сколь угодно близко к $1/p$, а $s > 1$ настолько близко к единице, что

$$s - 1 \leq p(1 - s^{-c}).$$

Для этих целей (7) при $q = 1$ также выполнено.

Начальный вес кликовых целей не превосходит

$$n^k a^{-k(k-1)/2} \leq a^{-k/2} \leq \frac{1}{an}.$$

Здесь мы использовали $k - 1 \geq 2 \log_a n + 1$, откуда $n \leq a^{(k-2)/2}$.

Начальный вес звёзд равен $1/n$. Поэтому весь начальный потенциал не больше $(1 + 1/a)/n < 1$. По лемме III он не растёт. Полностью белая k -клика имела бы вес 1, что невозможно. Следовательно,

$$\omega(W) \leq k - 1 = \lceil 2 \log_{p+1} n \rceil + 1.$$

Для каждой вершины в конце

$$n^{-2} s^{n-1-(c+1)d_B(v)} \leq \frac{1 + 1/a}{n},$$

откуда

$$d_B(v) \geq \frac{n - 1 - \log_s((1 + 1/a)n)}{c + 1}.$$

Выберем c достаточно близко справа к $1/p$, чтобы

$$\frac{1}{c + 1} > \frac{p}{p + 1} - \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем выберем n настолько большим, чтобы

$$\frac{\log_s((1 + 1/a)n)}{(c + 1)(n - 1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для каждой вершины

$$d_B(v) \geq \left(\frac{p}{p + 1} - \varepsilon \right) (n - 1).$$

Пункт а) — случай $p = 1$.

25. Две оценки в игре Эрдёша

а)

Выберем

$$\frac{1}{2} < c < \frac{1}{\beta} - 1.$$

Такой выбор возможен именно потому, что $\beta < 2/3$. Затем выберем $s > 1$ достаточно близко к единице, чтобы

$$s - 1 \leq 2(1 - s^{-c}). \quad (8)$$

Положим

$$\Delta = \frac{1}{c + 1} - \beta > 0.$$

Выберем постоянную $C = C(\beta)$ настолько большой, чтобы

$$\frac{8}{(c + 1)C \log s} < \Delta.$$

Положим

$$k = \lceil 2 \log_3 n \rceil + 2, \quad m = \lceil C \log n \rceil.$$

Сложим два потенциала:

1. для каждой живой k -кликки вес 3^{-r} , где r — число свободных рёбер в ней;
2. для каждого U , $|U| \geq m$, вес $n^{-2|U|} s^{e_W(U) - c e_B(U)}$.

Белла делает первый ход до начала обычных раундов Чингиза. Этот ход умножает первую часть не более чем на 3, вторую не более чем на s . До этого хода первая часть не превосходит

$$\binom{n}{k} 3^{-\binom{k}{2}} \leq n^k 3^{-k(k-1)/2} \leq \frac{1}{3n}.$$

Последнее неравенство проверяется так же, как соответствующая оценка в задаче 24. Вторая часть до первого хода не превосходит

$$\sum_{u=m}^n \binom{n}{u} n^{-2u} \leq \sum_{u=m}^{\infty} n^{-u} = \frac{n^{1-m}}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}.$$

Поэтому сразу после первого хода Беллы общий потенциал меньше

$$\frac{1}{n} + \frac{s}{n-1} < 1$$

при всех достаточно больших n .

Теперь ходит Чингиз. Для кликовых целей $(\alpha, \beta_i) = (0, 3)$, а для целей $U - (\alpha, \beta_i) = (s^{-c}, s)$. Условия леммы III при $p = 2$ следуют из равенства $3 - 1 = 2(1 - 0)$ и (8); здесь $q = 1$. Значит, далее Чингиз сохраняет общий потенциал меньше единицы.

Отсюда нет белой k -кликки, то есть

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_3 n \rceil + 1.$$

Кроме того, для любого U , $u = |U| \geq m$,

$$n^{-2u} s^{\binom{u}{2} - (c+1)e_B(U)} < 1.$$

Следовательно,

$$\frac{e_B(U)}{\binom{u}{2}} > \frac{1}{c+1} - \frac{4 \log_s n}{(c+1)(u-1)}.$$

По определению Δ первое слагаемое равно $\beta + \Delta$. При достаточно больших n из $u \geq m$ следует $u-1 \geq (C/2) \log n$, поэтому второй член не превосходит

$$\frac{8}{(c+1)C \log s} < \Delta.$$

Следовательно,

$$e_B(U) > \beta \binom{u}{2},$$

и тем более $e_B(U) \geq \beta \binom{u}{2}$.

