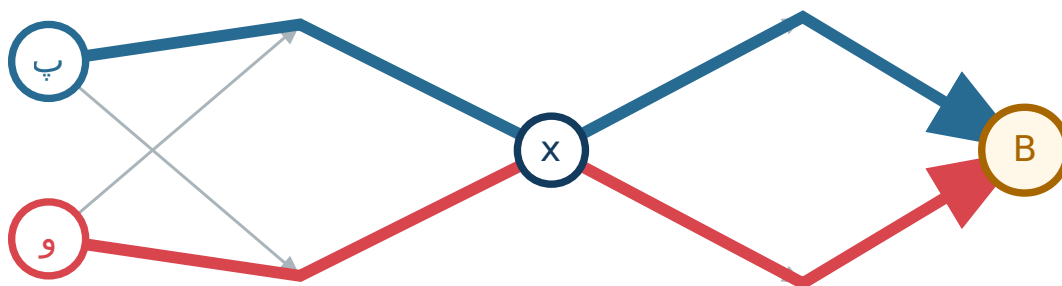


بازی‌ها روی گراف‌های در حال تغییر

راه‌حل‌ها و بخش‌های باز

پنج بخش ستاره‌دار عمداً بدون راه‌حل مانده‌اند



$$S = |P| + |Q| + \epsilon$$

بر پایه نسخه معیار ۲۱ پروژه و دو پیوست آن تنظیم شده است.

همه لم‌های به‌کاررفته در متن اثبات شده‌اند و ارجاع‌ها فقط به بخش‌های پیشین مجموعه‌اند. نمودارها با TikZ بازطراحی شده‌اند و شکل گام‌به‌گام راهبرد در مسئله ۶ نیز کاملاً فارسی است.

۱۱ اوت ۲۰۲۶

راهنمای خواندن این مجموعه

در اینجا فقط درستی پاسخ مهم نیست؛ ایده بازی، مانند راهبرد زوج‌سازی، ناورداد، وزن یا تقارن، نیز برجسته می‌شود. به همین دلیل اثبات‌های بلند به لم‌های کوتاه شکسته شده‌اند و در نقاط دشوار جداگانه توضیح داده می‌شود چرا حرکت بعدی را انجام می‌دهیم. بخش‌های ۱۱، ۱۱ج، ۱۱ح، ۱۳، ۱۴ج و مسئله ۲۷ ستاره‌دار و عمداً بی‌راه‌حل‌اند؛ صورت کامل آن‌ها حفظ شده است. بقیه بخش‌ها بدون استفاده از قضیه‌های بیرونی به عنوان «جعبه سیاه» ثابت شده‌اند.

شماره‌گذاری. مسائل ۱ تا ۱۷ مطابق نسخه معیار ۲۱ و مسائل ۱۸ تا ۲۷ مطابق پیوست ۱، ویرایش ۶ هستند. دو مسئله برگه جداگانه «سنگ، کاغذ، قیچی» و «دو لیگ» شماره‌های ۲۸ و ۲۹ گرفته‌اند. پس شماره‌های ۲۵ تا ۲۷ همیشه به خط وزنی بازی اردوش مربوط‌اند.

نمادها و اصطلاحات. مگر آن‌که خلافش گفته شود، گراف‌ها متناهی و ساده‌اند. $\omega(G)$ و $\alpha(G)$ به ترتیب اندازه بزرگ‌ترین کلیک و بزرگ‌ترین مجموعه مستقل G هستند. $dG(v)$ درجه رأس، $\delta(G)$ کمترین درجه، و $eG(U)$ تعداد یال‌هایی است که هر دو سرشان در U است. K_n گراف کامل n -رأسی و لگاریتم بدون پایه، لگاریتم طبیعی است.

واژه‌نامه کوتاه. واژه‌های اصلی در سراسر متن به صورت یک‌دست چنین آمده‌اند: «تطابق»، «تطابق کامل»، «مجموعه مستقل»، «ناورداد»، «پتانسیل»، «سرچشمه»، «چاهک»، «همبند» و «دوهمبند».

وابستگی‌ها یک‌طرفه‌اند: ۷الف به ۷ب و سپس ۸الف می‌رسد، ولی ۸ب مستقل است؛ ۹الف مستقل است و لم‌های پس از آن به ۹ب و ۹پ، و آن‌ها به ۹ت تا ۹ج می‌رسند؛ در هر یک از لم‌های وزنی I تا III ابتدا حالت 1:1 و سپس حالت عمومی ثابت می‌شود و این لم‌ها در مسائل ۱۸ تا ۲۶ به کار می‌روند. پس ارجاع دوری نداریم.

فهرست مطالب

4.	رأس‌های بازدیدنشده و یال‌های تازه
4	۱. بازی بدون بازگشت
5	۲. سکه‌ها روی گراف
8	۳. افزودن یال‌ها تا نخستین دور فرد
10	۴. افزودن یال‌ها تا همبندی
11.	جهت‌دهی‌های پویا
11	۵. مهره و برگرداندن جهت یال‌ها
11	۶. دو مهره و برگرداندن پیکان‌ها
13	۷. گراف‌های ۲-تاب‌هیده
14	۸. شبکه‌های مربعی
16	۹. بازی بولوباش-سابو
21.	رنگ‌کردن یال‌ها و بازی‌های کلیکی
21	۱۰. نخستین مثلث تک‌رنگ
22	۱۱. بازی متقارن اردوش
25	۱۲. بازی نامتقارن 2 : 1
25	۱۳. بلا و چنگیز روی Kn
29	۱۴. کلیک سفید روی تخته نامتناهی
33	۱۵. رابطه بازی‌های 1 : 1 و 2 : 1
35.	گراف‌هایی برای بازی‌ها
35	۱۶. تخته دوهمیند برای قرمز
36	۱۷. شرکت‌ها و نابغه‌ها
39.	راهبردهای وزنی با یک هدف
39	۱۸. کلیک‌های سفید
40	۱۹. دورهای همیل‌تونی سفید
40	۲۰. خانواده‌ای از هدف‌های سفید
40	۲۱. درجه سیاه هر رأس
41	۲۲. چگالی درون مجموعه‌های بزرگ
41	۲۳. چگالی میان دو مجموعه بزرگ
42.	راهبردهای وزنی با دو هدف
42	۲۴. کلیک سفید و درجه‌های سیاه
43	۲۵. دو کران در بازی اردوش
44	۲۶. بازی p : q و نسبت طلایی
46	۲۷. حدس دقیق اردوش
47.	پیوست ۲: پویایی و مسابقات
47	۲۸. سنگ، کاغذ، قیچی روی گراف
48	۲۹. دو لیگ

A. رأس‌های بازدیدنشده و یال‌های تازه

در سراسر این بخش، همه گراف‌ها متناهی و ساده‌اند. در مسئله سکه‌ها نیز راهبردی را برنده می‌نامیم که دست‌کم تساوی را تضمین کند، زیرا در آن مسئله هدف دقیقاً «نباختن» است.

۱. بازی بدون بازگشت

الف) معیار: تطابق کامل

پاسخ. واسیا دقیقاً روی گراف‌هایی برنده می‌شود که تطابق کامل دارند.

فرض کنید گراف تطابق کامل M دارد. پس از آن که پتیا رأس آغازین s را برگزید، واسیا از s به همتای آن در M می‌رود. از آن پس، هرگاه پتیا به رأس v برسد، واسیا از v به رأس همتای آن، یعنی $M(v)$ ، می‌رود. این حرکت همیشه مجاز است: رأس‌های بازدیدشده قبلی به زوج‌هایی از M تقسیم می‌شوند که هر دو رأسشان بازدید شده است؛ پس اگر $M(v)$ قبلاً دیده شده بود، v هم باید دیده شده باشد، که تناقض است. بنابراین واسیا پس از هر حرکت پتیا پاسخی دارد. بازی متناهی است، پس نخستین بازیکنی که حرکتی ندارد پتیا خواهد بود.

اکنون فرض کنید تطابق کامل وجود ندارد. تطابق M با بیشترین تعداد یال بردارید و یک رأس پوشش نیافته آن، s ، را رأس آغازین قرار دهید. پتیا هر بار که واسیا به رأس v می‌رسد، با حرکت روی یال $vM(v)$ پاسخ می‌دهد.

باید بررسی کنیم که این پاسخ همیشه ممکن است. مسیر پیموده‌شده از رأس پوشش نیافته s آغاز می‌شود؛ حرکت‌های پتیا روی یال‌های M و حرکت‌های واسیا بیرون از M هستند، زیرا یال هم‌تا به رأس قبلی و بازدیدشده برمی‌گردد. اگر v نیز با M پوشیده نشده بود، یال‌های سراسر مسیر یکی درمیان بیرون از M و درون M بودند. با حذف یال‌های مسیر که در M هستند و افزودن بقیه یال‌های مسیر، تطابق را یک یال بزرگ‌تر می‌کردیم؛ این با بیشینه‌بودن M ناسازگار است. پس $M(v)$ وجود دارد. این رأس هنوز بازدید نشده است، زیرا اگر $M(v)$ پیش‌تر دیده شده بود، بلافاصله پس از نخستین دیدار آن، v نیز دیده می‌شد. بنابراین پتیا همیشه پاسخ دارد و واسیا نخستین کسی است که گیر می‌کند.

اگر تعداد رأس‌ها فرد باشد، تطابق کامل ممکن نیست؛ پس پتیا برنده است.

ب) هر بازیکن یک‌بار می‌تواند نوبت را رد کند

پاسخ تغییر نمی‌کند. بازیکنی که راهبرد بخش الف را دارد، تا وقتی حریف نوبتش را رد نکرده همان راهبرد را ادامه می‌دهد؛ سپس فوراً او هم نوبتش را رد می‌کند. جای مهره و مجموعه رأس‌های بازدیدشده تغییری نکرده و پس از دو رد پیاپی، نوبت دوباره به همان بازیکنی رسیده است که پیش از آن باید بازی می‌کرد؛ پس راهبرد قبلی ادامه می‌یابد. اگر حریف فقط به این دلیل نوبتش را رد کرده باشد که حرکتی ندارد، پس از رد متقابل دوباره در همان وضعیت بی‌حرکت قرار می‌گیرد، ولی این بار دیگر حق رد کردن ندارد.

پ) دو مهره

برای هر $n \geq 4$ زوج، مسیر

$$v_1 v_2 \dots v_n$$

مناسب است. این مسیر تطابق کامل $v_1 v_2, v_3 v_4, \dots, v_{n-1} v_n$ را دارد.

• اگر پتیا مهره‌ها را روی v_1 و v_n بگذارد، $n-2$ رأس دیگر، یکی یکی و از دو سر مسیر، گرفته می‌شوند. تعداد حرکت‌ها زوج است؛ آخرین حرکت را پتیا انجام می‌دهد و سپس واسیا بی‌حرکت می‌ماند. پس پتیا برنده می‌شود.

• اگر پتیا مهره‌ها را روی v_1 و v_{n-1} بگذارد، واسیا در نخستین حرکت مهره دوم را به v_{n-2} می‌برد. اکنون رأس v_n برای همیشه پشت رأس بازدیدشده v_{n-1} جدا افتاده است. پس از آن، رأس‌های در دسترس $v_2, \dots, v_{n-3}$ ناگزیر از دو سر مسیر برداشته می‌شوند. با احتساب حرکت نخست، در مجموع $1 + (n-4) = n-3$ حرکت داریم که فرد است. آخرین حرکت را واسیا انجام می‌دهد و بنابراین او برنده است.

این استدلال برای $n=4$ نیز درست است: در حالت دوم، پس از تنها حرکت واسیا دیگر حرکتی باقی نمی ماند.

ت) دست کم دو آغاز برنده برای پتیا

یک تطابق بیشینه M و یک رأس پوشش نیافته آن، s ، را بردارید. این رأس منزوی نیست، پس همسایه ای مانند v دارد. رأس v با یالی $w \in M$ پوشیده شده است؛ وگرنه می شد sv را به M افزود. در M ، یال vw را با sv عوض کنید. تطابق بیشینه دیگری به دست می آید که این بار رأس w را نمی پوشاند.

دو رأس s و w متمایزند. از اثبات بخش الف می دانیم که پتیا با آغاز از هر رأسی که در یک تطابق بیشینه پوشش نیافته باشد برنده می شود. پس دست کم دو رأس آغازین مناسب اند: s و w .

۲. سکه ها روی گراف

وزن رأس v ، یعنی تعداد سکه های آن، را با $w(v)$ نشان می دهیم.

الف) مسیر

رأس های مسیر به ترتیب $v_1, \dots, v_n$ باشند و $a_i = w(v_i)$ بگذارید

$$S_0 = 0, S_r = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{r-1} a_r.$$

اگر $S_n \geq 0$ ، پتیا از v_1 آغاز می کند. پس از آن ادامه مسیر یکتا است و تفاضل «سکه های پتیا منهای سکه های واسیا» برابر $S_n \geq 0$ می شود.

اکنون فرض کنید $S_n < 0$ و r کوچک ترین اندیسی باشد که $S_r < 0$. آنگاه $S_{r-1} \geq 0$ و r زوج است؛ در گام فرد عددی نامنفی به مجموع قبلی افزوده می شود، پس مجموع نمی تواند برای نخستین بار در گامی فرد منفی شود. پتیا از v_r آغاز می کند. پس از نخستین حرکت واسیا، مهره دیگر نمی تواند از رأس بازدید شده v_r عبور کند؛ بنابراین تا یکی از دو سر مسیر پیش می رود.

اگر واسیا به چپ برود، تفاضل نهایی برابر است با

$$a_r - a_{r-1} + \dots - a_1 = -S_r > 0.$$

اگر به راست برود، این تفاضل برابر است با

$$a_r - a_{r+1} + a_{r+2} - \dots = S_{r-1} - S_n > 0.$$

اگر یکی از دو جهت وجود نداشته باشد، نیازی به بررسی آن نیست. در نتیجه پتیا همیشه می تواند نبازد.

ب) درخت دلخواه

ایده. ابتدا ارزش بازی را در هر شاخه درخت حساب می کنیم و سپس نشان می دهیم دست کم یک رأس آغازین ارزش نامنفی دارد. تنها گام دوم به استدلالی جداگانه نیاز دارد.

یک رابطه بازگشتی متناهی تعریف می کنیم که بازی بهینه هر دو بازیکن را در خود دارد. برای دو رأس همسایه x, y ، یال xy را حذف کنید و مؤلفه شامل x را در نظر بگیرید. با $m(x|y)$ بهترین تفاضل نهایی

سکه های حریف او - را گرفته است x سکه های بازیکنی که همین حالا

را نشان می دهیم، در وضعیتی که y دیگر در دسترس نیست و نوبت بعدی با حریف است. در درخت، همه رأس های بازدید شده پیشین به وسیله یال xy از x جدا شده اند؛ پس ادامه وضعیت واقعاً فقط به حالت $x|y$ بستگی دارد. داریم

$$m(x|y) = w(x) - \max_{z \sim x} z \neq y m(z|x), \quad (1)$$

که بیشینه روی مجموعه تهی را 0 می گیریم. زیرا حریف شاخه z را انتخاب می کند که در آن برتری خودش $m(z|x)$ است، و این مقدار از برتری بازیکن نخست کم می شود. فرمول را می توان از برگ ها به سوی مرکز مؤلفه مربوط محاسبه کرد؛ بنابراین هم زمان راهبرد هر دو بازیکن را نیز به دست می دهد.

اگر پتیا از v آغاز کند، تفاضلی که تضمین می کند برابر است با

$$w(v) - \max_{u \sim v} m(u|v). \quad (۲)$$

رأس v را خوب می نامیم اگر عبارت (2) نامنفی باشد. نشان می دهیم یک رأس خوب وجود دارد.

خلاف آن را فرض کنید. آنگاه هر رأس v همسایه ای u دارد که

$$m(u|v) > w(v). \quad (۳)$$

می گوئیم u رأس v را تهدید می کند. مشاهده مهم این است: اگر u, v را تهدید کند، آنگاه v یگانه رأسی است که u را تهدید می کند. در واقع، از رابطه های (1) و (3) داریم

$$\max_{x \sim u, x \neq v} m(x|u) < w(u).$$

ولی u نیز خوب نیست، پس کسی آن را تهدید می کند و آن همسایه فقط می تواند v باشد. با به کار بردن همین استدلال در جهت عکس، می بینیم هیچ همسایه دیگری هم v را تهدید نمی کند.

پس رأس های درخت به زوج های همسایه تقسیم شده اند؛ همتای رأس v را v^* می نامیم. بگذارید

$$dv = m(v^*|v) - w(v) > 0. \quad (۴)$$

یال vv^* را همتا و یال های دیگر را عرضی می نامیم. اگر uv عرضی باشد، هنگام محاسبه $m(u|v)$ ، در میان ادامه های مجاز از u ، یگانه رأس تهدیدکننده آن یعنی u^* باقی می ماند. از این رو

$$m(u|v) = w(u) - m(u^*|u) = -du. \quad (۵)$$

برای هر رأس v تعریف کنید

$$hv = \{ \text{yal عرضی است } du: uv, \min \{ \text{هیچ یال عرضی نداشته باشد } v, 0 \} \}.$$

با جای گذاری رابطه (5) در (1) برای یال همتای vv^* به دست می آوریم

$$m(v|v^*) = w(v) + hv.$$

این فرمول را برای هر دو سر یک زوج می نویسیم و از (4) استفاده می کنیم:

$$dv + dv^* = hv + hv^*. \quad (۶)$$

بگذارید $dv = hv - \varepsilon v$. از (6) نتیجه می شود $\varepsilon v^* = -\varepsilon v$.

اکنون یک «نزول» متناهی آغاز می شود که در آن چیزی گم نمی شود. یک برگ a از درخت اصلی بردارید. تنها یال آن همتا است، پس $ha = 0$ و $ea = da > 0$. در مقابل، برای رأس a^* داریم $ea^* < 0$ ، یعنی $ha^* > da^*$. بنابراین a^* همسایه عرضی b دارد که کمینه در آن حاصل می شود:

$$db = ha^* > da^*.$$

چون a^*b عرضی است، $hb \leq da^* < db$. پس $eb > 0$. از یال همتا به b^* می رویم؛ آنجا $eb^* < 0$ است و به همان روش همسایه عرضی c با $ec > 0$ پیدا می کنیم. با ادامه این کار، مسیر

$$a \leftrightarrow a^* \leftrightarrow b \leftrightarrow b^* \leftrightarrow c \dots$$

ساخته می شود. یال ها یکی در میان هم تا و عرضی اند، پس بلافاصله به عقب بر نمی گردیم. در یک درخت، چنین مسیری نمی تواند دوباره به رأس دیده شده ای برسد؛ وگرنه میان دو بار حضور آن رأس چرخه پدید می آید. بنابراین در یک درخت متناهی، بی نهایت رأس متمایز ساخته ایم؛ تناقض.

پس رأس خوب v وجود دارد. پتیا آن را برمی گزیند و پس از هر پاسخ واسیا، راهبردش را از رابطه بازگشتی (1) می گیرد. به موجب (2)، او دست کم به اندازه واسیا سکه به دست می آورد.

پ) دور

وزن ها به ترتیب دور $a_1, \dots, a_n$ باشند.

اگر n زوج باشد، رأس ها را به دو رده یکی در میان تقسیم کنید. پتیا رأسی از رده ای را برمی گزیند که مجموع سکه هایش کمتر نیست. واسیا هر طرف که برود، از آن پس تمام دور در همان جهت پیموده می شود و پتیا دقیقاً رأس های رده خود را می گیرد. پس نمی باز د. اکنون n فرد باشد. اندیس ها پیمانه n هستند و

$$D_i = a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - \dots + a_{i+n-1}$$

تفاضل امتیازهاست اگر از رأس i آغاز کنیم و سپس ساعت گرد برویم. در حرکت پاد ساعت گرد D_{i+1} حاصل می شود. چون n فرد است،

$$D_i + D_{i+1} = 2a_i \geq 0. \quad (v)$$

پس دو عدد همسایه D_i, D_{i+1} نمی توانند هر دو منفی باشند. افزون بر این، جایی دو عدد همسایه هر دو نامنفی اند؛ وگرنه روی یک دور فرد، علامت های «منفی» و «نامنفی» باید کاملاً یکی در میان باشند، که ناممکن است. پتیا از همان رأس i آغاز می کند. هر دو جهت ممکن واسیا، تفاضلی نامنفی برای پتیا می دهند.

ت) گزاره برای گراف همبند دلخواه نادرست است

پاسخ: خیر. یک مثال نقض متقارن با هفت رأس می سازیم.

- رأس z وزن 2 دارد.
- رأس های x_1, x_2, x_3 وزن 1 دارند.
- رأس های y_1, y_2, y_3 وزن 0 دارند.
- z به همه x_i ها وصل است.
- x_i دقیقاً هنگامی به y_j وصل است که $i \neq j$.
- رأس های y_1, y_2, y_3 یک مثلث می سازند.

راهبرد واسیا را نشان می دهیم. در هر حالت $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

1. x_k انتخاب می کند. واسیا به $i \neq j$ را با y_j دلخواه می رود. پتیا ناچار x_i واسیا به هر آغاز کرده است z پتیا از

$z, x_i, y_j, x_k, y_i, x_j$ می روند x_j و واسیا به y_i می رود؛ سپس پتیا ناچار به

2. y_i, y_j می رود. پتیا هر یک از y_k واسیا به x_j می رود. پس از حرکت پتیا به z واسیا به x_i پتیا از

$x_k, \{y_i \text{ یا } y_j\}, x_i, z, x_j, y_k$ پایان می دهد x_k را که انتخاب کند، واسیا با حرکت به

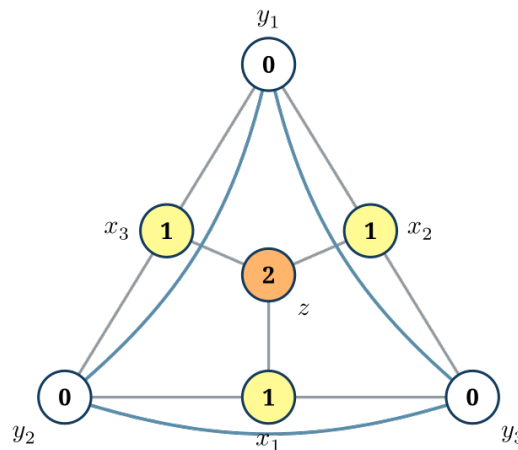
3. پتیا از y_i آغاز کرده است. واسیا به یکی از همسایه های x_j با $i \neq j$ می رود و اندیس سوم را k می نامد. پتیا دو نوع پاسخ دارد.