б)

Выберем новое число

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \beta_0 < \frac{2}{3}.$$

Это разрешено: заключение пункта б) не зависит от числа β , зафиксированного перед пунктом а). Применим пункт а) именно к β_0 и возьмём соответствующую постоянную $C = C(\beta_0)$.

Пусть

$$m = \lceil C \log n \rceil.$$

По пункту а) каждое множество из не менее m вершин имеет в B плотность не меньше β_0 . Начнём с $U_0 = V$. Пока $|U_i| \geq m$, средняя степень в $B[U_i]$ не меньше

$$\frac{2e_B(U_i)}{|U_i|} \geq \beta_0(|U_i| - 1).$$

Поэтому в $B[U_i]$ есть вершина v_i степени не меньше $\beta_0(|U_i| - 1)$. Положим U_{i+1} равным множеству её соседей внутри U_i . Все выбранные вершины попарно смежны.

Если $r_i = |U_i|$ и $a = \beta_0/(1 - \beta_0)$, то

$$r_{i+1} \geq \beta_0(r_i - 1), \quad r_{i+1} + a \geq \beta_0(r_i + a).$$

По индукции

$$r_i + a \geq \beta_0^i(n + a).$$

Положим

$$t = \left\lfloor \frac{\log((n + a)/(m + a))}{\log(1/\beta_0)} \right\rfloor.$$

Из определения t имеем $\beta_0^t(n + a) \geq m + a$. Кроме того, при $i \leq t$ выполнено $\beta_0^i \geq \beta_0^t$. Поэтому

$$\beta_0^i(n + a) \geq \beta_0^t(n + a) \geq m + a.$$

Следовательно, $r_i \geq m$, пока требуется сделать первые t выборов. Процесс действительно строит клику не менее чем из t вершин, причём

$$\omega(B) \geq t \geq \frac{\log((n + a)/(m + a))}{\log(1/\beta_0)} - 1 = \frac{\log n - \log \log n - O(1)}{\log(1/\beta_0)}. \quad (9)$$

Условие $\beta_0 > 1/\sqrt{3}$ означает

$$\log(1/\beta_0) < \frac{1}{2} \log 3.$$

Коэффициент при $\log n$ в (9) поэтому строго больше $2/\log 3$, тогда как

$$\omega(W) \leq \frac{2 \log n}{\log 3} + O(1).$$

Разность линейных по $\log n$ главных членов сильнее потери $O(\log \log n)$. Значит, при всех достаточно больших n имеем $\omega(B) > \omega(W)$.

26. Игра $p : q$ и золотое сечение

Положим $A = p + 1$. Из второго условия задачи следует

$$\frac{1}{\log(1 + q/p)} > \frac{2q}{\log A}. \quad (10)$$

По непрерывности можно выбрать число ρ немного меньше $p/(p + q)$ так, чтобы всё ещё выполнялось

$$\frac{1}{\log(1/\rho)} > \frac{2q}{\log A}. \quad (11)$$

Именно ρ будет гарантированной плотностью чёрного графа на больших множествах.

Так как $\rho < p/(p + q)$, имеем $q/p < 1/\rho - 1$. Выберем

$$\frac{q}{p} < c < \frac{1}{\rho} - 1$$

и затем выберем $s > 1$ настолько близким к единице, чтобы

$$s^q - 1 \leq p(1 - s^{-c}). \quad (12)$$

Такое s существует: после деления на $s - 1$ левая и правая части при $s \downarrow 1$ стремятся соответственно к q и $pc > q$.

Положим

$$\Delta = \frac{1}{c+1} - \rho > 0$$

и выберем постоянную C настолько большой, чтобы

$$\frac{8}{(c+1)C \log s} < \Delta.$$

Далее положим

$$k = \lceil 2q \log_A n \rceil + 2, \quad m = \lceil C \log n \rceil.$$

Будем одновременно следить за двумя видами целей.

1. Для каждого k -вершинного множества берём все рёбра внутри него. Пока цель жива, то есть не содержит чёрного ребра, её вес равен $A^{-r/q}$, где r — число свободных рёбер цели. Чёрное ребро умножает вес на 0, белое — на $A^{1/q}$.
2. Для каждого U , $|U| \geq m$, берём вес

$$n^{-2|U|} s^{e_W(U) - ce_B(U)}.$$

Здесь чёрное ребро внутри U умножает вес на s^{-c} , а белое — на s .