◦ اگر پتیا به z برود، واسیا به x_k می رود و پس از آن حرکت ها اجباری اند: y_j, x_i .

◦ اگر پتیا به y_k برود، واسیا به x_i می رود. اکنون پتیا فقط می تواند به z یا y_j برود؛ در هر دو حالت واسیا به x_k می رود.

در همه شاخه ها واسیا 3 سکه می گیرد. در حالت نخست و سوم هر سه رأس x_1, x_2, x_3 را می گیرد و در حالت دوم رأس های z و x_k را. پتیا تا اینجا گرفته یا بعداً می تواند رأس های با وزن مثبت و مجموع وزن حداکثر 2 را بگیرد؛ پس نمی تواند امتیاز را مساوی کند.

در شکل، عدد درون هر رأس تعداد سکه های آن است. کمان های بیرونی مثلث $y_1y_2y_3$ را می سازند؛ به کمک آن ها این مثلث با شش یال مستقیم x_1y_2 ، برای $i \neq j$ ، اشتباه نمی شود.



شکل ۱. مثال نقض وزن دار برای مسئله سکه ها.

۳. افزودن یال ها تا نخستین دور فرد

ابتدا یک حقیقت ساده را ثابت می کنیم. گراف بدون دور فرد را می توان با دو رنگ کرد، به گونه ای که دو سر هر یال رنگ های متفاوت داشته باشند. در هر مؤلفه یک ریشه و یک درخت کوتاه ترین مسیرها از آن انتخاب کنید؛ رنگ هر رأس را با زوج یا فرد بودن فاصله اش تا ریشه تعیین کنید. اگر یال uv دو رأس هم رنگ را وصل کند، مسیر u تا v در درخت انتخابی طول زوج دارد، زیرا بخش آغازین مشترک دو مسیر تا ریشه دو بار حذف می شود. این مسیر همراه با یال uv یک دور فرد می سازد. برعکس، در یک گراف دورنگ، رنگ ها روی هر دور یکی در میان عوض می شوند؛ پس طول هر دور زوج است.

بنابراین هر گراف بیشینه ای که هنوز دور فرد ندارد، از نوع Ka, b است. واقعاً دو مؤلفه جدا را همیشه می توان بی خطر به هم وصل کرد؛ اگر لازم باشد پیش از آن رنگ های یکی از دو مؤلفه را عوض می کنیم. همچنین در یک گراف همبند دورنگ، هر یال مفقود میان دو رده رنگی را می توان بی خطر افزود. برعکس، در Ka, b هر یال باقی مانده داخل یکی از دو رده است و فوراً مثلث می سازد. در پایان، تعداد یال های بی خطر افزوده شده برابر ab است.

الف) n فرد

اگر $a+b=n$ فرد باشد، ab زوج است. واسیا هر بار که حرکت بی خطر وجود دارد، یکی را انتخاب می کند. پیش از هر نوبت واسیا تعداد فردی یال افزوده شده است؛ بنابراین گراف هنوز نمی تواند همان Ka, b نهایی باشد که تعداد یال هایش زوج است. پس واسیا همیشه پاسخ بی خطر دارد. بازی متناهی است، بنابراین پتیا نخستین کسی است که ناچار دور فرد می سازد.

برای هر n فرد، واسیا برنده است.

ب) n زوج

پاسخ. اگر $n \equiv 2 \pmod{4}$ باشد پتیا، و اگر $n \equiv 0 \pmod{4}$ باشد واسیا برنده است.

یک گراف بی خطر را خوب می نامیم اگر همه رأس های نامنزوی آن با یک تطابق پوشیده شوند. به راهبرد پاسخ زیر نیاز داریم. فرض کنید پیش از حرکت حریف، گراف خوب است و هنوز رأس منزوی وجود دارد. تعداد این رأس ها زوج است. پس از یک حرکت بی خطر حریف، بازیکن پاسخ دهنده گراف خوب را بازمی سازد:

1. اگر دو رأس از پیش نامنزوی به هم وصل شده اند، او دو رأس منزوی را به هم وصل می کند و یال تازه را به تطابق می افزاید.

2. اگر دو رأس منزوی x, y به هم وصل شده اند، یال xy آن دو را پوشانده است. اگر رأس نامنزوی قدیمی وجود دارد، بازیکن پاسخ دهنده x را به یکی از آن ها وصل می کند؛ این فقط اتصال دو مؤلفه است و تطابق قبلی همراه با xy باقی می ماند. اگر این نخستین پاسخ در گراف تهی باشد، دو رأس منزوی دیگر را به هم وصل می کند.

3. اگر یک رأس نامنزوی به رأس منزوی x وصل شده باشد، بازیکن پاسخ دهنده رأس منزوی دیگری y را برمی گزیند و xy را می افزاید. همه پاسخ ها بی خطرند: یا یالی در یک مؤلفه تازه دورآسی افزوده می شود، یا دو مؤلفه به هم می پیوندند، یا یک برگ تازه اضافه می شود. رأس های منزوی لازم وجود دارند، زیرا تا وقتی چنین رأسی هست، تعدادشان پیش از حرکت حریف زوج است. پس از پاسخ، گراف خوب دوباره برقرار است.

فرض کنید $n=4k+2$. پتیا ابتدا یک یال دلخواه می افزاید؛ سپس پس از هر حرکت واسیا، تا وقتی رأس منزوی از میان برود، راهبرد بالا را اجرا می کند. در این لحظه گراف تطابق کامل دارد. از آن پس پتیا فقط یک حرکت بی خطر دلخواه انتخاب می کند. او نمی تواند نخستین کسی باشد که چنین حرکتی ندارد؛ وگرنه گراف کنونی $K_{a,b}$ بود. وجود تطابق کامل در این گراف فقط وقتی ممکن است که $a=b=n/2$ و در آن صورت

$$ab=(n/2)^2=(2k+1)^2$$

فرد است. اما پیش از نوبت پتیا تعداد حرکت های انجام شده زوج است؛ تناقض. پس واسیا نخستین کسی خواهد بود که ناچار حرکت بازنده انجام می دهد.

فرض کنید $n=4k$. پس از نخستین یال پتیا، گراف خوب است. واسیا دو رأس منزوی دیگر را به هم وصل می کند و سپس با همان روش خوب بودن گراف را حفظ می کند. وقتی رأس منزوی باقی نماند، حرکت های بی خطر دلخواه انجام می دهد. اگر واسیا نخستین کسی بود که حرکت بی خطر نداشت، گراف نهایی باز هم $K_{n/2,n/2}$ می شد، ولی این بار

$$(n/2)^2=(2k)^2$$

زوج است، در حالی که پیش از نوبت واسیا تعداد فردی یال افزوده شده است. این ناممکن است؛ پس واسیا برنده می شود.

پ) وصل کردن دو رأس منزوی ممنوع است

برای هر n زوج، پتیا برنده است.

پتیا در حرکت نخست یال ab را می افزاید. او تقارن نسبت به یک تبدیل خودمعکوس σ ، یعنی جایگشتی با $\sigma^2=id$ ، را حفظ می کند: رأس های a, b ثابت اند و همه رأس های دیگر به زوج های $x, \sigma(x)$ تقسیم شده اند. پس از هر حرکت پتیا، گراف نسبت به σ ناورد است و دو رأس هر زوج فعال $x, \sigma(x)$ در یک رده رنگی اند. همه رأس های نامنزوی یک مؤلفه می سازند، زیرا پس از حرکت نخست، طبق قانون بازی نمی توان مؤلفه تازه ای را با دو رأس منزوی آغاز کرد. فرض کنید واسیا یک حرکت بی خطر انجام داده است.

• اگر رأس منزوی x را با یال vx وصل کرده، پتیا یال $\sigma(v)\sigma(x)$ را می افزاید. رأس $\sigma(x)$ نیز منزوی بوده، پس این حرکت مجاز و بی خطر است و تقارن بازمی گردد.

• اگر واسیا یال uv را میان دو رأس فعال افزوده، پتیا یال $\sigma(u)\sigma(v)$ را می افزاید. این یال، یالی دیگر و هنوز افزوده نشده است. زیرا یالی که با تصویر خودش برابر باشد یا یال نخست ab است، یا دو رأس همتای $x, \sigma(x)$ را وصل می کند؛ اما آن دو در یک رده رنگی اند و چنین حرکت واسیا از پیش بازنده بود. تصویر یال بی خطر است، چون σ هر دو رده رنگی را حفظ می کند.

پس بعد از هر حرکت بی خطر واسیا، پتیا پاسخی بی خطر دارد. تا وقتی رأس منزوی وجود دارد، می توان آن را بی خطر به مؤلفه فعال پیوست؛ بنابراین بازی پیش از فعال شدن همه رأس ها پایان نمی یابد. آن گاه در هر رده رنگی یکی از رأس های a, b و تعدادی زوج کامل σ قرار دارد؛ پس اندازه هر دو رده فرد است. گراف دوبخشی کامل نهایی تعداد فردی یال دارد، یعنی آخرین حرکت بی خطر را پتیا انجام می دهد و سپس واسیا ناچار دور فرد می سازد.

۴. افزودن یال ها تا همبندی

پاسخ.

پتیا 3 پتیا 2 واسیا 1 واسیا 0 برنده $n \pmod{4}$

هر گراف بیشینه ای که هنوز ناهمبند است از دو مؤلفه کامل $K_a \sqcup K_b$ ، با $a+b=n$ ، تشکیل شده است. واقعاً اگر سه مؤلفه وجود داشته باشد می توان دو تای آن ها را بی خطر به هم وصل کرد، و اگر درون مؤلفه ای یالی کم باشد می توان آن را افزود. تعداد حرکت های بی خطر انجام شده در چنین وضعیتی برابر است با

$$(a^2) + (b^2) = (n^2) - ab. \quad (8)$$

اگر n فرد باشد، a, b زوجیت متفاوت دارند؛ پس ab زوج است و زوجیت عبارت (8) به افراز بستگی ندارد. برای $n \equiv 1 \pmod{4}$ ، عدد (n^2) زوج است. واسیا همیشه حرکت بی خطر برمیگزیند: پیش از نوبت او تعداد فردی یال افزوده شده، پس وضعیت نهایی با تعداد زوج یال هنوز حاصل نشده است. بنابراین پتیا می باز. برای $n \equiv 3 \pmod{4}$ ، عدد (n^2) فرد است؛ همان استدلال نشان می دهد پتیا همیشه حرکت بی خطر دارد و واسیا می باز.

تنها n زوج باقی می ماند. در گراف ناهمبند کنونی، O تعداد مؤلفه های با مرتبه فرد و R مجموع تعداد یال های مفقود درون مؤلفه ها باشد:

$$R = \sum C((|C|/2) - e(C)).$$

عدد O زوج است. هر حرکت بی خطر یکی از دو نوع زیر است.

- نوع I: دو مؤلفه فرد به هم وصل شده اند. آنگاه O به اندازه 2 کم می شود و زوجیت R تغییر نمی کند، زیرا با ادغام مؤلفه ها $|C||D| - 1$ یال داخلی مفقود تازه ایجاد می شود و این عدد زوج است.
- نوع II: هر حرکت بی خطر دیگر. آنگاه O تغییر نمی کند و زوجیت R عوض می شود. برای یک یال داخلی، R یک واحد کم می شود؛ و در ادغامی که دست کم یک مؤلفه زوج است، عدد $|C||D| - 1$ فرد است.

بازیکن برگزیده پس از هر حرکت خود ناوردا ی

$$O \equiv 0 \pmod{4}, R \equiv 0 \pmod{2} \quad (9)$$

را حفظ می کند. اگر حریف حرکت نوع I انجام دهد، $O \equiv 2 \pmod{4}$ می شود. بازیکن برگزیده دو مؤلفه فرد دیگر را به هم وصل می کند. این حرکت بی خطر است: پیش از حرکت حریف دست کم چهار مؤلفه فرد وجود داشت؛ پس پس از ادغام نخست هنوز مؤلفه زوج تازه ای جدا مانده و ادغام دوم نمی تواند کل گراف را همبند کند. اگر حریف حرکت نوع II انجام دهد، R فرد و در نتیجه مثبت شده است؛ بازیکن برگزیده هر یال داخلی مفقودی را می افزاید. هر دو پاسخ بی خطرند و ناوردا ی (9) را بازمی گردانند.

برای $n=4k$ ، ناوردا در گراف تهی برقرار است و بازیکن برگزیده واسیا است: او پس از نخستین حرکت پتیا پاسخ دادن را آغاز می کند. برای $n=4k+2$ ، پتیا در حرکت نخست دو رأس منزوی را به هم وصل می کند؛ در نتیجه O از $4k+2$ به $4k$ می رسد و ناوردا ی (9) برقرار می شود. از آن پس پتیا پاسخ می دهد. بازیکن برگزیده هرگز گراف را همبند نمی کند؛ چون بازی متناهی است، حریف او می باز.

خلاصه پاسخ ها.

حرکت حریف	تغییر $(O, R \pmod{2})$	پاسخ
دو مؤلفه فرد	$(-2, 0)$	وصل کردن دو مؤلفه فرد دیگر
هر حرکت بی خطر دیگر	$(0, 1)$	افزودن یک یال داخلی

B. جهت‌دهی‌های پویا

۵. مهره و برگرداندن جهت یال‌ها

الف) درخت

رأسی r و یکی از همسایه‌هایش s را برگزینید، همه یال‌های درخت را به سوی r جهت دهید و مهره را روی s بگذارید. پتیا در حرکت نخست از $s \rightarrow r$ می‌رود.

پس از آن، بیش از هر بار که واسیا جهت یالی را برمی‌گرداند، همه یال‌های درخت به سوی رأس حامل مهره‌اند. واسیا یکی از یال‌های مجاور، مثلاً vu ، را برمی‌گرداند و آن یال تنها یال خروجی از v می‌شود. پتیا روی آن به u می‌رود. اکنون همه یال‌ها به سوی u هستند، زیرا در درخت، مسیر به ریشه تازه فقط در جهت یال uv با مسیر به ریشه قدیمی فرق دارد. ناوردا برقرار شده است؛ بنابراین پتیا می‌تواند تا بی‌نهایت حرکت کند.

ب) گراف دارای دور

گزاره‌ای قوی‌تر را با استقرا روی تعداد رأس‌ها ثابت می‌کنیم: اگر گراف همبند دوری داشته باشد، واسیا از هر جهت‌دهی و هر جای مهره، در لحظه‌ای که نوبت برگرداندن یک یال با اوست، پس از تعداد متناهی حرکت مهره را بی‌یال خروجی می‌گذارد.

پایه: گراف یک دور ساده است. اگر اکنون دقیقاً یک یال از رأس مهره خارج شود، واسیا جهت همان یال را به داخل برمی‌گرداند و فوراً مهره را حبس می‌کند. اگر تعداد یال‌های خروجی صفر یا دو باشد، واسیا با برگرداندن یک یال آن را دقیقاً یک می‌کند و پتیا ناچار روی آن می‌رود. این حرکت نخست را $A1 \rightarrow A2$ بنامید. اکنون واسیا در جهت پیمایش انتخابی به یال بعدی $A2A3$ نگاه می‌کند. اگر از $A2$ خارج شود، آن را به داخل برمی‌گرداند و هر دو یال کنار $A2$ ورودی می‌شوند. اگر به $A2$ وارد شود، واسیا آن را به بیرون برمی‌گرداند و پتیا ناچار به $A3$ می‌رود. واسیا این قاعده را تکرار می‌کند. یا مهره زودتر می‌ایستد، یا یک دور کامل می‌زند؛ در حالت دوم، پس از بازگشت به $A1$ ، واسیا یال نخست $A1A2$ را به داخل برمی‌گرداند و مهره را متوقف می‌کند.

گام استقرا. کوتاه‌ترین دور C را برگزینید. این دور وتر ندارد، زیرا هر وتر آن را به دو دور تقسیم می‌کرد که یکی کوتاه‌تر بود. اگر گراف فقط C نیست، رأس‌هایی بیرون از C وجود دارند. از میان آن‌ها رأسی x با بیشترین فاصله تا C انتخاب کنید. گراف $G-x$ همبند است و همچنان C را دارد. زیرا برای هر $y, y \neq x$ ، کوتاه‌ترین مسیر y تا C نمی‌تواند از x بگذرد؛ وگرنه فاصله y تا C از فاصله x بیشتر می‌شد. واسیا در $G-x$ راهبرد استقرایی را اجرا می‌کند و به یال‌های مجاور x دست نمی‌زند. اگر پتیا روی پیکان $u \rightarrow x$ برود، واسیا فوراً جهت همان یال را به $x \rightarrow u$ برمی‌گرداند. در نوبت بعد پتیا ناچار از x بیرون می‌آید و به $G-x$ بازمی‌گردد؛ سپس واسیا راهبرد استقرایی را از وضعیت تازه دوباره آغاز می‌کند.

هر بار رفتن به x ، تعداد پیکان‌های رو به x از $G-x$ را برای همیشه کم می‌کند: واسیا یکی از آن‌ها را به پیکانی خروجی از x تبدیل می‌کند و در زمان‌های دیگر به یال‌های مرزی دست نمی‌زند. پس تنها تعداد متناهی بار می‌توان به x رفت. پس از آخرین بار، راهبرد استقرایی در $G-x$ مهره را در زمان متناهی متوقف می‌کند. اگر در وضعیت مورد بررسی مهره ابتدا روی x باشد، واسیا اول برگرداندن لازم را انجام می‌دهد. اگر دقیقاً یک پیکان از x خارج شود، آن را برمی‌گرداند و فوراً می‌برد. در غیر این صورت یک یال مجاور x را برمی‌گرداند؛ پس از آن پیکانی خروجی وجود دارد و نخستین حرکت پتیا مهره را به $G-x$ می‌برد. سپس همان راهبرد بالا را اجرا می‌کنیم.

۶. دو مهره و برگرداندن پیکان‌ها

ایده. در هر لحظه به جای تمام گراف، فقط دو راه جهت‌دار تا مقصد را نگه می‌داریم:

• P : از جای کنونی مهره پتیا تا B ؛

• Q : از جای کنونی مهره واسیا تا B .

این دو راه یال مشترک ندارند، هرچند رأس مشترک مجاز است. در آغاز، P همان مسیر داده‌شده از A تا B و Q مسیر تهی از B تا خودش است.

می‌توان یال‌های بیرون از PUQ را فراموش کرد. اگر واسیا بعداً از یکی از آن‌ها استفاده کند، فقط همان یال پیموده‌شده را می‌بینیم و آن را به Q می‌افزاییم. بنابراین اثبات حتی در مدل قوی‌تر و تصویری زیر هم کار می‌کند: واسیا می‌تواند در جریان بازی رأس‌ها و یال‌های تازه معرفی کند و هرچه بیرون از دو راه رنگی است فوراً ناپدید شود. این قانون تازه‌ای برای مسئله اصلی نیست؛ فقط روشی است برای نگاه‌داشتن بخش لازم وضعیت.

همه تغییرهای دو راه را توضیح می‌دهیم. پتیا در نوبت خود روی نخستین یال P می‌رود؛ پس از برگرداندن جهت، آن یال از P حذف می‌شود. اگر P تهی شود، پتیا به B رسیده است.

اکنون فرض کنید واسیا روی یال $q \rightarrow r$ رفته باشد. پس از حرکت، جهت آن $r \rightarrow q$ شده است.

1. اگر qr نه در P و نه در Q بود، $r \rightarrow q$ را به ابتدای Q بیفزایید.

2. اگر $q \rightarrow r$ در Q بود، نخستین یال Q بود؛ آن را حذف کنید.

3. (۱۵) $P \leftarrow P0 + (q \rightarrow r) + P1$ ، سپس دو راه را چنین عوض کنید. $P = P0 + (q \rightarrow r) + P1$ بود، بنویسید P در $q \rightarrow r$ اگر

در حالت سوم، فقط «دُم دو راه» را در رأس q جابه‌جا کرده‌ایم. دو راه قدیمی یال مشترک نداشتند و یال برگردانده‌شده از هر دو راه تازه حذف شده است؛ پس راه‌های تازه نیز یال مشترک ندارند. اگر پس از چسباندن، رأسی دو بار ظاهر شد، دور جهت‌دار میان دو حضور آن را بگردانید. بدین ترتیب یک راه جهت‌دار به مسیر جهت‌دار ساده تبدیل می‌شود و ناوردا و نداشتن یال مشترک حفظ می‌شوند. در حالت نخست نیز دورها را به همین روش حذف می‌کنیم.

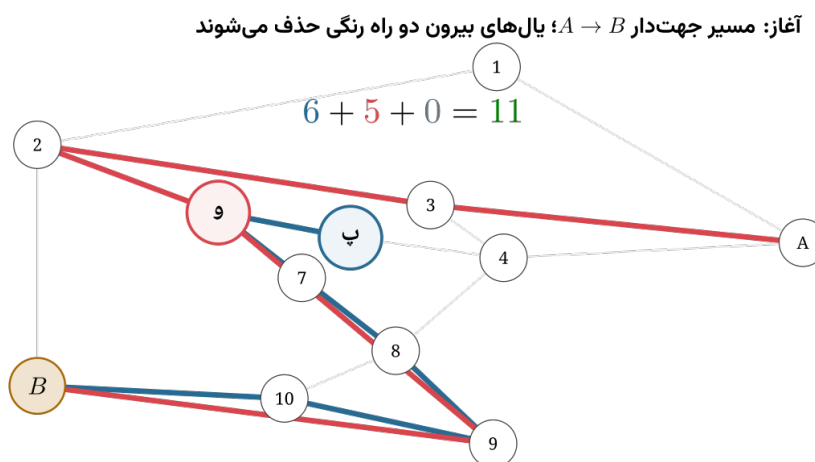
الف) ابتدا فقط واسیا حرکت می‌کند

پس از هر یک از تعداد متناهی حرکت‌های واسیا، P, Q را با قواعد بالا بازسازی می‌کنیم. وقتی واسیا ایستاد، P هنوز مسیری جهت‌دار از A تا B است. پتیا آن را به ترتیب می‌پیماید. پس از هر حرکت، فقط یال طی‌شده و حذف‌شده از مسیر برمی‌گردد؛ بنابراین دُم باقی‌مانده مسیر همچنان به سوی B است و پتیا به مقصد می‌رسد.

ب) بازی نوبتی

پاسخ: چنین گرافی وجود ندارد؛ پتیا روی هر گراف آغازین مجاز برنده می‌شود.

همین بخش در شکل نشان داده شده است. راه P آبی و راه Q قرمز است؛ یال‌های خاکستری در راهبرد نقشی ندارند و تقریباً محو شده‌اند. دایره‌های «پ» و «و» جای مهره‌های پتیا و واسیا را نشان می‌دهند و رأس زرد مقصد B است.



شکل ۲. دو مسیر رنگی در راهبرد مسئله ۶ب.

عبارت $A \rightarrow B$ در سطر «آغاز» به اختصار همان مسیر جهت‌دار داده‌شده در صورت مسئله است و لازم نیست تنها یک یال داشته باشد. در لحظه شکل، نوبت پتیا است و طول دو راه 6 و 5 است. بنابراین سطر بالای شکل می‌گوید

$$|P| + |Q| + \varepsilon = 6 + 5 + 0 = 11,$$

که در آن $\varepsilon = 0$ پیش از حرکت پتیا و $\varepsilon = 1$ پیش از حرکت واسیا است. بگذارید

$$S = |P| + |Q| + \varepsilon. \quad (11)$$

تغییر S را بررسی می‌کنیم. در نوبت پتیا، طول P یک واحد کم و ε از 0 به 1 تبدیل می‌شود؛ پس S ثابت می‌ماند. پس از حرکت واسیا، ε از 1 به 0 برمی‌گردد. اگر واسیا روی یالی بیرون PUQ رفته باشد، طول Q حداکثر یک واحد زیاد شده و S افزایش نمی‌یابد. اگر روی Q رفته باشد، $|Q|$ یک واحد کم شده است. در جابه‌جایی 10، یال qr از مجموع طول‌ها حذف می‌شود؛ از این‌رو

$$|P_{\text{new}}| + |Q_{\text{new}}| \leq |P_{\text{old}}| + |Q_{\text{old}}| - 1$$

سرانجام، رد کردن نوبت از سوی واسیا دو راه را عوض نمی‌کند. در هر سه حالت اخیر S اکیداً کم می‌شود. پس نیمه‌ناوردای 11 پس از هر حرکت جداگانه افزایش نمی‌یابد.

فرض کنید بازی بی‌نهایت باشد. عدد صحیح نامنفی S نمی‌تواند بی‌نهایت بار اکیداً کم شود، پس از جایی به بعد ثابت است. در آن صورت هر حرکت واسیا باید تنها حالت تساوی باشد؛ او روی یالی بیرون PUQ می‌رود، دقیقاً یک یال به Q می‌افزاید و هنگام حذف دورها چیزی از دست نمی‌رود. چنین حرکتی P را اصلاً تغییر نمی‌دهد، اما هر حرکت پتیا نخستین یال P را حذف می‌کند. پس پس از تعداد متناهی حرکت، P تهی می‌شود؛ یعنی پتیا به B می‌رسد. تناقض.

چند حرکت ممکن است لازم باشد؟ فرض کنید گراف آغازین n رأس دارد و

$$L_0 = |P_0| \leq n - 1.$$

کمیت $L = |P| + |Q|$ را پیش از نوبت‌های پتیا در نظر بگیرید. در یک دور کامل افزایش نمی‌یابد. تا وقتی $L = k$ است و کم نمی‌شود، واسیا هر بار در حالت تساوی قرار دارد و P را تغییر نمی‌دهد، در حالی که پتیا P را یک یال کوتاه‌تر می‌کند. بنابراین پس از حداکثر k حرکت پتیا، یا L کم می‌شود یا پتیا برنده شده است. در نتیجه تعداد حرکت‌های پتیا از

$$L_0 + (L_0 - 1) + \dots + 1 \leq n(n - 1) / 2$$

بیشتر نیست. شکل، کران بالا را نشان نمی‌دهد؛ بلکه یک بازی مشخص روی 12 رأس است که در آن واسیا واقعاً پیروزی را مدت زیادی به تأخیر می‌اندازد.

۷. گراف‌های ۲-تباهیده

(الف)

پاسخ. دو شرط هم‌ارزند.

یادآوری می‌کنیم: گراف ۲-تباهیده است اگر هر زیرگراف ناتهی آن رأسی با درجه حداکثر 2 داشته باشد.

فرض کنید گراف ۲-تباهیده است. رأس‌ها را یکی‌یکی حذف می‌کنیم و هر بار از گراف باقی‌مانده رأسی با درجه حداکثر 2 برمی‌گزینیم. ترتیبی $v_1, v_2, \dots, v_n$ به دست می‌آید که در آن v_i پیش از v_{i+1} حذف شده است. هر یال را از رأسی که دیرتر حذف شده به رأسی که زودتر حذف شده جهت می‌دهیم.

یال‌های ورودی به v_i دقیقاً از میان یال‌هایی‌اند که هنگام حذف v_i ، آن را به رأس‌های هنوز حذف‌نشده وصل می‌کردند؛ تعدادشان حداکثر دو است. همچنین در امتداد هر پیکان، شماره رأس کم می‌شود؛ پس دور جهت‌دار وجود ندارد.

برعکس، جهت‌دهی بی‌دوری در نظر بگیرید که درجه ورودی هر رأس در آن حداکثر 2 است. هر زیرگراف ناتهی را بردارید؛ جهت‌دهی محدودشده به آن نیز بی‌دور است. هر گراف جهت‌دار متناهی و بی‌دور یک چاهک دارد، یعنی رأسی که هیچ پیکانی از آن بیرون نمی‌آید. زیرا اگر از هر رأس پیکانی خارج شود، می‌توان همیشه در امتداد پیکان‌ها پیش رفت و سرانجام رأسی را تکرار کرد؛ در این صورت دوری ساخته می‌شود. همه یال‌های زیرگراف کنار یک چاهک به آن وارد می‌شوند؛ پس درجه آن حداکثر 2 است. این همان ۲-تبا‌هیدگی است.

(ب)

جهت‌دهی D از بخش الف را انتخاب کنید. برای هر رأسی که در D دقیقاً دو یال به آن وارد می‌شود، آن دو یال را یک زوج کنید. این زوج‌ها هم‌پوشانی ندارند، زیرا هر یال فقط به یک رأس وارد می‌شود.

مشاهده اصلی: اگر در بازی واقعی، دو یال هر زوج نسبت به رأس مشترکشان هم‌جهت باشند، یعنی یا هر دو وارد رأس شوند یا هر دو از آن خارج شوند، دور جهت‌دار وجود ندارد. خلاف آن را فرض کنید و D را به یال‌های یک دور جهت‌دار محدود کنید. چون D بی‌دور است، روی این دور رأسی وجود دارد که هر دو یال همسایه در D به آن وارد می‌شوند؛ این دو یال یکی از زوج‌های برگزیده‌اند. اما روی دور جهت‌دار واقعی، یکی از آن دو وارد و دیگری خارج می‌شود. تناقض.

اکنون راهبرد چرخه‌شکن را شرح می‌دهیم.

- اگر $|E(G)|$ زوج باشد و چرخه‌ساز آغاز کند، تعداد یال‌هایی که در زوج‌های برگزیده نیستند نیز زوج است؛ آن‌ها را دلخواه زوج زوج کنید. پس از هر حرکت چرخه‌ساز، چرخه‌شکن یال دوم همان زوج را می‌گیرد. در زوج ساختاری، جهت را چنان انتخاب می‌کند که دو یال نسبت به رأس مشترک هم‌جهت باشند؛ در زوج‌های دلخواه، جهت اهمیتی ندارد.

- اگر $|E(G)|$ فرد باشد و چرخه‌شکن آغاز کند، دست‌کم یک یال زوج نشده وجود دارد. او در حرکت نخست یکی از آن‌ها را دلخواه جهت می‌دهد. سپس یال‌های زوج نشده باقی‌مانده زوج زوج می‌شوند و از آن پس پاسخ‌ها همان است.

باید بررسی کنیم چرخه‌ساز پیش از پاسخ چرخه‌شکن نمی‌تواند با حرکت خودش دور را ببندد. پیش از هر نوبت او، هر زوج ساختاری یا دست‌نخورده است، یا کامل شده و دو یالش نسبت به مرکز هم‌جهت‌اند. اگر یک پیکان تازه دوری بسازد، چاهک جهت‌دهی مرجع D را روی این دور در نظر بگیرید. دو یال کنار آن یکی از زوج‌های ساختاری‌اند. این زوج نمی‌توانسته قبلاً کامل شده باشد، زیرا جهت‌هایش با دور ناسازگار بود؛ و نمی‌تواند دست‌نخورده باشد، چون هر دو یالش اکنون روی دورند. تناقض.

پس از پاسخ چرخه‌شکن، مشاهده اصلی دوباره برقرار است. بنابراین دور پس از حرکت هیچ‌یک از دو بازیکن پدید نمی‌آید و چرخه‌شکن برنده می‌شود.



شکل ۳. زوج مرجع و جهت واقعی روی بخشی از یک دور.

در شکل چپ، هر دو یال مرجع به x وارد می‌شوند؛ ولی روی یک دور جهت‌دار، ناگزیر یکی از آن‌ها وارد و دیگری خارج می‌شود.

۸. شبکه‌های مربعی

(الف)

پاسخ. روی شبکه مربعی نامتناهی، با هر ترتیب آغاز، چرخه‌شکن برنده است.

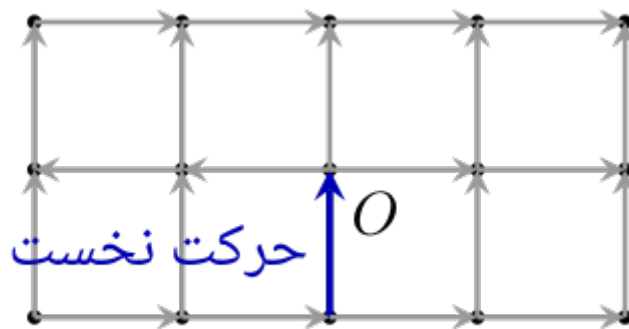
ابتدا چرخه ساز آغاز کند. در جهت دهی مرجع D ، همه یال های افقی را به راست و همه یال های عمودی را به بالا جهت دهید. به هر رأس دقیقاً دو یال مرجع، از چپ و پایین، وارد می شود؛ آن دو را زوج کنید. پس از حرکت چرخه ساز، چرخه شکن یال دوم همان زوج را می گیرد و آن را نسبت به رأس مشترک مانند یال نخست جهت می دهد. بررسی کامل مسئله V نه فقط پس از پاسخ چرخه شکن، بلکه بلافاصله پس از حرکت چرخه ساز نیز دور را ممنوع می کند. نامتناهی بودن گراف مشکلی نیست: هر دور نامزد پیروزی متناهی است و استدلال فقط روی همان دور به کار می رود.

اکنون چرخه شکن آغاز کند. در حرکت نخست، یال $(0,0)(0,-1)$ را رو به بالا جهت می دهد. جهت دهی مرجع را اندکی تغییر می دهیم:

- همه یال های عمودی رو به بالا هستند؛
- در سطر $y=0$ ، یال های افقی از مبدأ دور می شوند؛
- در همه سطرها، یال های افقی به راست اند.

این جهت دهی بی دور است. در امتداد هر پیکان عمودی، مختصه y اکیداً زیاد می شود؛ پس دور نمی تواند یال عمودی داشته باشد. درون هر سطر نیز فقط یک مسیر جهت دار بی دور داریم.

دقیقاً یک یال مرجع به مبدأ وارد می شود و همان یال در حرکت نخست جهت داده شده است. به هر رأس دیگر دقیقاً دو یال وارد می شود. چرخه شکن آن ها را زوج می کند و مانند مسئله V پاسخ می دهد. تنها یال زوج نشده از همان حرکت نخست اشغال شده است؛ پس باز هم دور جهت دار ساخته نمی شود.



شکل ۴. جهت دهی آغازین شبکه مربعی.

در شکل، حرکت نخست آبی است؛ در هر رأس دیگر، دو پیکان ورودی یک زوج اند.

(ب)

تعداد یال ها برابر است با

$$m(n-1)+n(m-1)=2mn-m-n.$$

پس

$$|E(P_m \square P_n)| \equiv m+n \pmod{2}.$$

یک راهبرد زوج سازی مستقل می دهیم. در ذهن، همه یال های افقی را به راست و همه یال های عمودی را به بالا جهت دهید. در هر رأسی که هم همسایه چپ و هم همسایه پایین دارد، دو یال آمده از آن دو همسایه را زوج کنید. بقیه یال ها را فعلاً بی زوج بگذارید.

اگر تعداد یال ها زوج و آغاز با چرخه ساز باشد، تعداد یال های باقی مانده نیز زوج است؛ آن ها را دلخواه زوج کنید. اگر تعداد یال ها فرد و آغاز با چرخه شکن باشد، تعداد یال های باقی مانده فرد و در نتیجه مثبت است. چرخه شکن در حرکت نخست یکی از آن ها را دلخواه جهت می دهد و بقیه را زوج می کند. سپس در پاسخ هر حرکت چرخه ساز، یال دوم همان زوج را می گیرد. در زوج ساختاری، دو یال نسبت به رأس مشترک هم جهت می شوند؛ در زوج دلخواه جهت پاسخ مهم نیست.

چرا دور ممکن نیست؟ در هر دور شبکه، رأسی با بیشترین مجموع مختصات برگزینید. دو یال دور کنار آن به چپ و پایین می‌روند و بنابراین یک زوج ساختاری‌اند. اما در دور جهت‌دار یکی باید وارد و دیگری خارج شود، در حالی که راهبرد آن‌ها را نسبت به رأس هم‌جهت می‌کند. دور نمی‌تواند بلافاصله پس از حرکت چرخه‌ساز نیز پدید آید: پیش از آن، هر زوج ساختاری یا کاملاً دست‌نخورده یا کامل است. در حالت نخست هر دو یالش نمی‌توانند روی دور تازه باشند و در حالت دوم جهت‌هایشان با دور ناسازگار است.

پس چرخه‌شکن برنده است. چون زوجیت تعداد یال‌ها همان زوجیت $m+n$ است، دقیقاً دو حالت خواسته‌شده به دست می‌آید. برای $m=n=1$ یالی وجود ندارد و گزاره خودبه‌خود درست است.

۹. بازی بولوباش-سابو

چاهک در مسئله ۷ تعریف شد. **سرچشمه** رأسی است که هیچ پیکانی به آن وارد نمی‌شود.

(الف)

در هر مؤلفه یک گراف ۴-منتظم، گردشی بسته می‌سازیم که از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد. روی یال‌های استفاده‌نشده پیش می‌رویم. نمی‌توان در رأسی جز رأس آغازین گیر کرد: پیش از ورود تازه به آن رأس، تعداد زوجی از یال‌هایش استفاده شده بود و پس از ورود تعداد فردی استفاده شده است، پس هنوز هر چهار یال مصرف نشده‌اند. اگر پس از بازگشت یالی باقی ماند، از رأسی روی گردش قبلی که به یک یال استفاده‌نشده وصل است گردش دیگری می‌سازیم و آن را در گردش نخست درج می‌کنیم. به این ترتیب یک گردش اویلری به دست می‌آید.

همه یال‌های گردش را در جهت پیمایش جهت دهید. به هر رأس دقیقاً دو یال وارد می‌شود؛ آن دو را زوجی با مرکز همان رأس می‌گیریم. همه یال‌های گراف به چنین زوج‌هایی تقسیم شده‌اند.

چرخه‌ساز ابتدا یک یال از زوجی دلخواه را می‌گیرد و آن را از مرکز زوج به بیرون جهت می‌دهد؛ یال دوم را موقتاً کنار می‌گذارد. سپس چنین بازی می‌کند:

- اگر چرخه‌شکن یالی از زوجی دست‌نخورده بگیرد، چرخه‌ساز یال دوم همان زوج را از مرکز به بیرون جهت می‌دهد؛
- اگر چرخه‌شکن یال کنارگذاشته‌شده را بگیرد، چرخه‌ساز زوج تازه‌ای را باز می‌کند: یک یالش را از مرکز به بیرون جهت می‌دهد و یال دوم را کنار می‌گذارد؛
- اگر زوج تازه‌ای نمانده باشد، حرکت چرخه‌شکن روی آخرین یال کنارگذاشته‌شده فقط بازی را تمام می‌کند و دیگر پاسخی لازم نیست.

در پایان از مرکز هر زوج دست‌کم یک پیکان خارج می‌شود؛ پس چاهکی وجود ندارد. هر گراف جهت‌دار متناهی بی‌چاهک یک دور جهت‌دار دارد: با دنبال کردن پیکان‌های خروجی سرانجام رأسی تکرار می‌شود. بنابراین چرخه‌ساز برنده است.

برای بخش‌های بعد به توزیع عمومی‌تری از یال‌ها در زوج‌ها نیاز داریم. ابتدا دو لم کمکی را ثابت می‌کنیم.

لم ۱ (تخصیص به جایگاه‌های مجاز). فرض کنید هر یک از چند شیء می‌تواند در بعضی جایگاه‌های معین قرار گیرد. اگر برای هر مجموعه q -تایی از اشیاء، در مجموع دست‌کم q جایگاه مجاز وجود داشته باشد، می‌توان همه اشیاء را در جایگاه‌های مجاز و متمایز قرار داد.

اثبات. بیشترین تعداد ممکن از اشیاء را قرار دهید. اگر شیء p قرار نگرفته، نخست آن، سپس همه جایگاه‌های مجازش، بعد همه اشیاء از پیش‌قرارگرفته در جایگاه‌های علامت‌خورده را علامت بزنید و این دو گام را تکرار کنید. اگر به یک جایگاه آزاد و علامت‌خورده رسیدیم، می‌توان در امتداد زنجیره به دست‌آمده اشیاء را یکی‌یکی جابه‌جا کرد و p را هم قرار داد؛ این با بیشینه‌بودن انتخاب ناسازگار است.

پس هیچ جایگاه آزاد علامت‌خورده‌ای وجود ندارد. همه جایگاه‌های علامت‌خورده اشغال شده‌اند، اما تعداد اشیاء علامت‌خورده یکی بیشتر است: صاحبان آن جایگاه‌ها به علاوه p . همچنین هر جایگاهی که برای یکی از اشیاء علامت‌خورده مجاز است، خود علامت‌خورده است. بنابراین جایگاه‌های مجاز از اشیاء کم‌ترند؛ تناقض. $\square$

لم ۲ (زوج ها در هسته چگال کمینه). در اینجا هسته چگال کمینه گرافی H است که $v(H) \geq 3$ ، $e(H) = 2v(H) - 2$ ، و هر زیرگراف F با $v(F) \geq 3$ حداکثر $2v(F) - 3$ یال دارد. فرض کنید H چنین هسته ای است و نخستین یال علامت خورده $a \rightarrow b$ جهت داده شده است.

1. می توان هر یال را به یکی از دو سرش نسبت داد، به گونه ای که هیچ یالی به a نسبت داده نشود، به هر رأس دیگر دقیقاً دو یال نسبت داده شود، و یال ab به b نسبت داده شود.

2. فرض کنید یال دیگری $c \rightarrow d$ ، متمایز از ab ، وجود دارد و $a \neq c$. می توان تخصیص را چنان برگزید که افزون بر شروط بالا، cd به c نسبت داده شود.

پس از تخصیص، دو یال نسبت داده شده به یک رأس را زوج آن رأس می نامیم.

اثبات. برای هر رأس a ، دو جایگاه آزاد بسازید. هر یال فقط می تواند در جایگاه یکی از دو سر خود قرار گیرد.

در حالت نخست، ab را از پیش در یکی از جایگاه های b بگذارید. در حالت دوم، افزون بر آن cd را در یکی از جایگاه های c قرار دهید. اگر $b=c$ باشد، این دو یال دو جایگاه متفاوت همان رأس را می گیرند.

شرط لم ۱ را برای یال های باقی مانده بررسی می کنیم. مجموعه ای دلخواه Q از آن ها را بردارید و X را مجموعه همه سرهای آن یال ها، جز a ، بنامید. با $eH(S)$ تعداد یال های H با هر دو سر در S را نشان می دهیم. همه یال های Q در میان یال های شمرده شده در $eH(X \cup \{a\})$ هستند.

اگر این مجموعه رأس ها سره و $|X| \geq 2$ باشد، از تعریف هسته داریم

$$eH(X \cup \{a\}) \leq 2(|X| + 1) - 3 = 2|X| - 1. \quad (1)$$

اگر $b \in X$ ، یال ab در $eH(X \cup \{a\})$ شمرده شده ولی دیگر در Q نیست. پس در هر دو حالت

$$|Q| \leq 2|X| - 1 - 1_{b \in X}. \quad (2)$$

در حالت نخست، رأس های X هنوز $2|X| - 1_{b \in X}$ جایگاه دارند و نامساوی (2) حتی یک واحد قوی تر از نیاز است.

در حالت دوم، تعداد جایگاه های باقی مانده

$$2|X| - 1_{b \in X} - 1_{c \in X}$$

است. اگر $c \in X$ ، این دقیقاً طرف راست (2) است؛ اگر $c \notin X$ ، طرف راست (2) دوباره یک واحد از تعداد جایگاه های آزاد کمتر است. پس در حالت دوم نیز جایگاه کافی داریم. توجه کنید لازم نیست یال cd را داخل $X \cup \{a\}$ بشماریم؛ ممکن است d در این مجموعه نباشد، و یک واحد سختی در (1) هزینه از دست رفتن یک جایگاه را جبران می کند.

اگر $X \cup \{a\} = V(H)$ ، تعداد کل یال های باقی مانده دقیقاً با تعداد کل جایگاه های باقی مانده برابر است: به ترتیب $2v(H) - 3$ و $2v(H) - 4$ در دو حالت. پس برای Q نیز جای کافی هست. اگر $X = \emptyset$ ، آنگاه Q تهی است. اگر $X = \{x\}$ ، در Q فقط ممکن است یال ax باشد. در حالت نخست $2 - 1_{x=b}$ جایگاه آزاد است و وقتی $x=b$ ، یال $ax=ab$ از پیش قرار گرفته است. در حالت دوم $2 - 1_{x=b} - 1_{x=c}$ جایگاه آزاد است؛ تنها راه صفر شدن این عدد $x=b=c$ است، ولی آنگاه نیز $ax=ab$ از پیش قرار گرفته است. همه حالت های کوچک بررسی شدند.