Для целей первого типа условие (7) обращается в равенство

$$(A^{1/q})^q - 1 = A - 1 = p,$$

а для второго типа оно совпадает с (12). Поэтому после каждого хода Чингиза из p рёбер и следующего хода Беллы из q рёбер применима весовая лемма III.

Остаётся учесть, что в условии задачи первой ходит Белла. До её первого хода сумма весов целей первого типа не превосходит

$$\binom{n}{k} A^{-\binom{k}{2}/q} \leq n^k A^{-k(k-1)/(2q)} \leq A^{-k/(2q)} \leq \frac{A^{-1/q}}{n}.$$

За первые q белых рёбер эта сумма увеличится не более чем в A раз. Начальная сумма весов целей второго типа не превосходит

$$\sum_{u=m}^n \binom{n}{u} n^{-2u} \leq \sum_{u=m}^{\infty} n^{-u} \leq \frac{1}{n-1},$$

а первый ход Беллы увеличивает её не более чем в s^q раз. Значит, сразу после первых q белых рёбер общий потенциал не больше

$$\frac{A^{1-1/q}}{n} + \frac{s^q}{n-1} < 1$$

при всех достаточно больших n . Теперь ходит Чингиз, и по лемме III общий потенциал до конца игры остаётся меньше единицы.

Полностью белая k -клика имела бы вес 1, поэтому

$$\omega(W) \leq k - 1 = \lceil 2q \log_{p+1} n \rceil + 1. \quad (13)$$

С другой стороны, для любого U размера $u \geq m$ вес второй цели меньше единицы. Следовательно,

$$n^{-2u} s^{\binom{u}{2} - (c+1)e_B(U)} < 1,$$

откуда

$$\frac{e_B(U)}{\binom{u}{2}} > \frac{1}{c+1} - \frac{4 \log_s n}{(c+1)(u-1)}.$$

При достаточно больших n из $u \geq m$ следует $u - 1 \geq (C/2) \log n$. По выбору C последний член меньше Δ , так что

$$e_B(U) > \rho \binom{u}{2}. \quad (14)$$

Теперь повторим жадное построение из пункта 25б. Начиная с $U_0 = V$, пока $|U_i| \geq m$, выбираем в $B[U_i]$ вершину степени не меньше $\rho(|U_i| - 1)$ и заменяем U_i множеством её соседей. Выбранные вершины образуют чёрную клику. Если $r_i = |U_i|$ и $a_0 = \rho/(1 - \rho)$, то

$$r_{i+1} + a_0 \geq \rho(r_i + a_0).$$

Поэтому процесс делает не менее

$$\left\lfloor \frac{\log((n + a_0)/(m + a_0))}{\log(1/\rho)} \right\rfloor$$

выборов, и

$$\omega(B) \geq \frac{\log n - \log \log n - O(1)}{\log(1/\rho)}. \quad (15)$$

По (11) коэффициент при $\log n$ в (15) строго больше $2q/\log(p+1)$, тогда как из (13)

$$\omega(W) \leq \frac{2q}{\log(p+1)} \log n + O(1).$$

Строгое превосходство главных коэффициентов сильнее потери $O(\log \log n)$. Следовательно, при всех достаточно больших n

$$\omega(B) > \omega(W).$$

Замечание о золотом сечении. Первое условие задачи формально следует из второго. Действительно,

$$(1 + q/p)^{2q} \geq (1 + 1/p)^2,$$

поэтому $p + 1 > (1 + 1/p)^2$. После умножения на p^2 это равносильно

$$(p + 1)(p^2 - p - 1) > 0,$$

то есть $p > \varphi$. Золотое сечение возникает как точная граница при $q = 1$; для доказательства достаточно второго, более сильного условия.

27*. Точная гипотеза Эрдёша

Условие. Белла и Чингиз играют на рёбрах K_n . Белла ходит первой и каждый раз красит одно свободное ребро белым; после каждого её хода Чингиз красит два свободных ребра чёрным. После окраски всех рёбер Чингиз выигрывает, если $\omega(B) > \omega(W)$, иначе выигрывает Белла.

Докажите или опровергните: Чингиз имеет выигрышную стратегию для каждого $n \geq 4$.

Открытый пункт. По условию проекта решение здесь не приводится.