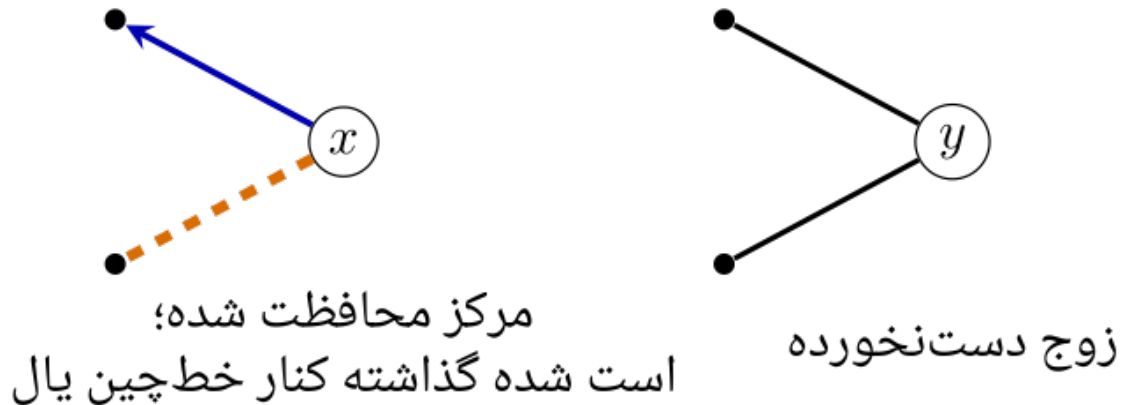
پس شرط لم ۱ برقرار است و همه یال های باقی مانده را می توان تخصیص داد. $\square$

سازوکار زوج ها و یال کنار گذاشته شده. اگر دو یال یک زوج به رأس x نسبت داده شده باشند، چرخه ساز می تواند با جهت دادن دست کم یکی از آن ها به بیرون از x ، این رأس را در برابر چاهک شدن محافظت کند.

حالت بازی زیر را به کار می بریم. چند زوج دست نخورده و شاید یک یال کنار گذاشته شده وجود دارد؛ رأسی که این یال به آن نسبت داده شده، از پیش محافظت شده است.

• اگر چرخه شکن یالی از زوجی دست نخورده بگیرد، چرخه ساز یال دوم را از مرکز زوج به بیرون جهت می دهد.

- اگر چرخه‌شکن یال کنارگذاشته‌شده را بگیرد، چرخه‌ساز یک زوج دست‌نخورده را باز می‌کند: یک یالش را از مرکز به بیرون جهت می‌دهد و یال دوم را یال کنارگذاشته‌شده تازه اعلام می‌کند.
 - اگر زوج دست‌نخورده‌ای نمانده، حرکت روی آخرین یال کنارگذاشته‌شده فقط جهت‌دهی را کامل می‌کند.
- بدین ترتیب چرخه‌ساز کم‌کم همهٔ مرکزها را محافظت می‌کند.



شکل ۵. مرکز محافظت‌شده و زوج دست‌نخورده.

(ب)

فرض کنید حرکت نخست چرخه‌شکن $a \rightarrow b$ است. بخش نخست لم ۲ را به کار ببرید. رأس a دیگر چاهک نیست و یال ab در زوج رأس b قرار دارد. چرخه‌ساز فوراً یال دوم این زوج را می‌گیرد و از b به بیرون جهت می‌دهد. پس از هر حرکت بعدی چرخه‌شکن، چرخه‌ساز یال دوم همان زوج را می‌گیرد و از مرکز آن به بیرون جهت می‌دهد. بنابراین هر رأس جز a نیز یک پیکان خروجی خواهد داشت و جهت‌دهی نهایی چاهک ندارد. طبق شرط این بخش، حتی اگر دور زودتر ساخته شود بازی تا پایان ادامه می‌یابد؛ راهبرد همچنان کاملاً تعریف‌شده است.

(پ)

فرض کنید چرخه‌ساز نخست $a \rightarrow b$ را جهت داده و چرخه‌شکن با $c \rightarrow d$ پاسخ داده است. ابتدا $a \neq c$ باشد. بخش دوم لم ۲ را به کار می‌بریم: ab به b و cd به c نسبت داده می‌شود. رأس a با یال نخست و رأس c با یال دوم محافظت شده‌اند. اگر $b \neq c$ ، چرخه‌ساز اکنون یال دوم زوج b را می‌گیرد و از b به بیرون جهت می‌دهد. یال دوم هنوز استفاده‌نشدهٔ زوج c کنار گذاشته می‌شود. اگر $b = c$ ، دو یال نخست یک زوج کامل‌اند و مرکز آن را محافظت کرده‌اند؛ در این صورت چرخه‌ساز یک زوج دست‌نخوردهٔ دلخواه را باز می‌کند و یال دوم آن را کنار می‌گذارد. اکنون سازوکار زوج‌ها و یال کنارگذاشته‌شده اجرا می‌شود. اگر دور جهت‌دار زودتر ساخته نشده باشد، در پایان چاهکی وجود ندارد. حالت $a = c$ باقی می‌ماند. چون دو حرکت روی یال‌های متفاوت بوده، $b \neq d$. در ذهن جهت همهٔ پیکان‌ها را برعکس کنید. دو پیکان نخست به $a \rightarrow b$ و $d \rightarrow a$ تبدیل می‌شوند و مبداهای متفاوت دارند. راهبرد حالت بررسی‌شده تضمین می‌کند که پس از این برگرداندن چاهکی وجود ندارد؛ بنابراین در جهت‌دهی اصلی سرچشمه‌ای وجود نخواهد داشت. با برگرداندن همهٔ پیکان‌ها، دور جهت‌دار همچنان دور جهت‌دار می‌ماند. پس چرخه‌ساز یکی از دو گزینهٔ خواسته‌شده را تضمین می‌کند.

(ت)

ابتدا بخش لازم گراف را جدا می کنیم. از میان زیرگراف های G که دست کم $2v-2$ یال و حداقل سه رأس دارند، یکی را که از نظر شمول کمینه است انتخاب و H می نامیم. آنگاه

$$e(H)=2v(H)-2.$$

زیرا اگر یال بیشتری وجود داشت، می شد یک یال را حذف کرد. همچنین هر زیرگراف سره $F \subseteq H$ با $v(F) \geq 3$ حداکثر $2v(F)-3$ یال دارد؛ وگرنه به جای H انتخاب می شد. پس H یک هسته چگال کمینه است.

چرخه ساز فقط روی H بازی می کند و با پیکان دلخواه $a \rightarrow b$ آغاز می کند. فقط باید توجه کرد که هر حرکت چرخه شکن بیرون H ، در بازی داخل H مانند رد کردن نوبت است.

• اگر نخستین پاسخ چرخه شکن در H باشد، ساخت بخش پ را اجرا می کنیم. پس از حرکت بعدی چرخه ساز در H ، زوج های دست نخورده و یک یال کنار گذاشته شده باقی می ماند.

• اگر پاسخ نخست بیرون H باشد، بخش نخست لم ۲ را برای $a \rightarrow b$ اجرا می کنیم. چرخه ساز یال دوم زوج b را می گیرد و از b به بیرون جهت می دهد. پس از آن در H فقط زوج های دست نخورده باقی اند.

ردهای بعدی چنین مدیریت می شوند. اگر یال کنار گذاشته شده ای نیست و چرخه شکن بیرون H بازی کند، چرخه ساز زوج تازه ای را باز می کند و یال دوم را کنار می گذارد. اگر یال کنار گذاشته شده وجود داشته باشد و چرخه شکن باز بیرون H بازی کند، چرخه ساز همان یال را جهت می دهد و دوباره یال کنار گذاشته شده ای نمی ماند. به حرکت در زوج دست نخورده روی یال دوم همان زوج پاسخ می دهد؛ به حرکت روی یال کنار گذاشته شده با باز کردن زوج بعدی پاسخ می دهد. وقتی هیچ یال مناسبی نماند، همه یال های H جهت گرفته اند. بنابراین مستقل از حرکت های بیرون H ، اگر دور زودتر ساخته نشده باشد، چرخه ساز روی H جهت دهی ای بی چاهک یا بی سرچشمه می سازد. در شاخه «بی سرچشمه» همه پاسخ ها در جهت مقابل اند: به جای خروج از مرکز زوج، به مرکز وارد می شوند. هر جهت دهی متناهی بی چاهک یا بی سرچشمه یک دور جهت دار دارد. پس چرخه ساز برنده است.

وابستگی ها یک طرفه اند:

$$ت. 9 \rightarrow 9پ, 9ب \rightarrow 9لم \text{ های } ۱ \text{ و } ۲.$$

بخش ۹ الف در اثبات ۹ ت استفاده نمی شود.

(ث)

در یک گراف ۴-منتظم با N رأس داریم

$$2e=4N, e=2N.$$

اگر چرخه ساز آغاز کند، از بخش الف یا ت برنده است. اگر چرخه شکن آغاز کند، نخستین یال جهت داده شده او را فراموش کنید. $2N-1 \geq 2N-2$ یال بدون جهت مانده و اکنون چرخه ساز میان آن ها نخست بازی می کند. بخش ت دور جهت داری می دهد که تماماً از یال های باقی مانده تشکیل شده است.

اکنون یک نشانیدن سلولی روی سطح بسته و جهت پذیر با جنس $g \geq 1$ را در نظر بگیرید. سلولی یعنی هر مؤلفه متهم گراف یک دیسک است؛ این مؤلفه ها را وجه می نامیم. تعداد وجه ها f باشد. هر وجه چهار ضلع دارد و هر یال در مرز دو وجه است؛ پس

$$4f=2e, f=e/2.$$

برای این تجزیه سلولی داریم

$$N-e+f=2-2g.$$

توجیه کوتاهی می دهیم تا این فرمول را مانند یک قضیه آماده به کار ببریم. کمیت $V-E+F$ زیر دو عمل ریزکردن تغییر نمی کند. اگر رأسی تازه روی یال بگذاریم، V و E هر دو یک واحد زیاد می شوند. اگر درون یک وجه کمائی ساده رسم کنیم و آن را به دو وجه تقسیم کنیم، E و F یک واحد زیاد می شوند. هر دو تجزیه سلولی متناهی از یک سطح، ریزکردن مشترکی دارند: یال های یکی را اندکی جابه جا کنید، همه نقاط تقاطع را رأس بگیرید و در صورت نیاز ناحیه های حاصل را با کمان ها تقسیم کنید. پس $V-E+F$ را می توان روی تجزیه استاندارد سطح جنس g حساب کرد: چندضلعی ای با $4g$ ضلع که در $2g$ زوج به هم چسبانده می شوند. پس از چسباندن یک رأس، $2g$ یال و یک وجه داریم؛ بنابراین $V-E+F=1-2g+1=2-2g$.

با جای گذاری $f=e/2$ به دست می آوریم

$$e=2N+4g-4.$$

برای $g \geq 1$ ، این مقدار دست کم $2N$ است. اگر چرخه ساز آغاز کند، بخش ت را به کار می بریم. اگر چرخه شکن آغاز کند، پس از حرکت او دست کم $2N-1$ یال می ماند و باز بخش ت را روی آن ها اجرا می کنیم. چرخه ساز با هر دو ترتیب آغاز برنده است.

(ج)

از مسئله ۸ الف می دانیم روی شبکه مربعی نامتناهی، با هر دو ترتیب آغاز، چرخه شکن برنده است. اکنون گراف های متناهی ای می سازیم که در آن ها با هر دو ترتیب، چرخه ساز برنده باشد.

برای $R \geq 0$ بگذارید

$$L=2R+3, GR=CL \square CL.$$

یعنی

$$V(GR)=(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2,$$

و دو رأس وقتی به هم وصل اند که دقیقاً در یک مختصه به اندازه ± 1 تفاوت داشته باشند. رأس ریشه v_R را $(0,0)$ می گیریم. پارامترها چنین اند:

$$|V(GR)|=L^2=(2R+3)^2, |E(GR)|=2L^2=2(2R+3)^2.$$

چون $L \geq 3$ ، گراف ساده و ۴-منتظم است؛ پس به موجب بخش ث، چرخه ساز با هر دو ترتیب آغاز برنده است.

یادآوری: توپ ریشه دار شعاع R ، زیرگراف القایی روی رأس هایی است که فاصله شان از ریشه حداکثر R است. فقط باید این توپ را بررسی کنیم. هر رأس آن نماینده یکتای $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ با

$$|x|+|y| \leq R$$

دارد. دو نماینده متفاوت نمی توانند پیمانه L برابر باشند، زیرا قدرمطلق تفاوت هر مختصه آن ها حداکثر $2R < L$ است. یال اضافی «از روی درز» چنبره هم پدید نمی آید: قدرمطلق تفاوت دو مختصه حداکثر $2R$ است، ولی برای همسایگی کاذب باید برابر $L-1=2R+2$ باشد. پس همسایگی درون توپ دقیقاً همان همسایگی در $\mathbb{Z}^2$ است.

در نتیجه توپ های ریشه دار شعاع R هم ریخت اند، اما برای هر یک از دو ترتیب آغاز، برنده ها مخالف اند.

C. رنگ‌کردن یال‌ها و بازی‌های کلیک

۱۰. نخستین مثلث تک‌رنگ

پاسخ. برای هر $n \geq 5$ ، آبی برنده است.

راهبرد حداکثر از پنج رأس استفاده می‌کند؛ اما بهتر است این رأس‌ها را پس از نخستین پاسخ قرمز انتخاب کنیم.

آبی با یال P_1P_2 آغاز می‌کند. نخستین حرکت قرمز یکی از دو حالت زیر است.

حالت ۱: یال قرمز با P_1P_2 سر مشترک دارد. نام سرها را چنان عوض کنید که یال قرمز P_2P_3 باشد و دو رأس تازه P_4, P_5 را برگزینید. آبی P_2P_4 را رنگ می‌کند. اکنون تهدید می‌کند P_1P_4 را بگیرد و مثلث آبی $P_1P_2P_4$ را کامل کند؛ پس قرمز ناچار خودش P_1P_4 را می‌گیرد. قرمز با دو یال هنوز نمی‌تواند برنده شود.

سپس آبی P_2P_5 را می‌گیرد. در حرکت بعدی تهدید می‌کند یکی از دو یال

P_1P_5, P_4P_5

را بگیرد. اولی مثلث $P_1P_2P_5$ و دومی مثلث $P_2P_4P_5$ را کامل می‌کند.

حالت ۲: نخستین یال قرمز با P_1P_2 سر مشترک ندارد. آن را P_3P_4 بنامید و رأس پنجم P_5 را انتخاب کنید. آبی P_1P_5 را رنگ

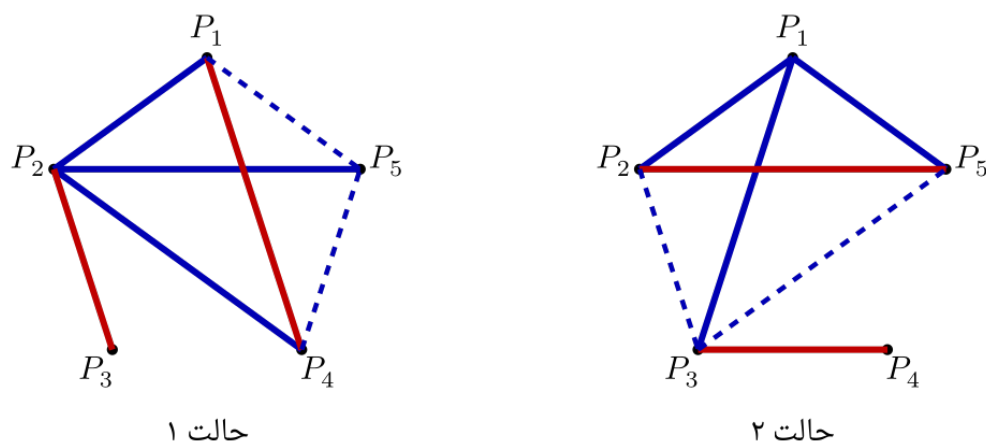
می‌کند و با P_2P_5 تهدید می‌سازد. قرمز ناچار P_2P_5 را می‌گیرد. سپس آبی P_1P_3 را می‌گیرد و دو تهدید می‌سازد:

P_2P_3 و P_3P_5 .

این دو یال به ترتیب مثلث‌های $P_1P_2P_3$ و $P_1P_3P_5$ را کامل می‌کنند.

در هر دو حالت، پیش از سومین حرکت قرمز، دو یال او سر مشترک ندارند. این دو یال یا P_2P_3, P_1P_4 هستند یا P_3P_4, P_2P_5 . پس قرمز با یال سوم نمی‌تواند مثلث بسازد؛ هر دو یال یک مثلث سر مشترک دارند. او فقط یکی از دو تهدید آبی را می‌بندد و آبی تهدید دیگر را اجرا کرده، برنده می‌شود.

اگر قرمز در هر مرحله تهدید یگانه گفته‌شده را نبندد، آبی زودتر می‌برد. شرط $n \geq 5$ دقیقاً برای انتخاب پنج رأس متمایز لازم است.



شکل ۶. دو حالت نمونه در بازی مثلث تک‌رنگ.

یال‌های پیوسته آبی و قرمز وضعیت پس از سومین حرکت آبی را نشان می‌دهند؛ دو یال خط‌چین، دو تهدید هم‌زمان او هستند.

در این بخش، یک رأس نیز کلیک شمرده می‌شود. با ω_R و ω_B اندازه بزرگ‌ترین کلیک‌های دو رنگ و با $\alpha(G)$ اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گراف G را نشان می‌دهیم.

۱۱. بازی متقارن اردوش

ابتدا یک طرفند را که چند بار به کار می‌رود روشن می‌کنیم.

ترفند یال‌های فرضی. اگر ثابت کنیم بازیکن حتی پس از هدیه‌دادن چند یال آزاد به حریف برنده است، در بازی واقعی نیز برنده خواهد بود. یال‌های هدیه‌شده را در ذهن از پیش مال حریف می‌گیریم. اگر حریف بعداً واقعاً یکی از آن‌ها را بگیرد، حرکتش را رد نوبت می‌شماریم و حرکت اضافی ناگزیر خود را هر جا خواستیم انجام می‌دهیم؛ یک یال بیشتر از رنگ خودمان نه کلیک خودمان را کوچک می‌کند و نه کلیک حریف را بزرگ. اگر در بخش مورد بررسی تخته یال آزادی نمانده باشد نیز می‌توان حرکت را رد شده شمرد.

(الف)

خلاف حکم را فرض کنید: آبی راهبردی دارد که در برابر هر بازی قرمز نتیجه

$$\omega_B > \omega_R$$

می‌دهد. قرمز در حرکت نخست یال دلخواه e را رنگ می‌کند؛ سپس وانمود می‌کند بازیکن دوم است و راهبرد آبی را با جابه‌جا کردن نام رنگ‌ها اجرا می‌کند. در بازی فرضی، یال‌های آبی واقعی نقش یال‌های بازیکن اول و همه یال‌های قرمز جز e نقش یال‌های بازیکن دوم را دارند. پس راهبرد وعده می‌دهد

$$\omega(R-e) > \omega(B).$$

yal اضافی قرمز e فقط به قرمز کمک می‌کند. بنابراین همان راهبرد باید هم‌زمان پیروزی هر دو بازیکن را تضمین کند؛ تناقض. پس قرمز می‌تواند $\omega_R \geq \omega_B$ را تضمین کند.

(ب)

بازی متناهی است؛ با بررسی درخت بازی از انتها، یا آبی می‌تواند $\omega_R \leq \omega_B + 1$ را تضمین کند، یا قرمز می‌تواند $\omega_R \geq \omega_B + 2$ را تضمین کند. نشان می‌دهیم حالت دوم ناممکن است.

فرض کنید S چنین راهبردی برای قرمز و f حرکت نخست آن باشد. نخستین حرکت واقعی قرمز را e بنامید. آبی می‌خواهد S را با جابه‌جایی رنگ‌ها اجرا کند.

- وقتی روی یال‌های آبی و یال‌های قرمز S پیروی می‌کند. راهبرد S را رنگ می‌کند و سپس عیناً از f آبی، اگر $e \neq f$ نامساوی دوم از این حقیقت می‌آید که حذف یک $\omega_B \geq \omega(R-e) + 2 \geq \omega_R + 1$ اجرا شود، باید بدهد e به جز یال، عدد کلیک را حداکثر یک واحد کم می‌کند. این با وعده قرمز ناسازگار است.
- نخستین یال e یال S را انجام می‌دهد و از آن چشم می‌پوشد. در بازی فرضی g آبی حرکت آزاد دلخواه $e=f$ اگر آبی است؛ حرکت‌های قرمز واقعی از حرکت دوم نقش حرکت‌های حریف و حرکت‌های آبی واقعی از حرکت دوم افزودن یک یال عدد کلیک را حداکثر یک $\omega((B-g)+e) \geq \omega(R-e) + 2$ را دارند. بنابراین S نقش پاسخ‌های واحد زیاد می‌کند؛ کافی است از هر کلیک که از یال تازه استفاده می‌کند یکی از دو سر آن را حذف کنیم. پس طرف است $\omega_B \geq \omega_R$ کمتر نیست. نتیجه $\omega(R) + 1$ بیشتر و طرف راست از $\omega(B) + 1$ چپ (*) از

اگر پس از e حداکثر یک یال آزاد مانده باشد، حکم بدیهی است، زیرا قرمز فقط یک یال دارد. این ملاحظه فقط برای تخته دلخواه بخش پ لازم است؛ روی K_n ، $n \geq 3$ ، یال آزاد کافی هست. در هر دو حالت، وعده راهبرد قرمز با وعده راهبرد ساخته‌شده برای آبی هم‌زمان شدنی نیست. تناقض، حکم را ثابت می‌کند.

(پ)

در اثبات‌های الف و ب، کامل بودن گراف به کار نرفت؛ فقط متناهی بودن بازی و این حقیقت لازم بود که افزودن یک یال عدد کلیک را حداکثر یک واحد زیاد می‌کند. پس هر دو اثبات روی هر تخته متناهی G درست‌اند. با بازی بهینه، قرمز تفاضل را دست‌کم صفر و آبی حداکثر یک می‌کند؛ بنابراین تفاضل برابر 0 یا 1 است.

(ت)

حرکت نخست قرمز روی $Kn+1$ یال uv باشد. قرمز را قوی تر می کنیم و همه یال های دیگر خارج شده از v را نیز در ذهن به او می دهیم. روی n رأس باقی مانده یک تخته پاک Kn داریم که آبی در آن نخست بازی می کند. آبی راهبرد برنده بازیکن اول را اجرا می کند. حرکت قرمز بیرون این تخته در بازی فرضی رد نوبت است؛ اگر Kn پر شده باشد، آبی هر یال آزاد دیگری را می گیرد. اگر عده های کلیک درون این Kn برابر r, b باشند، $b \geq r+1$. در گراف کامل، کلیک قرمز می تواند رأس همگانی قرمز v را نیز به کار ببرد، ولی کلیک آبی نمی تواند. پس

$$\omega R = r+1 \leq b = \omega B.$$

آبی نمی باززد و طبق قانون مسئله برنده است.

(ث)

قرمز با xy آغاز کند و $H = Kn+2 - \{x, y\} \cong Kn$. آبی در نخستین حرکت خود، راهبرد برنده بازیکن اول را روی H آغاز می کند و سپس چنین پاسخ می دهد:

1. به حرکت قرمز درون H ، طبق همان راهبرد درون H پاسخ می دهد؛

2. به xz برای $z \in H$ ، با yz پاسخ می دهد و برعکس.

پاسخ دوم همیشه آزاد است، زیرا دو یال زوج xz, yz پیش از آن فقط با هم می توانستند دست بخورند. اگر پاسخ درونی راهبرد قبلاً به صورت یک حرکت اضافی آبی انجام شده یا یالی در H نمانده باشد، آبی هر یال آزاد را می گیرد. ترفند یال های فرضی نشان می دهد این حسابداری وعده راهبرد روی H را تغییر نمی دهد.

عده های کلیک در H را r, b بنامید؛ آنگاه $b \geq r+1$. کلیک قرمز با اندازه دست کم سه نمی تواند هم x و هم y را داشته باشد، زیرا برای هر رأس سوم یکی از دو یال لازم آبی است. پس

$$\omega R \leq r+1 \leq b \leq \omega B.$$

(ج)

راهبرد برنده S برای بازیکن اول روی Kn را ثابت کنید. ابتدا وضعیتی را وصف می کنیم که آبی از آن به آسانی برنده می شود.

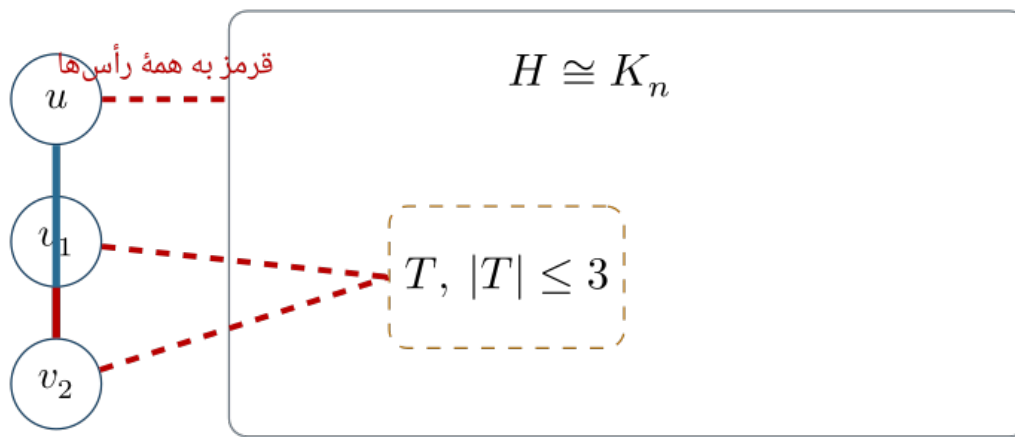
وضعیت هدف. رأس ها به $H \cong Kn$ و سه رأس ویژه u, v_1, v_2 تقسیم شده اند و:

- درون H ، آبی با راهبرد S آغاز کرده و اکنون یک یال بیشتر از قرمز دارد، یا H کامل شده است؛

- همه یال های u به H قرمز و uv_1, uv_2 آبی اند؛

- $v_1 v_2$ قرمز است و همه همسایه های قرمز مشترک v_1, v_2 در مجموعه ای $T \subset H$ با $|T| \leq 3$ قرار دارند.

در شکل، یال های پیوسته رنگ شده اند و خط چین ها یال های هدیه شده به قرمز را نشان می دهند. مستطیل H و ناحیه کوچک درون آن T است.



شکل ۷. ساخت کمکی در راهبرد بخش ۱۱ ج.

چرا وضعیت هدف برنده است؟ به حرکت قرمز در H ، آبی طبق S پاسخ می‌دهد؛ به v_1w با v_2w و برعکس. گرفتن یک یال هدیه‌شده رد نوبت محسوب می‌شود. در پایان، اگر r, b عددهای کلیک دو رنگ در H باشند، $b \geq r+1$. کلیک قرمزی که حداکثر یک رأس ویژه دارد، اندازه‌اش حداکثر $r+1$ است. کلیک‌ی که دو رأس ویژه دارد، نمی‌تواند u را همراه v_1 یا v_2 داشته باشد؛ پس فقط می‌تواند از v_1, v_2 و حداکثر سه همسایه قرمز مشترکشان ساخته شود. بنابراین

$$\omega_R \leq \max\{r+1, 5\}. \quad (1)$$

یک کران رمزی بسیار ضعیف را همین‌جا ثابت می‌کنیم: هر دورنگ‌آمیزی یال‌های K_{70} یک K_5 تکرنگ دارد. با استقرا روی $a+b$ ثابت می‌کنیم میان $(a+b-2a-1)$ رأس، یا K_a قرمز هست یا K_b آبی. برای یک رأس ثابت، یا دست‌کم $(a+b-3a-2)$ همسایه از یک رنگ دارد، یا دست‌کم $(a+b-3a-1)$ همسایه از رنگ دیگر؛ استقرا را روی همان همسایه‌ها اجرا کنید. با $a=b=5$ عدد $(84)=70$ به دست می‌آید.

چون $n > 100$ ، درون H یک K_5 قرمز یا آبی هست. در حالت دوم $b \geq 5$ و در حالت نخست $r \geq 5$ ، پس $b \geq r+1 \geq 6$. در هر صورت $b \geq 5$ و با استفاده از (1) نتیجه می‌شود $\omega_B \geq \omega_R$.

ساخت وضعیت هدف. یکی از سرهای نخستین یال قرمز را x بنامید. آبی در حرکت نخست xy را می‌گیرد که y رأسی تازه است. پس از حرکت دوم قرمز، رأسی z انتخاب کنید که نه به x و نه به y یال قرمز داشته باشد و هر یال قرمز موجود بیرون x, y یک سرش z باشد. چنین انتخابی ممکن است؛ فعلاً حداکثر یک یال قرمز بیرون x, y داریم؛ اگر هست سر مناسب آن وگرنه رأسی تازه را بگیرید. پس هیچ یال رنگ‌شده‌ای در

$$H = K_{n+3} - \{x, y, z\}$$

نیست. آبی راهبرد S را در H آغاز می‌کند و تا نخستین حرکت قرمز e بیرون H ، در H پاسخ می‌دهد. یال e ممکن است xz یا yz باشد. آبی یکی از xz, yz را که آزاد و با e متفاوت است می‌گیرد. پیش از e هر دو آزاد بودند، پس چنین یالی هست. رأسی از x, y که اکنون به دو رأس دیگر دو یال آبی دارد، u نام می‌گیرد و دو رأس دیگر v_1, v_2 .

اگر قرمز همین حالا آخرین یال H را گرفته و آبی پاسخ درونی ندارد، آبی فوراً یکی از xz, yz را می‌گیرد و نام‌ها را تعیین می‌کند؛ H کامل است و وضعیت هدف حاصل شده است.

تا این لحظه قرمز حداکثر سه یال بیرون H زده است. پس اجتماع همسایه‌های قرمز فعلی v_1, v_2 در H اندازه حداکثر سه دارد؛ آن را در $|T| \leq 3, T \subset H$ ، بگذارید. با ترفند یال‌های فرضی، همه یال‌های مفقود u به H ، هر دو یال هر رأس T به v_1, v_2 ، و یال v_1v_2 را به قرمز هدیه دهید. هیچ‌یک آبی نیست. دقیقاً وضعیت هدف ساخته شد.

چ

صورت مسئله. ثابت یا رد کنید: عدد طبیعی N وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq N$ ، اگر قرمز روی Kn بتواند پیروزی اکید را تضمین کند، آبی روی $Kn+4$ راهبرد برنده داشته باشد.

بخش باز. طبق صورت پروژ، در اینجا راه‌حلی ارائه نمی‌شود.

ج

صورت مسئله. ثابت یا رد کنید: برای هر $n \geq 3$ ، با بازی بهینه آبی برنده می‌شود.

بخش باز. طبق صورت پروژ، در اینجا راه‌حلی ارائه نمی‌شود.

۱۲. بازی نامتقارن 1:2

(الف)

پس از پایان بازی، هر یال Kn که در گراف سفید W نیست سیاه است. بنابراین یک مجموعه رأس دقیقاً هنگامی کلیک سیاه است که هیچ دو رأسش با یال سفید وصل نباشند؛ یعنی در W مستقل باشد. پس

$$\omega(W) = \alpha(W).$$

(ب)

پس از نخستین یال سفید uv ، دو رأس دیگر را x, y بنامید. چنگیز فوراً xy و یک یال آزاد دلخواه دیگر را سیاه می‌کند. از آن پس هر یال سفید با uv سر مشترک دارد، زیرا تنها یال بی‌سر مشترک از پیش سیاه است. روی K_4 ، بلا دقیقاً دو حرکت دارد. پس گراف سفید او دو یال مجاور و یک رأس منزوی است. در آن $\omega(W) = 2$ و سه رأس مستقل وجود دارد، یعنی $\alpha(W) = 3$. به موجب بخش الف، کلیک سیاه اندازه $3 > 2$ دارد و چنگیز برنده است.

۱۳. بلا و چنگیز روی Kn

(الف) n زوج و چهار یال سیاه در هر پاسخ

ایده. چنگیز رأس‌ها را به زوج‌های سیاه تقسیم می‌کند. تقریباً هر بلوک میان دو زوج، جز یک یال سفید، فوراً کاملاً سیاه می‌شود. استثنایا جنگلی می‌سازند و هر جنگل جهت‌دار سرچشمه دارد.

در آغاز همه رأس‌ها آزادند. در جریان بازی چنگیز زوج‌های مجزای x, x^- با یال سیاه xx^- می‌سازد. چهار یال میان دو زوج را بلوک آن‌ها می‌نامیم. بعضی بلوک‌ها علامت‌دارند؛ بلوک‌های علامت‌دار گرافی F روی مجموعه زوج‌ها می‌سازند. پاسخ به یال سفید xy سه حالت دارد.

1. اگر x, y آزادند، دو رأس آزاد دیگر x^-, y^- را برگزینید، یال‌های xx^-, yy^-, x^-y^- را سیاه کنید، زوج‌های X, Y را بسازید و بلوک XY را در F علامت بزنید.

2. اگر x در زوج $X = x, x^-$ است و y آزاد، رأس آزاد y^- را برگزینید، یال‌های yy^-, xy^-, x^-y^- را سیاه کنید، زوج Y را بسازید و بلوک XY را با جهت موقت $X \rightarrow Y$ علامت بزنید.

3. اگر هر دو رأس زوج دارند، همه یال‌های هنوز آزاد بلوکشان را سیاه کنید. در بلوک بی‌علامت حداکثر سه و در بلوک علامت‌دار حداکثر دو یال آزاد مانده است.

در دو حالت نخست حداکثر سه یال مصرف شد. چنگیز با یال چهارم، اگر لازم باشد، مشکل یگانه را رفع می کند: اگر دقیقاً دو رأس آزاد مانده، یال میانشان را سیاه و آن دو را زوج اعلام می کند. پس پیش از هر حرکت بلا یا هیچ رأس آزادی نیست یا دست کم چهار رأس آزاد هست. حرکت های مصرف نشده دلخواه اند.

گراف F جنگل است: در قاعده نخست یال تازه دو رأس تازه را وصل می کند؛ در قاعده دوم یک رأس تازه به یک رأس قدیمی آویزان می شود؛ زوج ساخته شده با حرکت چهارم رأس منزوی F است.

پس از پایان بازی جهت های باقی مانده F را تعیین می کنیم. در بلوک قاعده اول، یال نخست سفید xy و یال مقابل x^-y^- سیاه است. از دو یال دیگر حداکثر یکی سفید می شود، زیرا پس از آن حرکت، قاعده سوم دیگری را سیاه می کند. اگر xy^- سیاه است $X \rightarrow Y$ و اگر سفید است $Y \rightarrow X$ بگذارید. در هر بلوک جهت دار داریم

$$X \rightarrow Y, p \in X, q \in Y, pq = \text{سفید} \Rightarrow pq^- \text{ سیاه} \quad (*)$$

برای بلوک قاعده دوم این از همان ابتدا درست است. اگر در پایان رأس آزاد مانده، هیچ یال سفید به آن وارد نیست؛ وگرنه پیش تر زوج می گرفت. همه یال های آن سیاه اند؛ آن رأس ها را زوج زوج و به صورت رأس های منزوی به F بیفزایید.

بزرگ ترین کلیک سفید را C ، با $|C| = s \geq 2$ ، بنامید. از هر زوج حداکثر یک رأس در C است. مجموعه رأس های مقابل را C^- بنامید. این مجموعه کلیک سیاه است: در بلوک بی علامت، پس از نخستین یال سفید همه یال های دیگر سیاه شدند؛ در بلوک علامت دار، یال مقابل نخستین و سپس یال مقابل دومین یال سفید سیاه شده اند.

زیرجنگل جهت دار F روی زوج های نماینده شده در C سرچشمه ای X دارد. رأس $c \in C \cap X$ را بردارید. برای هر $q \in C \setminus \{c\}$ ، یال cq^- سیاه است: اگر دو زوج در F همسایه باشند، از سرچشمه بودن X و $(*)$ ؛ وگرنه بلوک بی علامت است و جز cq همه چیز سیاه. همچنین cc^- سیاه است. پس

$$C^- \cup \{c\}$$

کلیک سیاهی با اندازه $s+1$ است و چنگیز برنده می شود.

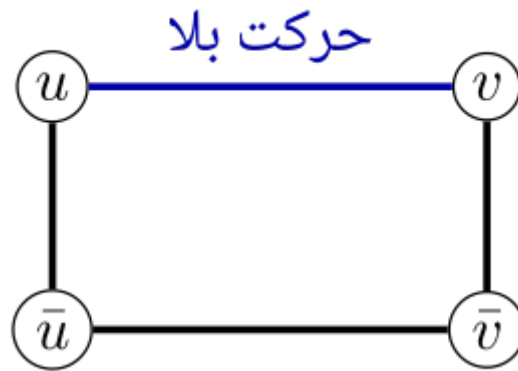
ب) n زوج و سه یال سیاه در هر پاسخ

راهبرد اقتصادی تری به کار می بریم. اگر قاعده کمتر از سه یال تازه بخواهد، چنگیز سهم باقی مانده را با یال های آزاد دلخواه پر می کند. بلوک را زود هنگام می نامیم اگر نخستین یال سفیدش پیش از ساخته شدن هر دو زوج پدید آمده باشد. سه ناوردا چنین اند:

- یال هر زوج مقابل سیاه است؛
- یال مقابل هر یال سفید میان دو زوج سیاه است؛
- بلوک های زود هنگام روی زوج ها جنگل می سازند.

تا وقتی دست کم چهار رأس بی نام مانده، چنگیز به یال سفید uv چنین پاسخ می دهد:

1. اگر هر دو بی نام اند، دو رأس بی نام u^-, v^- را برمی گزیند و uu^-, u^-v^-, vv^- را سیاه می کند.
2. اگر u زوج دارد و v بی نام است، v^- را برمی گزیند و u^-v^-, vv^- را سیاه می کند.
3. اگر هر دو زوج دارند، از سه یال دیگر بلوک، هر چه هنوز آزاد است سیاه می کند: uv^-, u^-v^-, u^-v^- .



شکل ۸. بلوک چهار یال میان دو زوج رأس.

اگر در پایان دور دقیقاً دو رأس بی‌نام x, y ماند، پاسخ‌ها چنین‌اند:

(۲) پاسخ ویژه لازم نیست $xy, yv, yv, yv, xv, xv, yv, yv$ یال‌های چنگیز حرکت بلا.

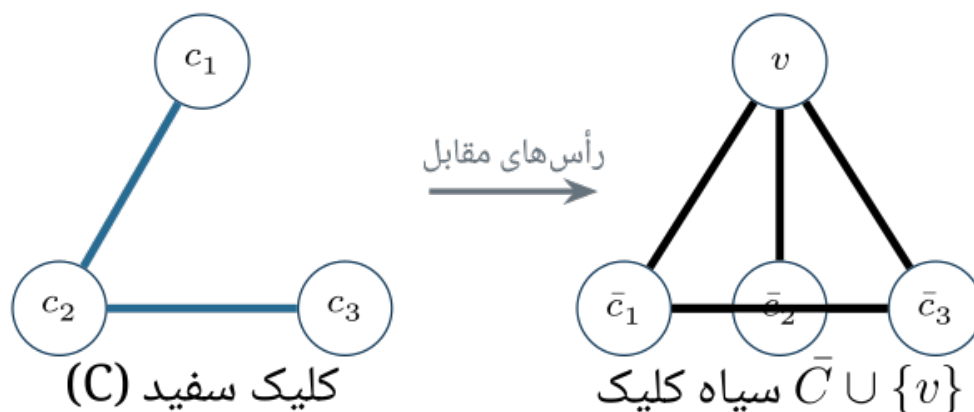
برای یال میان رأس‌های از پیش زوج‌شده همچنان قاعده سوم اجرا می‌شود.

بلوک‌های زود هنگام جنگل‌اند: حرکت میان دو رأس بی‌نام، یالی جدا میان دو رأس تازه جنگل می‌سازد؛ حرکت میان رأس نام‌دار و بی‌نام، رأس تازه را به قدیمی می‌آویزد. یال میان دو زوج موجود زود هنگام نیست. در بلوک غیر زود هنگام حداکثر یک یال سفید است. در بلوک زود هنگام، یال مقابل نخستین یال سفید سیاه است و پس از دومین یال سفید، قاعده سوم همه یال‌های آزاد دیگر را سیاه می‌کند؛ پس حداکثر دو یال سفید دارد و اگر دو تا باشند سر مشترک دارند.

کلیک سفید C با s رأس زوج‌شده را بگیرید. C^- کلیک سیاه است. یال سفید میان C و C^- فقط در بلوک زود هنگام دو زوج C ممکن است و در هر چنین بلوک حداکثر یکی است. جنگل القایی روی این s زوج حداکثر $s-1$ یال دارد؛ پس میان C و C^- حداکثر $s-1$ یال سفید هست. رأسی $v \in C$ پیدا می‌شود که هیچ همسایه سفیدی در C^- ندارد. پس

$$C^- \cup \{v\}$$

کلیک سیاه $s+1$ -رأسی است.



شکل ۹. تبدیل یک کلیک سفید به کلیکی سیاه و بزرگ‌تر.

اگر بزرگ‌ترین کلیک سفید x را دارد ولی y را ندارد، آن را $CU\{x\}$ بنویسید. از قاعده (2)، رأس y هم به هم C^- و هم به رأس پیداشده v سیاه وصل است؛ پس $C^- \cup \{v, y\}$ یک رأس بزرگ‌تر است. حالت y متقارن است. یال سفید xy در هیچ مثلث سفید نیست، چون برای هر رأس سوم، قاعده (2) یکی از دو اتصال را سیاه می‌کند. اگر کلیک سفید فقط $\{x, y\}$ باشد، بیش از پدیدآمدن این دو رأس در بخش زوج‌شده یک یال سفید وجود داشته و استدلال بالا با $s=2$ یک K_3 سیاه می‌دهد. پس کلیک سیاه بیشینه همیشه اکیداً بزرگ‌تر است.

پ) n فرد و سه یال سیاه در هر پاسخ

چنگیز ابتدا مانند بخش ب زوج‌های مقابل را می‌سازد و در یکی از دو لحظه توقف می‌کند: یا سه رأس بی‌نام مانده و بلا برای نخستین بار یکی را لمس می‌کند؛ یا پنج رأس بی‌نام مانده و بلا یالی میان دو تای آن‌ها می‌گیرد. رأس‌های زوج‌شده را L بنامید.

حالت ۱. رأس‌های a, b, c مانده‌اند و حرکت تازه نخست بلا av_0 ، با $v_0 \in L$ ، است. چنگیز مثلث abc را سیاه می‌کند. سپس در پاسخ یال سفید dv ، $v \in L$ ، $d \in \{a, b, c\}$ ، همه یال‌های آزاد از av_0^- ، bv_0^- ، cv_0^- را سیاه می‌کند؛ درون L قاعده سوم بخش ب برقرار است. تنها استثنا یال آغازین av_0 است که اگر میان یال‌های لازم ظاهر شود از آن می‌گذریم. کلیک سفید حداکثر یکی از a, b, c را دارد. اگر $|C|=s$ ، $C \subseteq L$ ، $CU\{d\}$ باشد،

$$(C \setminus \{v_0, v_0^-\}) \cup \{a, b, c\}$$

کلیک سیاهی با اندازه دست‌کم $s+2$ است. اگر کلیک سفید در L باشد، اثبات بخش ب کار می‌کند.