Дополнение 2: динамика и турниры

28. Камень, ножницы, бумага на графе

Автор расширенной постановки: Марк Пименов, 2026. Исходный пункт о дереве: олимпиада «Высшая проба», заключительный этап 2024 года, 11 класс, задача 11.5.

Будем нумеровать предметы по модулю 3 так, что A_{i+1} побеждает A_i .

а) Дерево

Идея. На дереве цвета можно однозначно «поднять» из остатков по модулю 3 в целые высоты, соседние высоты которых отличаются не более чем на 1. Тогда за одну минуту каждая вершина просто принимает наибольшую высоту в своей замкнутой окрестности.

Выберем корень дерева. В корне возьмём любой целый представитель его цвета. Далее, двигаясь от корня, каждой вершине v сопоставим целое число $h(v)$, сравнимое с номером её предмета по модулю 3, так, чтобы для каждого ребра uv

$$h(v) - h(u) \in \{-1, 0, 1\}.$$

На дереве это можно сделать однозначно после выбора h в корне: циклов, которые могли бы дать противоречивые требования, нет.

Если сосед имеет высоту $h(v) + 1$, в нём находится ровно тот предмет, который побеждает предмет в v , и высота v увеличивается на 1. Если такого соседа нет, высота не меняется. Поэтому после одной минуты

$$h_{t+1}(v) = \max(\{h_t(v)\} \cup \{h_t(u) : u \sim v\}). \quad (1)$$

Новые соседние высоты снова отличаются не более чем на 1, так что это действительно подъём новой расстановки цветов.

Повторяя (1), получаем

$$h_t(v) = \max\{h_0(u) : d(u, v) \leq t\}. \quad (2)$$

Пусть $M = \max h_0$. Через конечное число минут шар в правой части (2) содержит вершину высоты M , поэтому все высоты становятся равными M . После этого все предметы одинаковы и изменения прекращаются.

б) Точное время

Ответ. Наибольшее возможное число минут равно

$$\boxed{n - 1}.$$

Формула (2) даёт и точный ответ для каждой начальной расстановки. Если

$$Z = \{u : h_0(u) = M\},$$

то процесс стабилизируется через

$$T = \max_v d(v, Z)$$

минут. В дереве на n вершинах $T \leq n - 1$.

Равенство достигается на пути $v_1 v_2 \dots v_n$: положим

$$h_0(v_1) = \dots = h_0(v_{n-1}) = 0, \quad h_0(v_n) = 1.$$

Иными словами, в v_n лежит предмет A_1 , а во всех остальных вершинах — A_0 . Граница между двумя предметами сдвигается на одно ребро за минуту, и вершина v_1 изменится лишь на $(n-1)$ -й минуте.

в) Граф с циклом

Идея. У расстановки на цикле есть целое число оборотов, которое не меняется со временем. У неподвижной расстановки оно равно нулю.

Выберем простой цикл

$$C = v_0 v_1 \dots v_{\ell-1} v_0.$$

Для ориентированного ребра $v_i v_{i+1}$ обозначим через $d_i(t) \in \{-1, 0, 1\}$ единственное число, сравнимое по модулю 3 с разностью номеров предметов в v_{i+1} и v_i . Пусть $\varepsilon_i(t)$ равно 1, если предмет в v_i меняется на этой минуте, и 0 иначе.

Тогда

$$d_i(t+1) = d_i(t) + \varepsilon_{i+1}(t) - \varepsilon_i(t). \quad (3)$$

Здесь не требуется приводить правую часть по модулю 3. Например, если $d_i = 1$, то v_i видит побеждающий предмет и обязательно меняется, так что правая часть равна 0 или 1. Случай $d_i = -1$ симметричен. Суммируя (3) по циклу, получаем инвариант

$$D(C) = \sum_{i=0}^{\ell-1} d_i(t).$$

Если $\ell = 3$, расположим по циклу предметы A_0, A_1, A_2 . Если $\ell \geq 4$, расположим в v_0, v_1, v_2, v_3 предметы

$$A_0, A_1, A_2, A_0,$$

а в остальных вершинах цикла — A_0 . Вне цикла предметы можно расставить произвольно. В обоих случаях три последовательные разности равны 1, остальные — 0, поэтому $D(C) = 3$.

Если изменения прекратились, концы каждого ребра имеют одинаковые предметы: при двух разных предметах один из них побеждает другой, и проигравший должен измениться. Значит, на связном графе неподвижная расстановка одноцветна и $D(C) = 0$. Инвариант даёт противоречие. Следовательно, изменения происходят бесконечно долго.