حالت ۲. سه رأس a, b, c مانده‌اند و حرکت نخست بلا ab است. چنگیز ac, bc را سیاه می‌کند و سپس پاسخ‌ها چنین‌اند:

$$avbv, bv^-, cv^-bvav, av^-, cv^-cvav, bv^-, cv^- \quad (3)$$

درون L همان قاعده اجرا می‌شود. برای کلیک $CU\{a\}$ ، مجموعه $C^- \cup \{b, c\}$ یک رأس بزرگ‌تر و سیاه است؛ برای b متقارن و برای c ، مجموعه $C^- \cup \{a, c\}$ مناسب است. به سبب سطر نخست جدول (3)، کلیک سفید نمی‌تواند هم a, b و هم رأسی از L را داشته باشد. خود یال ab نیز خطرناک نیست. برای $n \geq 7$ ، پیش از سه رأس باقی‌مانده دست‌کم یک حرکت زوج‌سازی عادی در L وجود داشته و استدلال جنگل با $s=2$ یک مثلث سیاه می‌دهد. برای $n=5$ مستقیماً حالت ۳ پیش می‌آید.

حالت ۳. پنج رأس مانده‌اند. دو سر نخستین یال سفید را x, y و سه رأس دیگر را a, b, c بنامید. چنگیز مثلث abc را سیاه می‌کند. سپس:

1. به یکی از av, bv, cv با av^-, bv^-, cv^- پاسخ می‌دهد؛

2. به xv یا yv ، سه یال دیگر میان $\{x, y\}$ و $\{v, v^-\}$ را سیاه می‌کند؛

3. مثلاً به ax با ay, by, cy پاسخ می‌دهد؛ اگر بعداً bx یا cx سفید شود، یال باقی‌مانده را سیاه می‌کند. پنج حالت دیگر با تغییر نام همین‌اند؛

4. درون L قاعده قدیمی را اجرا می‌کند.

کلیک سفید با حداکثر یک رأس ویژه مانند بخش ب بررسی می‌شود. یال xy در مثلث سفید نیست. اگر کلیک سفید دو رأس ویژه داشته باشد، پس از تغییر نام به صورت $CU\{a, x\}$ است؛ آنگاه

$$C^- \cup \{b, c, y\}$$

کلیک سیاهی با یک رأس بیشتر است. پس چنگیز برای هر $n > 3$ فرد برنده است.

همه پاسخ‌ها مجازند. قاعده سوم فقط یال‌های آزاد را می‌گیرد. اگر یالی لازم به v^- پیش‌تر سفید شده بود، پاسخ همان حرکت، یال کنونی به v را سیاه کرده بود. در قاعده ax نیز هر یال سفید قدیمی میان ay, by, cy با پاسخ متقارن ax را سیاه می‌کرد. بنابراین هیچ جدول رنگ یال سفید را عوض نمی‌کند؛ یال‌های لازم از پیش سیاه تازه شمرده نمی‌شوند و سهم باقی‌مانده با یال‌های آزاد دلخواه پر می‌شود.

(ت)

صورت مسئله. ثابت یا رد کنید: برای $k=2$ ، چنگیز برای هر $n>3$ زوج راهبرد برنده دارد.

بخش باز. طبق صورت پروژ، در اینجا راه حلی ارائه نمی شود.

۱۴. کلیک سفید روی تخته نامتناهی

در همه بخش ها، هر حرکت بلا یعنی سفید کردن یک یال. بنابراین $Tb(r)$ تعداد حرکت های سفید است، نه تعداد کل یال های رنگ شده.

(الف) بلا چگونه کلیک می سازد؟

نخست یک شکل کمکی را توصیف می کنیم که بلا بر پایه آن حرکت هایش را انتخاب خواهد کرد. این شکل، درختی می نامیم. هر رأس در ترازهای ریشه تنها یک رأس قرار دارد که آن را 0 است. در تراز $0, 1, \dots, r-1$ متناهی با ترازهای نیای رأس x نامیده می شوند. می گوئیم رأس برگ شاخه به سمت پایین دارد. رأس های تراز آخر $b+1$ دقیقاً $0, \dots, r-2$ ، بگذرد x از y است، هرگاه مسیر ریشه تا y را بگیرد.

رأس های این درخت فقط جایگاه هایی در شکل کمکی اند. بلا به تدریج به بعضی از آن ها رأس های واقعی گراف کامل نامتناهی را نسبت می دهد. چنین رأسی از درخت را اشغال شده و رأس متناظر گراف را نماینده آن می نامیم.

بلا همواره ویژگی زیر را حفظ می کند:

اگر دو رأس اشغال شده درخت روی یک مسیر از ریشه به پایین قرار داشته باشند، نماینده های آن ها با یک یال سفید به هم وصل اند.

در آغاز، بلا ریشه را اشغال می کند و یک رأس دلخواه را نماینده آن می گیرد. سپس بارها کوشش زیر را تکرار می کند.

1. بلا یک رأس تازه u از گراف واقعی انتخاب می کند. این رأس باید به هیچ نماینده ای که تا آن لحظه انتخاب شده است یال سیاه نداشته باشد. چنین رأسی وجود دارد: تعداد نماینده ها و یال های سیاهی که تاکنون رسم شده اند متناهی است، در حالی که K_∞ بی نهایت رأس دارد.
 2. بلا از ریشه درخت کمکی آغاز می کند. فرض کنید اکنون در رأس اشغال شده x ایستاده است. او یال میان u و نماینده x را سفید می کند.
 3. زیر رأس x ، تعداد $b+1$ شاخه آغاز می شود؛ هر شاخه از یکی از فرزندان x شروع می شود. پاسخ چنگیز شامل b یال سیاه است، پس او می تواند حداکثر در b تا از این شاخه ها، u را با یالی سیاه به یک نماینده اشغال شده وصل کند. بنابراین دست کم یک شاخه از چنین یالی خالی می ماند و بلا همان شاخه را انتخاب می کند.
 4. اگر نخستین فرزند در شاخه انتخاب شده از پیش اشغال شده باشد، بلا به آن می رود و گام های ۲ و ۳ را تکرار می کند. اگر آن فرزند هنوز اشغال نشده باشد، بلا u را نماینده آن قرار می دهد و این کوشش را پایان می دهد.
- چرا ویژگی اصلی حفظ می شود؟ بلا در طول یک کوشش، u را با یال های سفید به همه رأس های اشغال شده مسیری که پیموده است وصل می کند. این رأس ها دقیقاً نیاهای اشغال شده جایگاه جدید u هستند.
- پاسخ های سیاه نمی توانند پایین رفتن را متوقف کنند: در هر تراز $b+1$ ادامه وجود دارد، اما پاسخ چنگیز فقط b یال دارد. افزون بر این، تمام یال های سیاهی که در ترازهای قبلی همین کوشش رسم شده اند، به شاخه هایی می روند که بلا پیش تر کنار گذاشته است.
- اگر بلا به یک رأس اشغال شده در تراز $r-2$ برسد، حرکت بعدی او یک Kr سفید می سازد. در واقع، مسیر ریشه تا این رأس $r-1$ رأس اشغال شده دارد؛ نماینده های آن ها دوبه دو با یال سفید به هم وصل اند و رأس تازه u نیز در این کوشش با همه آن ها یال سفید دارد.
- سرانجام، این فرایند نمی تواند تا ابد ادامه پیدا کند. هر کوشش ناموفق یک رأس تازه از درخت کمکی متناهی را اشغال می کند. پس دیر یا زود بلا به تراز آخر می رسد و پیروز می شود.

دارای j یال سفید رسم می‌کند. تراز j بلا، j اکنون می‌توان تعداد حرکت‌ها را نیز برآورد کرد. برای اشغال یک رأس در تراز و سپس یک برگ را اشغال کند، بیش از $1, \dots, r-2$ رأس است. حتی اگر بلا ناچار شود همه رأس‌های ترازهای $j(b+1)$ متناهی است $Tb(r)$ ، حرکت نخواهد کرد. به‌ویژه $Tb(r) \leq \sum_{j=0}^{r-2} j(b+1)j + (r-1)$.

(ب) پاسخ دقیق برای مثلث

هر دو نامساوی لازم را ثابت می‌کنیم.

از آن $vx_1, vx_2, \dots, vx_{b+2}$ یال سفید $b+2$ انتخاب می‌کند و v او رأسی به نام حرکت کافی است $b+3$ برای بلا را چنان انتخاب می‌کند که همه یال‌های میان آن و رأس‌هایی که پیش‌تر نام‌گذاری xi رسم می‌کند. بلا هر رأس تازه شده‌اند آزاد باشند. همان استدلال بخش الف این انتخاب را ممکن می‌کند: در هر لحظه فقط تعداد متناهی یال رنگ شده است.

پس از حرکت vx_{b+2} ، هر $b+1$ یال میان x_{b+2} و $x_1, \dots, x_{b+1}$ آزادند. سفیدکردن هر یک از این یال‌ها همراه با v یک مثلث سفید می‌سازد. چنگیز حداکثر b تا از آن‌ها را سیاه می‌کند؛ پس بلا در حرکت بعدی یال باقی‌مانده را می‌گیرد و مثلث را کامل می‌کند. بنابراین $Tb(3) \leq b+3$.

بلا پیش از حرکت $b+3$ -ام نمی‌تواند پیروز شود. یک یال آزاد را خطرناک می‌نامیم اگر سفیدکردن آن بی‌درنگ یک مثلث سفید برای بلا بسازد. پس از هر یک از $b+1$ حرکت نخست بلا، چنگیز همه یال‌های خطرناک تازه را سیاه می‌کند و حرکت‌های باقی‌مانده خود را دلخواه انجام می‌دهد.

بررسی می‌کنیم که b یال برای این کار کافی است. فرض کنید بلا به‌تازگی t -امین یال سفید خود، یعنی uv ، را رسم کرده است. هر یال خطرناک تازه باید همراه با uv و یکی از یال‌های سفید قبلی یک مثلث بسازد. دقیقاً $t-1$ یال سفید قبلی وجود دارد و هر یک از آن‌ها حداکثر یک یال خطرناک تازه ایجاد می‌کند. پس تعداد یال‌های خطرناک تازه حداکثر $t-1 \leq b$ است.

ام نیز هنوز $b+2$ ام، هیچ یال آزاد خطرناکی باقی نمی‌ماند. بنابراین بلا در حرکت $b+1$ پس از پاسخ چنگیز به حرکت $Tb(3) = b+3$ نمی‌تواند مثلث را کامل کند. در نتیجه

آمادگی برای بخش‌های پ و ت: لم وزنی

ابتدا یک بازی متناهی را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. فرض کنید X مجموعه‌ای متناهی از عناصر بازی است؛ در مسئله ما این عناصر یال‌های گراف کامل‌اند. همچنین خانواده‌ای از هدف‌ها، به نام $\mathcal{F}$ ، داده شده است که هر هدف $A \in \mathcal{F}$ زیرمجموعه‌ای از X است. بلا هرگاه همه عناصر دست‌کم یک هدف را بگیرد پیروز می‌شود. او در هر نوبت یک عنصر آزاد و چنگیز b عنصر آزاد می‌گیرد.

را تعداد عناصر آزاد $u(A)$ ، که هنوز هیچ‌یک از عناصرش به چنگیز نرسیده است A برای هدفی مانند $\lambda = b+1$ بگذارید را به آن نسبت می‌دهیم. اگر چنگیز دست‌کم یک عنصر از هدف را گرفته باشد، آن هدف $\lambda - u(A)$ آن می‌گیریم و وزن نشان Φ دیگر برای بلا دست‌یافتنی نیست و وزنش را صفر می‌گیریم. مجموع وزن همه هدف‌های دست‌یافتنی را با می‌دهیم.

آنگاه چنگیز می‌تواند مانع شود که بلا همه عناصر یکی از هدف‌ها $\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda - |A| < 1$ اگر پیش از آغاز بازی لم وزنی را بگیرد. (۵)

اثبات. حرکت نخست بلا وزن هر هدفی را که درگیر می‌کند حداکثر λ برابر می‌کند. پس بلافاصله پس از این حرکت، $\Phi < 1$.

از آن پس، چنگیز هر یک از b عنصر خود را بر اساس قاعده زیر انتخاب می‌کند. برای هر عنصر آزاد، وزن همه هدف‌های دست‌یافتنی شامل آن عنصر را جمع می‌کند و عنصری را می‌گیرد که این مجموع برایش بیشینه است.

حرکت بعدی بلا را در نظر بگیرید و آن عنصر را x بنامید. پس از هر b انتخاب چنگیز، مجموع وزن هدف‌های دست‌یافتنی شامل x برابر عددی مانند L است. هنگام هر انتخاب چنگیز، x هنوز آزاد بود. بنابراین عنصری که چنگیز انتخاب کرد مجموع وزنی دست‌کم L داشت و گرفتن آن، همه آن هدف‌ها را از بین برد. در مجموع b انتخاب، چنگیز وزن کل را دست‌کم bL کاهش داده است.

برابر می شود؛ پس وزن کل به اندازه λ را در بر دارد x را می گیرد. وزن هر هدف باقی مانده ای که x سپس بلا می ماند 1 افزایش نمی یابد و همواره کمتر از Φ افزایش می یابد. در نتیجه، پس از حرکت های بلا مقدار $(\lambda-1)L=bL$ است. پس بلا نمی تواند هیچ هدفی را کامل کند. لم ثابت شد 1 اما وزن یک هدف کامل شده برابر

حرکت نخست بلا به دفاع نیاز داریم. در این مدت t فرض کنید فقط در نیز کاربرد دارد؟ K_{∞} چرا لم متناهی برای $KN, N=2(b+1)t$ سر دارند. گراف کامل متناهی $2(b+1)t$ یال رنگ می شود و این یال ها حداکثر $(b+1)t$ حداکثر به آن می دهیم KN ظاهر می شود، نامی متفاوت از میان رأس های K_{∞} را در نظر بگیرید. هر بار که یک رأس واقعی از اگر راهبرد متناهی چنگیز یالی را بخواهد که یکی از نام هایش هنوز استفاده نشده است، یک رأس واقعی تازه را به آن نام KN سر یال ظاهر می شود. بدین ترتیب هر راهبرد دفاعی روی N دور حداکثر t نسبت می دهیم. نام ها کافی اند، زیرا در منتقل می شود K_{∞} حرکت نخست بازی روی t به

پ) کران های $T_1(r)$

(۶) (r_2) رأسی یک هدف متشکل از همه r هر کلیک KN روی $t=2r/2-1, N=4t<2r/2+2$. بگذارید. کران پایین پس شرط (5) به صورت $\lambda=2$ داریم، $b=1$ است. برای (Nr) یال خود تعیین می کند. تعداد این هدف ها $(Nr)2-(r_2)<12$ در می آید؛ یا به طور هم ارز $(Nr)2-(r_2)<12$.

برای $r!>25r/2+1$ کافی است نشان دهیم $(Nr)<Nrr!<2r/2+2rr!$ نامساوی (6) را بررسی می کنیم. چون طرف $r+1$ به r از این پس، با گذر از $17!=355687428096000>243.5$ این نامساوی برقرار است، $r=17$ ضرب می شود. پس (7)، و در نتیجه (6)، برای $25/2<6$ ضرب می شود، اما طرف راست تنها در $r+1\geq 18$ چپ در برقرار است $r\geq 17$ همه

$T_1(r)\geq t+1=[2r/2]$. حرکت نخست یک راهبرد دفاعی به چنگیز می دهد. بنابراین t لم وزنی در به آسانی با استقرا بررسی $\sum_{j=0}^r 2^j = 2^{r+1}-2$ قرار می دهیم. تساوی $b=1$ در فرمول (4). کران بالا $T_1(r)\leq (r-3)2^{r-1}+r+1$ می شود. پس

ت) کران های $T_2(r)$

مانند بخش پ، لم وزنی $\lambda=3$ و $b=2$ در اینجا $t=[3r/2]-1, N=6t<6\cdot 3r/2$. اکنون بگذارید. کران پایین بنابراین برای (8) کافی است $(Nr)<Nrr!<6r3r/2r!$ داریم $(Nr)<3(r_2)-1$ هنگامی به کار می رود که دو طرف را می توان مستقیماً مقایسه کرد، $r=30$ برای $r!>6r3r/2+1$.
(۸) $30!=265252859812191058636308480000000, 630316=9516507342594806772904803434496$.

ضرب می شود، در حالی که طرف راست در $r+1\geq 31$ طرف چپ (9) در r طرف نخست بزرگتر است. با افزایش $T_2(r)\geq [3r/2]$ برقرار است و لم وزنی می دهد $r\geq 30$ ضرب می شود. در نتیجه، (9) برای همه $63<12$ را به دست می آوریم. در $T_2(r)\leq \sum_{j=0}^r 2^j = 2^{r+1}-2$ (4)، حتی کران اندکی قوی تر $b=2$ با قرار دادن. کران بالا همچنین $T_2(r)\leq \sum_{j=0}^r 2^j = 2^{r+1}-2$ نتیجه، به طور بدیهی $\sum_{j=0}^r 2^j = 2^{r+1}-2$ از $r+1$ مجموع طرف راست و $r\geq 2$ برای $(r-2)\sum_{j=0}^r 2^j = 2^{r+1}-2$ ، $T_2(r)<r3r-1$ کمتر است. بنابراین

ث) کران یک

در این بخش $b=1$ است. برای $r=2$ ، بلا در نخستین حرکت پیروز می شود؛ پس از این به بعد فرض می کنیم $r\geq 3$. به بازی کمکی ساده زیر نیاز داریم.

لم انتخاب نیمه. فرض کنید گراف F تعداد زوجی رأس دارد. دو بازیکن به نوبت هر بار یک رأس انتخاب نشده را برمی‌گزینند و بازیکن اول آغاز می‌کند. بازیکن اول می‌تواند تضمین کند که میان رأس‌های انتخابی او حداکثر $e(F)/4$ یال از گراف F قرار داشته باشد. در اینجا $e(F)$ تعداد کل یال‌های F است.

اثبات لم. فقط یال‌هایی را دنبال می‌کنیم که بازیکن دوم هنوز هیچ‌یک از دو سرشان را انتخاب نکرده است؛ چنین یالی را **باقی مانده** می‌نامیم. اگر یک یال باقی مانده هنوز s سر انتخاب نشده داشته باشد، وزن $s-2$ را به آن می‌دهیم. در آغاز وزن هر یال $1/4$ ، و در نتیجه وزن کل $e(F)/4$ است.

بازیکن اول رأسی را انتخاب می‌کند که مجموع وزن یال‌های باقی مانده متصل به آن کمینه باشد. با حرکت او، وزن هر یک از این یال‌ها دو برابر می‌شود؛ یعنی وزن کل دقیقاً به اندازه همان مجموع افزایش می‌یابد. سپس بازیکن دوم یک رأس را انتخاب می‌کند و همه یال‌های باقی مانده متصل به آن را از بین می‌برد. پیش از حرکت بازیکن اول، مجموع مربوط به این رأس دست کم به اندازه کمینه انتخاب شده بود و پس از حرکت اول فقط می‌توانست افزایش یابد. پس بازیکن دوم دست کم همان مقدار وزنی را از بین می‌برد که بازیکن اول به تازگی به وزن کل افزوده بود.

بعد از هر جفت حرکت، وزن کل افزایش نمی‌یابد. در پایان، دقیقاً یال‌هایی باقی می‌مانند که هر دو سرشان را بازیکن اول انتخاب کرده است؛ وزن هر یک از آن‌ها 1 است. بنابراین تعداد این یال‌ها از $e(F)/4$ بیشتر نیست. لم ثابت شد.

رأس انتخاب کنید. بلا مجموعه‌های تودرتوی $2n$ شامل V_0 و در گراف نامتناهی مجموعه‌ای $n=r+2$ اکنون بگذارید

وصل باشد V_i با یال سفید به همه رأس‌های u_i را چنان می‌سازد که $u_1, u_2, \dots$ و رأس‌های $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$

همسایه سفید به $s_1 = 2n-1$ انتخاب می‌کند و از آن یال‌های سفید رسم می‌کند تا $u_1 \in V_0$ بلا رأسی. **گام نخست**

دقیقاً $V_0 \setminus \{u_1\}$ به u_1 را می‌سازند. این کار ممکن است: از V_1 دست آورد. این همسایه‌ها مجموعه

یال می‌رود و چنگیز میان دو حرکت بلا حداکثر یکی از آن‌ها را می‌گیرد $2n-1=2s_1-1$.

را کمترین تعداد یال δ_i و V_i را تعداد رأس‌های s_i است، V_i را تعداد یال‌های سیاهی می‌گیریم که هر دو سرشان در e_i

حرکت انجام داده است؛ s_1 تعریف می‌کنیم. در گام نخست، چنگیز حداکثر V_i به دیگر رأس‌های V_i سیاه از یک رأس

$2e_1$ نامساوی آخر از این واقعیت می‌آید که مجموع درجه‌های سیاه رأس‌ها برابر $2e_1 \leq s_1, \delta_1 \leq 2e_1 s_1 \leq 2$.

است.

ساخت V_i از V_{i-1} . در V_{i-1} ، رأسی u_i انتخاب می‌کنیم که دقیقاً δ_{i-1} یال سیاه به دیگر رأس‌های V_{i-1} داشته باشد. خود u_i و همه همسایه‌های سیاه آن را حذف می‌کنیم. از رأس‌های باقی مانده، بزرگ‌ترین زیرمجموعه زوج را برمی‌گزینیم و آن را A می‌نامیم.

همه یال‌های u_i به A آزادند. طبق تعریف A ، هیچ‌یک سیاه نیست. هیچ‌یک سفید هم نیست: در گام‌های قبلی، تنها یال‌های u_j به V_j سفید شده‌اند و مرکز u_j عضو V_j نبوده است. بنابراین هنوز درون هیچ‌یک از مجموعه‌های V_j یال سفیدی وجود ندارد.

گراف F را متشکل از یال‌های سیاهی می‌گیریم که از قبل درون A وجود دارند و در ذهن، بازی لم انتخاب نیمه را روی رأس‌های آن اجرا می‌کنیم. هرگاه بازیکن اول در بازی ذهنی رأسی مانند x را انتخاب کند، بلا یال $u_i x$ را سفید می‌کند. اگر چنگیز در پاسخ یال $u_i y$ را رنگ کند که $y \in A$ و هنوز در بازی ذهنی انتخاب نشده است، می‌گوییم بازیکن دوم y را انتخاب کرده است. در همه حالت‌های دیگر، یک رأس دلخواه هنوز انتخاب نشده از A را به بازیکن دوم می‌دهیم.

یالی که راهبرد به بلا دستور می‌دهد همیشه آزاد است. زیرا اگر چنگیز پیش‌تر یال متصل به یک رأس را سیاه کرده باشد،

را مجموعه رأس‌های V_i . همان هنگام آن رأس به بازیکن دوم داده شده و بازیکن اول دیگر نمی‌تواند آن را انتخاب کند

طبق لم، میان این رأس‌ها حداکثر $s_i = [s_{i-1} - 1 - \delta_{i-1} - 2]$ انتخاب شده به وسیله بازیکن اول می‌گیریم. آنگاه

حرکت بلا حداکثر یک یال s_i یک‌چهارم یال‌های سیاه قدیمی باقی می‌ماند. در طول این گام نیز چنگیز به ازای هر یک از

$e_i \leq e_{i-1} - 1 + s_i$ سیاه تازه می‌افزاید. بنابراین

$1 \leq i \leq n-4$ ، با استقرا ثابت می‌کنیم که برای چرا مجموعه‌ها به اندازه کافی بزرگ می‌مانند؟

و (10) به دست می‌آید s_1 این نتیجه مستقیماً از تعریف $i=1$ ، برای $2n-i-7 \leq s_i \leq 2n-i, \delta_i \leq 5$.

(۱۳)

از (11) داریم $\delta i - 1 \leq 5$ و $s i - 1 \geq 2x - 7$ آنگاه $x = 2n - i$ ثابت شده باشد و بنویسید $i - 1$ فرض کنید حکم برای $s i \leq x$ کم کردن یک واحد اضافی، گرد کردن رو به پایین را در نظر می گیرید. کران بالای $s i \geq (2x - 7) - 5 - 22 = x - 7$. نیز از (11) روشن است

زیرا $e i < s i + x$ پس $s i - k \leq 2kx$ از طرف دیگر $e i \leq s i + s i - 14 + s i - 242 + \dots$ با تکرار (12) به دست می آوریم $\sum k \geq 12k4k = 1$ در بازه مورد نظر $x \geq 16$ و $s i \geq x - 7$ بنابراین تعداد یال های سیاه خارج شونده از یک $s i \geq x - 7$ و $x \geq 16$ در بازه مورد نظر $\sum k \geq 12k4k = 1$ است. پس دست کم از یک رأس، حداکثر پنج یال سیاه $2(s i + x)s i \leq 2 + 2xx - 7 \leq 2 + 329 < 6$ کمتر از $V i$ رأس گام استقرای کامل شد. $\delta i \leq 5$ خارج می شود؛ یعنی

را با $u n - 3$ بلا رأسی. $|V n - 4| \geq 16 - 7 = 9, \delta n - 4 \leq 5$ از (13) نتیجه می شود، $i = n - 4$ برای. **پایان ساخت** انتخاب می کند. پس از حذف خود آن و حداکثر پنج همسایه سیاهش، دست کم $V n - 4$ کمترین تعداد همسایه سیاه در آزاد است. بلا این یال را سفید می کند $u n - 3 u n - 2$ باقی می ماند و یال $u n - 2$ یک رأس

با $u j$ بوده و $V j$ عضو $u k$ باشد، رأس $z < k$ یک کلیک سفید می سازند. در واقع، اگر $u 1, u 2, \dots, u n - 2$ اکنون رأس های $n - 2 = r$ وصل شده است؛ یال جفت آخر را نیز بلا همین حالا رسم کرده است. این کلیک $V j$ یال سفید به همه رأس های رأس دارد.

حرکت و گام پایانی یک حرکت دیگر می خواهد. از کران بالای (13) داریم $s i$ دقیقاً $V i$ ساخت هر که پیش تر بررسی شد، برای همه $r = 2$ با افزودن حالت $\sum i = 1n - 4s i + 1 \leq \sum i = 1n - 42n - i + 1 < 2n = 2r + 2$. $T 1(r) < 2r + 2$. نتیجه می گیریم $r \geq 2$

(ج)

را کاهش $2r/2 \leq T 1(r) \leq 2r/22r/3$ های بزرگ، فاصله میان بهترین کران های شناخته شده r برای. **صورت مسئله** دهید.

توضیح. کران بالا از گبائوئر است و به طور محسوسی از کران یک قوی تر است؛ اما اثبات شناخته شده آن برای این پروژه بیش از اندازه فنی است.

بخش باز. طبق صورت پروژه، در اینجا راه حلی ارائه نمی شود.

۱۵. رابطه بازی های 1:1 و 1:2

رأسی z را برگزینید. در مرحله نخست، بلا هر بار یک یال آزاد از ستاره z می گیرد تا یالی نماند. از $M - 1 \geq 6N$ یال ستاره، چنگیز در هر دور حداکثر یکی را می گیرد؛ پس بلا مجموعه ای S با دست کم $3N$ همسایه سفید برای z به دست می آورد. $s = |S|$ بگذارید. در این مدت چنگیز حداکثر s حرکت کرده، پس گراف سیاه القایی روی S حداکثر s یال دارد. حقیقت ساده ای ثابت می کنیم: هر گراف با s رأس و e یال، مجموعه مستقلی با اندازه دست کم

$$s22e + s \quad (12)$$

دارد. ترتیب تصادفی رأس ها را بگیرید و هر رأس را اگر پیش از همه همسایه هایش آمد انتخاب کنید. رأس های انتخاب شده مستقل اند و رأس درجه d با احتمال $1/(d + 1)$ انتخاب می شود. امید تعداد برابر $\sum v 1/(d(v) + 1)$ و به کمک

$$(\sum a i)(\sum 1 a i) \geq s^2$$

دست کم مقدار (12) است. نامساوی آخر پس از بسط، مجموع $a i/a j + a j/a i \geq 2$ هاست. بنابراین ترتیبی وجود دارد که کران (12) را می دهد.

اینجا $e \leq s$ ، پس در S مجموعه مستقل X با دست‌کم $s/3 \geq N$ رأس هست؛ دقیقاً N رأس آن را نگه دارید.

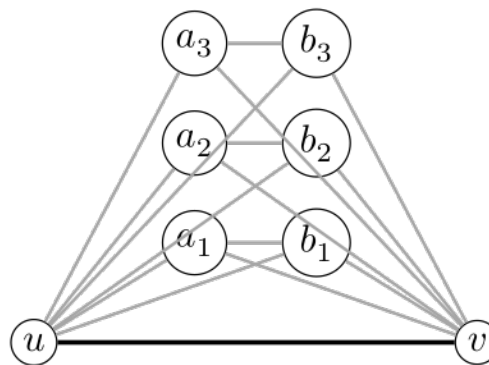
در مرحله دوم، بلا را هبرد برنده بازی $1:2$ را روی X اجرا می‌کند. چنگیز واقعی در هر دور فقط یک یال می‌گیرد. اگر یالش در X و در بازی فرضی هنوز آزاد است، آن را نخستین یال از دو یال سیاه فرضی می‌شماریم؛ وگرنه حرکت واقعی رد نوبت است. سپس تا رسیدن به دو حرکت سیاه فرضی، یال‌های آزاد دلخواه در X را در ذهن سیاه می‌کنیم. هر یال سیاه واقعی در بازی فرضی حساب شده؛ پس حرکت سفید تجویز شده همیشه واقعاً آزاد است. بلا یک Kr سفید در X می‌سازد. همه رأس‌های آن به z سفید وصل‌اند؛ پس همراه z یک $Kr+1$ سفید می‌سازند.

D. گراف‌هایی برای بازی‌ها

۱۶. تخته دوهمند برای قرمز

برای $t \geq 2$ ، گراف H_t را از t نسخه K_4 بسازید که دقیقاً یک یال مشترک uv دارند. دو رأس دیگر نسخه i -ام را a_i, b_i و آن نسخه را صفحه C_i می‌نامیم.

سه صفحه نشان داده شده؛ تعداد صفحه‌ها دلخواه است



شکل ۱۰. گراف «کتاب» از چند نسخه K_4 با یک یال مشترک.

بگیرید

$$t \geq \max\{2, \lceil M-2 \rceil\}.$$

آنگاه H_t دارای $2+2t \geq M$ رأس است. این گراف دوهمند است: با حذف u ، رأس v همه رأس‌ها را وصل نکه می‌دارد و برعکس؛ با حذف یکی از a_i, b_i ، یال مشترک uv هنوز همه صفحه‌ها را به هم وصل می‌کند.

راهبرد قرمز: نخست uv را می‌گیرد. حرکت نخست آبی در صفحه‌ای C_j است. قرمز صفحه دست‌نخورده دیگری C_1 را برمی‌گزیند و یال مقابل a_1b_1 را می‌گیرد؛ صفحه حرکت آبی را C_2 بنامید.

پاسخ‌های محلی:

- در C_2 یک یال آبی e هست. اگر $e=a_2b_2$ ، زوج‌ها ua_2, ub_2 و va_2, vb_2 هستند. اگر مثلاً $e=ua_2$ ، زوج‌ها a_2b_2, ub_2 و va_2, vb_2 هستند. قرمز به حرکت آبی در هر زوج با یال دوم پاسخ می‌دهد.

- اگر آبی برای نخستین بار وارد صفحه دست‌نخورده C_i شود و $a_i b_i$ را بگیرد، قرمز ua_i را می‌گیرد و va_i, vb_i را زوج می‌کند. اگر حرکت نخست یک شعاع، مثلاً ua_i ، باشد، قرمز فوراً $a_i b_i$ را می‌گیرد؛ پس مثلث آبی در آن صفحه ناممکن است.

پاسخ محلی همواره اولویت دارد. اگر لازم نیست، قرمز در صفحه هدف C_1 بازی می‌کند. چهار شعاع آن به دو زوج مقابل

$$P=\{ua_1, vb_1\}, Q=\{ub_1, va_1\}$$

تقسیم شده‌اند. قرمز از زوجی که هنوز نماینده قرمز ندارد یک یال آزاد می‌گیرد. اگر هر دو نماینده دارند، مثلاً $a_i b_i$ را در صفحه دست‌نخورده‌ای می‌گیرد.

قرمز حتماً از هر یک از P, Q یک یال می‌گیرد. اگر آبی نخست وارد زوج شود، پاسخ محلی لازم نیست و قرمز یال دیگر را می‌گیرد؛ اگر از C_1 دوری کند، پس از تمام شدن صفحه‌های دیگر ناچار وارد آن می‌شود. هر دو یال، یکی از P و یکی از Q ، سر مشترک دارند و یال سوم مثلث قرمز یکی از uv, a_1b_1 است.

هر مثلث H_t کاملاً در یک صفحه است. در C_1 ، دو یال مقابل uv, a_1b_1 قرمزند. در C_2 ، هر مثلث آبی هر دو یال یکی از زوج‌های محلی را لازم دارد. در صفحه تازه، پس از شعاع آبی $aibi$ قرمز می‌شود؛ و پس از $aibi$ آبی، مثلث گذرنده از u با uai بسته و مثلث گذرنده از v هر دو یال زوج vai, vbi را لازم دارد. مثلث شامل uv نیز ناممکن است. پس $\omega_R \geq 3$ ، $\omega_B \leq 2$ و قرمز اکیداً می‌برد.

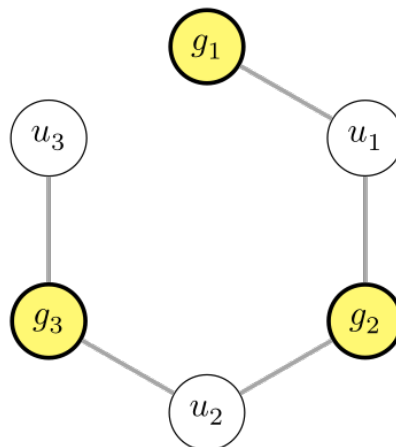
۱۷. شرکت‌ها و نابغه‌ها

الف) شش ضلعی

دور

$$g_1 - u_1 - g_2 - u_2 - g_3 - u_3 - g_1$$

را بگیرید و g_1, g_2, g_3 را نابغه بنامید.



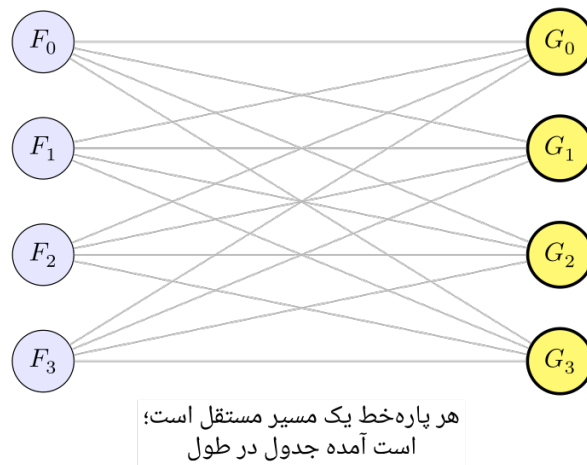
شکل ۱۱. دور شش‌رأسی با سه نابغه.

اگر پتیا نخست نابغه‌ای مانند g_1 را استخدام کند، واسیا رأس مقابل u_2 را می‌گیرد. اگر پتیا بعد u_1 را بگیرد، واسیا g_2 ؛ و اگر u_3 را بگیرد، واسیا g_3 را می‌گیرد. سپس بازی روی دور اجباری است و دومین نابغه باقی‌مانده نیز به واسیا می‌رسد. اگر پتیا از رأس معمولی u_1 آغاز کند، واسیا نابغه مجاور g_1 را می‌گیرد. پتیا ناچار g_2 ، سپس واسیا u_3 ، پتیا u_2 و واسیا g_3 را می‌گیرند. در هر حالت واسیا دو نابغه دارد.

ب) چهار برنامه‌نویس مشهور

افزون بر نابغه‌های G_0, G_1, G_2, G_3 ، چهار برنامه‌نویس مشهور F_0, F_1, F_2, F_3 را بگیرید. برای هر i, j ، F_i را با مسیری مستقل به طول k_{ij} به G_j وصل کنید؛ رأس‌های داخلی شانزده مسیر متمایزند و یال دیگری نیست. طول‌ها:

$$G_0G_1G_2G_3F_013121110F_112111013F_211101312F_310131211 \quad (۱۳)$$



شکل ۱۲. چهار برنامه نویسی مشهور و چهار نابغه.

این ساخت $8 + \sum_{i,j} (k_{ij} - 1) = 176$ رأس دارد؛ ساخت عمومی بخش پ برای $r=4$ ، تعداد $(153) = 455$ رأس دارد.

فاصله یک شرکت تا برنامه نویسی آزاد را کمترین تعداد حرکت آینده شرکت برای رسیدن به او بنامید. پس از حرکت نخست پتیا، واسیا نخستین کارمند را چنین انتخاب می کند:

1. اگر پتیا یک مشهور را گرفته، واسیا مشهور دیگری را می گیرد که به سه نابغه نزدیک تر است؛ مثلاً پس از F_0 ، او F_1 را می گیرد؛ فاصله های پتیا تا G_0, G_1, G_2 برابر $13, 12, 11$ و فاصله های واسیا $12, 11, 10$ است. حالت های دیگر با تغییر نام دوری اند.
2. اگر پتیا نابغه ای را گرفته، آن را G_3 بنامید و واسیا یک مشهور دلخواه را می گیرد. واسیا تا هر یک از G_0, G_1, G_2 حداکثر 13 حرکت، ولی پتیا با گذر از یک مشهور دست کم $10 + 10 = 20$ حرکت نیاز دارد.
3. اگر پتیا از رأس داخلی مسیر $F_i G_3$ آغاز کرده، واسیا F_i را می گیرد. این راه برای پتیا بسته می شود؛ تا هر یک از سه نابغه باید نخست به G_3 و سپس روی دو مسیر دیگر برود: دست کم $1 + 10 + 10 = 21$ حرکت، در برابر حداکثر 13 برای واسیا.

سه نابغه هدف را G_0, G_1, G_2 بنامید. واسیا از مشهور خود روی مسیر مستقیم به هر کدام می رود. اگر پتیا به سوی یکی پیش رود، واسیا یک گام به سوی همان نابغه می رود؛ اگر حرکت پتیا هیچ کدام را نزدیک نکند، واسیا به دورترین نابغه خود یک گام نزدیک می شود. پس از هر حرکت واسیا، فاصله او تا هر سه نابغه از فاصله پتیا کمتر است. یک حرکت درون مسیر فقط یکی از سه فاصله پتیا را یک واحد کم می کند و واسیا همان فاصله را کم می کند. چند فاصله فقط هنگام رسیدن پتیا به یک مشهور یا G_3 هم زمان کم می شوند؛ اما پیش از آن پتیا مسیری با طول دست کم 10 پیموده و واسیا این حرکت ها را میان دورترین نابغه ها توزیع کرده است. در حالت های ۲ و ۳ نیز از ابتدا دست کم $20 - 13 = 7$ حرکت ذخیره هست. بررسی مستقیم اعداد $10, 11, 12, 13$ نشان می دهد نامساوی ها در نقاط شاخه نیز اکید می مانند.

اگر پتیا می تواند نابغه هدفی را بگیرد، پیش از حرکت فاصله اش 1 و فاصله واسیا کمتر از 1 بود؛ پس نابغه از پیش نزد واسیا بود. تناقض. هر سه نابغه به واسیا می رسند.

پ) ساخت عمومی

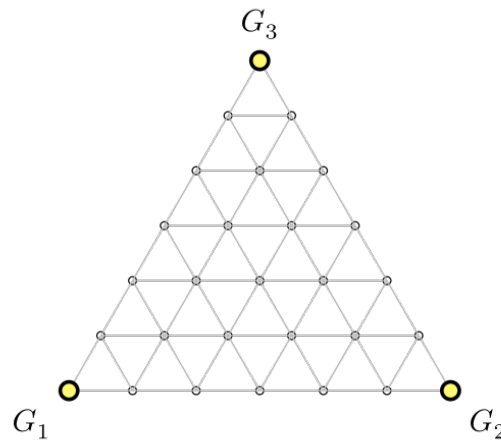
$L = r(r-1)$ بگذارید. برنامه نویسی ها همه بردارهای

$$x = (x_1, \dots, x_r), x_i \in \mathbb{Z} \geq 0, x_1 + \dots + x_r = L \quad (14)$$

هستند. دو برنامه نویسی آشنا هستند اگر با افزودن 1 به یک مختصه و کم کردن 1 از مختصه ای دیگر از یکی به دیگری برسیم. نابغه ها

$$G_i = (0, \dots, 0, L, \dots, 0), 1 \leq i \leq r$$

هستند. گراف متناهی و دارای دقیقاً r نابغه است. برای $r=3$ ، شبکه ای مثلثی با نابغه ها در سه گوشه داریم.



شکل ۱۳. ساخت مثلثی برای سه نابغه.

پتیا ابتدا $A=(A_1, \dots, A_r)$ را استخدام کند. مختصه‌ای، مثلاً A_k ، دست‌کم $L/r=r-1$ است. واسیا نخست برنامه‌نویس

$$B_i=A_i+1 (i \neq k), B_k=A_k-(r-1) \quad (15)$$

را می‌گیرد. همه مختصه‌ها نامنفی و مجموعشان L است.

برای هر شرکت و هر $i \neq k$ ، بیشترین مختصه i -ام میان کارمندانش را نگه می‌داریم: m_i برای پتیا و M_i برای واسیا. بلافاصله پس از تعریف (15)،

$$M_i > m_i (i \neq k). \quad (16)$$

واسیا این نامساوی‌ها را حفظ می‌کند. در یک حرکت پتیا، دقیقاً یک مختصه کارمند تازه یک واحد زیاد شده؛ پس حداکثر یکی از نامساوی‌های (16) به تساوی تبدیل و هیچ‌کدام معکوس نمی‌شود. اگر $m_i=M_i=d$ ، واسیا کارمندی S با $S_i=d$ دارد. $d < L$ ، زیرا برای $d=L$ تنها برنامه‌نویس G_i است و نمی‌تواند هم‌زمان در دو شرکت باشد. پس $S_j > 0$ برای یک $j \neq i$. واسیا همسایه

$$S' = S + e_i - e_j \quad (17)$$

را می‌گیرد. این رأس آزاد است، زیرا مختصه i -ام آن $d+1$ و از هر دو بیشینه قبلی بزرگ‌تر است؛ پس دوباره $M_i > m_i$.

اگر تساوی‌ای نیست، واسیا مختصه $i \neq k$ با $M_i < L$ را انتخاب و همان حرکت (17) را انجام می‌دهد. هر حرکت او مجموع $\sum_{i \neq k} M_i$ را یک واحد زیاد می‌کند تا همه بیشینه‌ها L شوند. او پیش‌تر گیر نمی‌کند؛ اگر پتیا استخدام را متوقف کند، واسیا تنها ادامه می‌دهد. برابری $M_i=L$ یعنی واسیا نابغه یکتای G_i را گرفته است. در پایان، همه نابغه‌ها جز شاید G_k ، یعنی دست‌کم $r-1$ نابغه، نزد واسیا هستند.

E. راهبردهای وزنی با یک هدف

لم وزنی ا: هدفهای سفید

ابتدا بازی 1:1. هدفی را زنده می‌نامیم اگر هنوز یال سیاه ندارد. اگر r یال آزاد در آن مانده، وزن $2-r$ و به هدف مرده وزن 0 می‌دهیم. خطر یک یال آزاد، مجموع وزن هدفهای زنده شامل آن است.