г) Нечётное число предметов

Пусть $m = 2r + 1$. На дереве снова поднимем номер предмета в целую высоту, но теперь для каждого ребра потребуем

$$h(v) - h(u) \in \{-r, -r+1, \dots, r\}.$$

Такой представитель разности по модулю m единственен. Вершина меняется ровно тогда, когда у неё есть сосед большей высоты; при изменении её высота увеличивается на 1.

После одновременного изменения разности на рёбрах остаются в том же промежутке. Действительно, если на ребре один конец выше другого, нижний конец обязательно увеличивается; поэтому разность не может выйти через r или $-r$. Глобальный максимум M никогда не меняется, а все высоты не убывают и не превосходят M . Следовательно, целая величина

$$\Phi = \sum_v (M - h(v))$$

при каждой минуте с изменениями строго уменьшается. Значит, на дереве процесс за конечное время остановится.

Для графа с циклом определим на его рёбрах

$$d_i(t) \in \{-r, -r+1, \dots, r\}$$

точно так же, как выше. Равенство (3) остаётся верным как равенство целых чисел, поэтому сумма $D(C) = \sum d_i$ неизменна. Зададим на трёх последовательных рёбрах цикла разности

$$r, \quad r, \quad 1,$$

а на остальных — 0. Их сумма равна $2r + 1 = m$, поэтому эти разности задают согласованную расстановку предметов на цикле. Для неё $D(C) = m \neq 0$, тогда как для неподвижной расстановки $D(C) = 0$. Следовательно, и при новом правиле на любом графе с циклом существует бесконечный процесс.

29. Две лиги

Автор: Марк Пименов, 2026.

Для команды v обозначим через

$$s(v) = \#\{\text{её победы}\} - \#\{\text{её поражения}\}$$

её итоговый баланс во всём турнире. Сумма всех балансов равна нулю: каждый матч даёт победителю +1, а проигравшему −1.

а) Не менее половины

Пусть после распределения команды Первой и Второй лиг образовали множества A и B . В сумме $\sum_{v \in A} s(v)$ матчи между двумя командами Первой лиги взаимно сокращаются: один их конец даёт $+1$, другой -1 . Остаются только межлиговые матчи. Поэтому

$$\sum_{v \in A} s(v) = \#\{\text{межлиговые победы Первой лиги}\} - \#\{\text{межлиговые победы Второй лиги}\}. \quad (4)$$

Стратегия. На каждом ходу Первая лига выбирает среди оставшихся команд команду с наибольшим балансом $s(v)$.

Объединим каждый ход Первой лиги со следующим ходом Второй. Если в такой паре ходов выбраны a_i и b_i , то

$$s(a_i) \geq s(b_i),$$

поскольку b_i ещё оставалась свободной в момент выбора a_i . Суммируя по всем парам ходов, получаем

$$\sum_{a \in A} s(a) \geq \sum_{b \in B} s(b).$$

Общая сумма равна нулю, значит, левая часть неотрицательна. По (4) Первая лига выиграла не меньше половины межлиговых матчей.

б) Когда можно гарантировать строгое большинство

Ответ. Ровно при

$$n \equiv 2 \pmod{4}.$$

Пусть $n = 2m$. Между лигами будет ровно m^2 матчей. Если m нечётно, это число нечётно, поэтому ровно половины быть не может. Стратегия пункта а) гарантирует не меньше половины, а значит, гарантирует строго больше. Это случай $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Осталось построить препятствие при $n \equiv 0 \pmod{4}$, то есть при чётном m . Возьмём правильный турнир на $2m + 1$ командах: занумеруем их по кругу, и пусть команда i побеждает следующие m команд. Каждая команда имеет ровно m побед. Удалим одну команду. Среди оставшихся $2m$ команд ровно m имеют баланс $+1$, а остальные m — баланс -1 .

Поскольку m чётно, заранее разобьём команды с балансом $+1$ на пары и отдельно разобьём на пары команды с балансом -1 . Вторая лига отвечает на каждый ход Первой выбором партнёра только что выбранной команды. Тогда из каждой пары одна команда попадает в Первую лигу, а другая — во Вторую, и обе лиги получают одинаковую сумму балансов, равную нулю. По (4) число их межлиговых побед одинаково. Следовательно, Первая лига не может гарантировать строгое большинство.