چنگیز یالی با بیشترین خطر D را سیاه می‌کند. پتانسیل، یعنی مجموع وزن هدفها، D واحد کم می‌شود. خطر هر یال باقی مانده حداکثر D است. وقتی بلا یکی را سفید کند، وزن هدفهای شامل آن دو برابر می‌شود و پتانسیل حداکثر D زیاد می‌شود. پس در هر دور پتانسیل افزایش نمی‌یابد. در پایان هر هدف کاملاً سفید وزن 1 دارد؛ بنابراین

$$N\mathcal{F} \leq |\sum_{F \in \mathcal{F}} 2 - |F||. \quad (1a)$$

اکنون بازی عمومی $p:q$. چنگیز در هر دور p یال آزاد و سپس بلا حداکثر q یال آزاد را رنگ می‌کنند. هر هدف $F \in \mathcal{F}$ یک مجموعه ناتهی از یال‌هاست و تا وقتی یال سیاه ندارد زنده است. بگذارید

$$\lambda = (p+1)1/q.$$

اگر $r(F)$ یال آزاد در هدف زنده مانده، وزنش $w(F) = \lambda - r(F)$ است. خطر یال e ، مجموع وزن هدفهای زنده شامل آن است. **راهبرد چنگیز.** هر یک از p یالش را با بیشترین خطر کنونی انتخاب می‌کند. خطرهای انتخاب شده $d_1 \geq \dots \geq d_p$ و بیشترین خطر پس از حرکت چنگیز d باشد. آنگاه $d \leq d_p$ و وزن کل دست کم pd کم شده است. یک یال سفید وزن هر هدف شاملش را در λ ضرب می‌کند. پیش از یال سفید j -ام، خطر هر یال حداکثر $d - 1 - \lambda j$ است. پس افزایش کل حداکثر

$$(\lambda - 1)d(1 + \lambda + \dots + \lambda^{q-1}) = (\lambda^q - 1)d = pd$$

است. بنابراین دور کامل پتانسیل را زیاد نمی‌کند. دور پایانی ناقص فقط نامساوی را قوی‌تر می‌کند. هر هدف زنده پایانی کاملاً سفید و دارای وزن 1 است؛ پس

$$N\mathcal{F} \leq |\sum_{F \in \mathcal{F}} (p+1) - |F||/q. \quad (1)$$

برای $p=q=1$ ، فرمول (1) همان فرمول (1a) می‌شود.

۱۸. کلیک‌های سفید

برای هر مجموعه k -رأسی، همه $(k-2)$ یال درونی یک هدف‌اند. در بخش الف از فرمول (1a) و در بخش ب از فرمول (1) استفاده می‌کنیم. برای بخش پ بگذارید

$$k = \lceil 2q \log p + 1n \rceil + 2.$$

چون $k-1 > 2q \log p + 1n$

$$(nk)(p+1) - (k-2)/q \leq nk(p+1) - k(k-1)/(2q) < 1.$$

اگر $k > n$ حکم بدیهی است؛ اگر $k \leq n$ ، بخش ب وجود کلیک سفید k -رأسی را رد می‌کند. در هر دو حالت

$$\omega(W) \leq k-1 = \lceil 2q \log p + 1n \rceil + 1.$$

بازی 1:1 با $p=q=1$ به دست می‌آید.

۱۹. دوره‌های همیلتونی سفید

$h(W)$ تعداد دوره‌های همیلتونی گراف سفید باشد؛ نقطه آغاز و جهت پیمایش دور را عوض نمی‌کنند. در Kn تعداد $(n-1)!/2$ دور هست؛ رأس آغاز را ثابت، بقیه را مرتب و به سبب دو جهت بر ۲ تقسیم می‌کنیم. هر دور n یال دارد. در بخش الف از (1a) و در بخش ب از (1) استفاده می‌کنیم؛ در نتیجه

$$h(W) \leq [(n-1)!2(p+1)n/q].$$

برای $p=q=1$ ، مخرج $2n+1$ است. اگر عبارت درون کف کمتر از ۱ باشد، دور همیلتونی سفید وجود ندارد؛ این همان بخش پ است.

۲۰. خانواده‌ای از هدف‌های سفید

این دقیقاً لم وزنی I است: هدف‌های F همان اعضای $\mathcal{F}$ هستند؛ بخش الف از فرمول (1a) و بخش ب از فرمول (1) نتیجه می‌شود.

لم وزنی II: سهم تقریباً درست یال‌های سیاه

ابتدا بازی 1:1. $c > 1$ و سپس $s > 1$ را آن قدر نزدیک ۱ بگیرید که $s-1 \leq 1-s-c$. به هدف A وزن $aAswA-cbA$ بدهید. خطر یال برابر

$$(1-s-c)\sum A \ni e aAswA-cbA$$

است. یال سیاه با خطر بیشینه D، پتانسیل را D کم می‌کند؛ یال سفید بعدی آن را حداکثر $(s-1)D/(1-s-c) \leq D$ زیاد می‌کند. پس پتانسیل رشد نمی‌کند. با $c \downarrow 1$ ، سهم $1/(c+1)$ از پایین به $1/2$ نزدیک می‌شود.

حالت عمومی $p:q$. برای هر هدف A, bA, wA تعداد یال‌های سفید و سیاه فعلی باشند. نخست

$$c > qp$$

و سپس $s > 1$ را آن قدر نزدیک ۱ برگزینید که

$$sq-1 \leq p(1-s-c). \quad (۲)$$

چنین s ای هست، زیرا با $s \downarrow 1$ ، دو طرف پس از تقسیم بر $s-1$ به ترتیب به q و $pc > q$ میل می‌کنند. وزن هدف

$$aAswA-cbA \quad (۳)$$

است. یال سفید وزن را در s و یال سیاه در $s-c$ ضرب می‌کند. خطر

$$D(e) = (1-s-c)\sum A \ni e aAswA-cbA$$

است. چنگیز p بار یال با خطر بیشینه می‌گیرد. اگر بیشترین خطر بعدی D باشد، کاهش دست کم pD است. در q یال سفید، خطرهای حداکثر با ضرایب $1, s, \dots, sq-1$ رشد می‌کنند؛ پس افزایش حداکثر

$$s-1 \leq 1-s-cD(1+s+\dots+sq-1) = sq-1 \leq pD.$$

پتانسیل رشد نمی‌کند. می‌توان c را از راست به q/p نزدیک کرد؛ بنابراین $1/(c+1)$ از پایین به $p/(p+q)$ نزدیک می‌شود.

۲۱. درجه سیاه هر رأس

هدف‌ها ستاره‌های رأس‌ها هستند و $av=1$. پتانسیل آغازین n است؛ در پایان برای هر رأس

$$sdW(v) - cdB(v) \leq n.$$

$$dW(v) + dB(v) = n-1 \quad \text{با}$$

$$dB(v) \geq n-1 - \log_s nc + 1. \quad (۴)$$

ابتدا c را چنان نزدیک q/p می‌گیریم که

$$1c+1 > pp+q-\varepsilon^2,$$

و سپس n را چنان بزرگ می‌گیریم که جمله خطای (4)، پس از تقسیم بر $n-1$ ، کمتر از $\varepsilon/2$ باشد. بخش الف همان حالت کوتاه 1:1 است.

۲۲. چگالی درون مجموعه‌های بزرگ

c, s را از II چنان برگزینید که

$$1c+1 > pp+q-\varepsilon^2.$$

ثابت $C=C(p, q, \varepsilon)$ را آن‌قدر بزرگ بگیرید که

$$8(c+1)C \log s < \varepsilon^2, m = \lceil C \log n \rceil.$$

برای هر U با $u = |U| \geq m$ ، همه یال‌های درون U یک هدف با ضریب $aU = n-2u$ هستند. مجموع وزن آغازین کمتر از 1 است:

$$\sum u = mn(nu) n-2u \leq \sum u = m \infty n-u < 1.$$

پس وزن هر هدف نهایی کمتر از 1 است. با $M=(u^2)$ ،

$$n-2usM-(c+1)eB(U) < 1,$$

و بنابراین

$$eB(U)M > 1c+1-2u \log s n(c+1)M. \quad (5)$$

جمله دوم $4 \log s n / ((c+1)(u-1))$ است. برای n بزرگ، از $u \geq m$ داریم $u-1 \geq (C/2) \log n$ ، پس خطا کمتر از $\varepsilon/2$ است. نامساوی (5) حکم بخش ب را می‌دهد؛ بخش الف همان محاسبه با $1:1$ است.

۲۳. چگالی میان دو مجموعه بزرگ

c, s را مانند بالا و C را چنان بگیرید که

$$4(c+1)C \log s < \varepsilon^2, m = \lceil C \log n \rceil.$$

برای هر زوج مرتب از مجموعه‌های مجزای (X, Y) ، با $x = |X|, y = |Y| \geq m$ ، همه یال میانشان هدف و ضریب $n-2(x+y)$ است. تعداد زوج‌های این اندازه حداکثر $nx+y$ ، پس مجموع آغازین کمتر از

$$\sum x, y \geq mn-(x+y) < 1$$

است. مانند قبل

$$eB(X, Y)xy > 1c+1-2 \log s n c+1(1x+1y). \quad (6)$$

برای $x, y \geq m$ ، جمله آخر کمتر از $\varepsilon/2$ است. این بخش ب را ثابت می‌کند؛ بخش الف تخصص 1:1 است.

F. راهبردهای وزنی با دو هدف

لم وزنی III: چند نوع هدف و q یال سفید

ابتدا بازی 1:1. اگر یال سیاه وزن هدف نوع i را در α_i و یال سفید در β_i ضرب کند، شرط

$$\beta_i - 1 \leq 1 - \alpha_i$$

کافی است: حرکت سیاه با خطر بیشینه دست‌کم D کم و حرکت سفید بعدی حداکثر D اضافه می‌کند.

حالت عمومی. در هر دور چنگیز p و بلا q یال می‌گیرند. برای هدف نوع i ، یال سیاه ضریب $\alpha_i \in [0, 1)$ و یال سفید ضریب $\beta_i > 1$ دارد. فرض کنید

$$\beta_i q - 1 \leq p(1 - \alpha_i). \quad (V)$$

$$\alpha_i \times \beta_i \beta_i q - 1 \leq p(1 - \alpha_i) \times \text{شرط توازن یال هدف سفید شد یال هدف سیاه شد}$$

خطر یال آزاد

$$D(e) = \sum_{i, A \ni e} (1 - \alpha_i) w_A$$

است. چنگیز p بار بیشترین خطر را می‌گیرد. اگر پس از آن بیشترین خطر D باشد، کاهش دست‌کم pD است. هدف A از نوع i اگر $t \leq q$ یال سفید این نوبت را داشته باشد، $w_A(\beta_i t - 1)$ به پتانسیل می‌افزاید. از تحذب و صفریون در $t=0$ ،

$$\beta_i t - 1 \leq tq(\beta_i q - 1) \leq ptq(1 - \alpha_i).$$

با جمع روی هدف‌ها و یال‌های سفید، افزایش حداکثر

$$pq \sum e \text{ از حرکت سفید } D(e) \leq pD$$

است. دور کامل پتانسیل را زیاد نمی‌کند و دور ناقص بهتر است. لم ثابت شد.

۲۴. کلیک سفید و درجه‌های سیاه

برای بازی $p:1$ ، $a = p+1$ و

$$t = \lceil 2 \log a \rceil, k = t+2$$

بگذارید. هدف نوع اول هر مجموعه k -رأسی است؛ هدف زنده با r یال آزاد وزن $a-r$ دارد. در این نوع $\alpha=0, \beta=a$ و در شرط (7) تساوی برقرار است.

هدف نوع دوم ستاره رأس v با وزن

$$n - 2sdW(v) - cdB(v)$$

است. $c > 1/p$ را نزدیک $1/p$ و $s > 1$ را نزدیک 1 چنان بگیرید که $s-1 \leq p(1-s-c)$. این نوع نیز شرط (7) را برآورده می‌کند. وزن آغازین هدف‌های کلیک حداکثر

$$nka - k(k-1)/2 \leq a - k/2 \leq 1an$$

و وزن ستاره‌ها $1/n$ است؛ مجموع کمتر از 1. پس کلیک سفید k -رأسی نیست و

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log p + 1n \rceil + 1.$$

برای هر رأس در پایان

$$n - 2sn - 1 - (c+1)dB(v) \leq 1 + 1/an,$$

پس

$$dB(v) \geq n-1 - \log_s((1+1/a)^n)^c + 1.$$

با $c \downarrow 1/p$ و سپس n بزرگ، برای هر رأس

$$dB(v) \geq (p+1-\varepsilon)(n-1).$$

بخش الف حالت $p=1$ است.

۲۵. دو کران در بازی اردوش

(الف)

انتخاب کنید

$$12 < c < 1/\beta - 1.$$

این دقیقاً از $\beta < 2/3$ ممکن است. $s > 1$ را نزدیک 1 چنان بگیرید که

$$s-1 \leq 2(1-s-c). \quad (۸)$$

$\Delta = 1/(c+1) - \beta > 0$ و $C = C(\beta)$ را چنان بزرگ بگیرید که

$$8(c+1)C \log s < \Delta.$$

سپس

$$k = \lceil 2 \log 3n \rceil + 2, m = \lceil C \log n \rceil.$$

دو پتانسیل را جمع می‌کنیم:

1. برای هر k -کلیک زنده، وزن $3-r$ ، با r یال آزاد؛

2. برای هر U ، $|U| \geq m$ ، وزن $n-2|U|seW(U) - ceB(U)$.

بلا پیش از دورهای معمول چنگیز حرکت نخست را انجام می‌دهد. این حرکت بخش اول را حداکثر 3 و بخش دوم را حداکثر s برابر می‌کند. پیش از آن، بخش اول حداکثر

$$(nk)^3 - (k^2) \leq nk^3 - k(k-1)/2 \leq 13n$$

و بخش دوم حداکثر

$$\sum u = mn(nu)n - 2u \leq n^1 - mn - 1 \leq 1n - 1$$

است. پس پس از حرکت نخست بلا، مجموع کمتر از $1/n + s/(n-1) < 1$ است، برای n بزرگ. در لم III با $p=2, q=1$ ، برای نوع

کلیکی $(\alpha, \beta_i) = (0, 3)$ و برای نوع مجموعه‌ای $(s-c, s)$ داریم؛ شرایط از $3-1=2$ و نامساوی (8) می‌آیند. پس پتانسیل کمتر از 1 می‌ماند.

نتیجه نخست:

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log 3n \rceil + 1.$$

برای U با $u \geq m$ ،

$$n-2us(u^2) - (c+1)eB(U) < 1,$$

و بنابراین

$$eB(U)(u_2) > 1c+1-4\log sn(c+1)(u-1).$$

جمله نخست $\beta + \Delta$ و جمله خطا، با انتخاب C ، کمتر از Δ است. پس

$$eB(U) \geq \beta(u_2).$$

(ب)

عدد تازه ای

$$13 < \beta_0 < 23$$

برگزینید و بخش الف را برای آن اجرا کنید. $m = \lceil C \log n \rceil$ باشد. هر مجموعه حداقل m -رأسی در B چگالی دست کم β_0 دارد. از $U_0 = V$ آغاز کنید. تا وقتی $|U_i| \geq m$ ، در $B[U_i]$ رأسی v_i با درجه دست کم $\beta_0(|U_i| - 1)$ بگیرید و U_{i+1} را مجموعه همسایه های آن در U_i قرار دهید. رأس های انتخاب شده کلیک اند.

اگر $r_i = |U_i|$ و $a = \beta_0 / (1 - \beta_0)$

$$r_{i+1} \geq \beta_0(r_i - 1), r_{i+1} + a \geq \beta_0(r_i + a).$$

پس $r_i + a \geq \beta_0 i(n + a)$. فرایند دست کم

$$t = \lceil \log((n+a)/(m+a)) \log(1/\beta_0) \rceil$$

رأس برمی گزیند و

$$\omega(B) \geq \log n - \log \log n - O(1) \log(1/\beta_0). \quad (9)$$

چون $\beta_0 > 1/3$ ، ضریب $\log n$ در (9) اکیداً بزرگتر از $2/\log 3$ است، در حالی که

$$\omega(W) \leq 2 \log \log 3 + O(1).$$

برتری جمله اصلی بر خطای $O(\log \log n)$ غلبه می کند؛ پس برای همه n های به اندازه کافی بزرگ، $\omega(B) > \omega(W)$.

۲۶. بازی $p:q$ و نسبت طلایی

$A = p + 1$ بگذارید. از شرط دوم مسئله

$$1 \log(1 + q/p) > 2q \log A. \quad (10)$$

با پیوستگی، p را اندکی کمتر از $p/(p+q)$ چنان برمی گزینیم که

$$1 \log(1/p) > 2q \log A. \quad (11)$$

این p چگالی تضمین شده گراف سیاه روی مجموعه های بزرگ است. چون $p < p/(p+q)$ ، انتخاب

$$qp < c < 1p - 1$$

ممکن است. سپس $s > 1$ را نزدیک 1 چنان بگیرید که

$$sq - 1 \leq p(1 - s - c). \quad (12)$$

$\Delta = 1/(c+1) - \rho > 0$ و C را چنان بزرگ بگیرید که

$$8(c+1)C \log s < \Delta,$$

و بگذارید

$$k = \lceil 2q \log A n \rceil + 2, m = \lceil C \log n \rceil.$$

دو نوع هدف داریم:

1. برای هر مجموعه k -رأسی، تا وقتی یال سیاه ندارد وزن $A-r/q$ ، که r تعداد یال‌های آزاد است. یال سیاه ضریب 0 و یال سفید ضریب $A1/q$ دارد.

2. برای هر U ، $|U| \geq m$ ، وزن

$$n-2|U|seW(U)-ceB(U).$$

یال سیاه ضریب $s-c$ و یال سفید ضریب s دارد.

برای نوع اول در شرط (7) تساوی برقرار است: $(A1/q)q-1=A-1=p$. برای نوع دوم شرط (12) را داریم؛ پس لم III پس از هر حرکت p -یالی چنگیز و حرکت q -یالی بلا اجرا می‌شود.

بلا نخست بازی می‌کند. پیش از نخستین q یال سفید، مجموع نوع اول حداکثر

$$(nk)A-(k2)/q \leq nkA-k(k-1)/(2q) \leq A-1/qn$$

و پس از آن حداکثر A برابر می‌شود. مجموع نوع دوم پیش از حرکت حداکثر

$$\sum u=mn(nu)n-2u \leq 1n-1$$

و پس از آن حداکثر sq برابر است. بنابراین پس از نخستین q حرکت سفید،

$$A1-1/qn+sqn-1 < 1$$

برای n بزرگ. سپس لم III پتانسیل را کمتر از 1 نگه می‌دارد. کلیک سفید k -رأسی ممکن نیست؛ پس

$$\omega(W) \leq k-1 = \lceil 2q \log p + 1n \rceil + 1. \quad (13)$$

از وزن هدف دوم، برای هر U با $u \geq m$

$$eB(U)(u2) > 1c+1-4 \log sn(c+1)(u-1).$$

برای n بزرگ، جمله خطا کمتر از Δ است، پس

$$eB(U) > p(u2). \quad (14)$$

ساخت حریصانه بخش ۲۵ را تکرار کنید: از $U0=V$ ، تا وقتی $|Ui| \geq m$ ، رأسی با درجه دست کم $p(|Ui|-1)$ در $B[Ui]$ برگزینید و $Ui+1$ را مجموعه همسایه‌هایش بگیرید. اگر $ri=|Ui|$ و $a0=p/(1-p)$

$$ri+1+a0 \geq p(ri+a0).$$

پس

$$\omega(B) \geq \log n - \log \log n - O(1) \log(1/p). \quad (15)$$

از (11)، ضریب $\log n$ در (15) اکیداً بیش از $2q/\log(p+1)$ است؛ ولی از (13)

$$\omega(W) \leq 2q \log(p+1) \log n + O(1).$$

برتری ضرایب اصلی از خطای $O(\log \log n)$ بیشتر است؛ پس برای n بزرگ، $\omega(B) > \omega(W)$.

توضیح نسبت طلایی. شرط نخست مسئله در واقع از شرط دوم نتیجه می‌شود. زیرا

$$(1+q/p)2q \geq (1+1/p)2,$$

پس $p+1 > (1+1/p)2$ با ضرب در $p2$ ، این معادل

$$(p+1)(p2-p-1) > 0$$

یعنی $p > q$ است. نسبت طلایی مرز دقیق در $q=1$ است؛ در اثبات، شرط دوم و قوی‌تر کافی بود.

۲۷. حدس دقیق اردوش

صورت مسئله. بلا و چنگیز روی یال‌های K_n بازی می‌کنند. بلا نخست بازی می‌کند و هر بار یک یال آزاد را سفید می‌کند؛ پس از هر حرکت او، چنگیز دو یال آزاد را سیاه می‌کند. پس از رنگ‌شدن همه یال‌ها، اگر $\omega(B) > \omega(W)$ باشد چنگیز وگرنه بلا برنده است. ثابت یا رد کنید: چنگیز برای هر $n \geq 4$ راهبرد برنده دارد.

بخش باز. طبق صورت پروژ، در اینجا راه‌حلی ارائه نمی‌شود.

پیوست ۲: پویایی و مسابقات

۲۸. سنگ، کاغذ، قیچی روی گراف

نویسنده صورت گسترش یافته: مارک پیمنوف، ۲۰۲۶. بخش اصلی دربارهٔ درخت از مرحلهٔ نهایی المپیاد «ویسشایا پروبا» در سال ۲۰۲۴، پایهٔ یازدهم، مسئلهٔ ۱۱.۵ است.

اشیا را پیمانه ۳ شماره‌گذاری می‌کنیم، به‌گونه‌ای که A_i بر A_{i+1} پیروز شود.

الف) درخت

آیده. روی درخت می‌توان رنگ‌ها را از باقیمانده‌های پیمانه ۳ به ارتفاع‌های صحیح بالا برد، به‌طوری‌که ارتفاع دو رأس همسایه حداکثر ۱ تفاوت داشته باشد. در هر دقیقه، هر رأس فقط بیشترین ارتفاع در همسایگی بستهٔ خود را می‌گیرد.

ریشه‌ای انتخاب کنید و برای رنگ ریشه یک نمایندهٔ صحیح دلخواه بگیرید. سپس با حرکت از ریشه، به هر رأس v عدد صحیح $h(v)$ ، هم‌نهایت با شمارهٔ شیء آن پیمانه ۳، نسبت دهید، به‌گونه‌ای که برای هر یال uv ،

$$h(v) - h(u) \in \{-1, 0, 1\}.$$

پس از انتخاب ارتفاع ریشه، این کار روی درخت یکتا است؛ دوری نیست که شرط‌های متناقض بسازد.

اگر همسایه‌ای ارتفاع $h(v) + 1$ داشته باشد، دقیقاً شیئی را دارد که شیء v را می‌برد و ارتفاع v یک واحد زیاد می‌شود. اگر چنین همسایه‌ای نیست، ارتفاع ثابت می‌ماند. پس پس از یک دقیقه

$$ht+1(v) = \max(\{ht(v)\} \cup \{ht(u) : u \sim v\}). \quad (1)$$

اختلاف ارتفاع همسایه‌ها باز حداکثر ۱ است؛ پس واقعاً نمایش آرایش رنگی تازه را داریم. با تکرار رابطه (۱)،

$$ht(v) = \max\{h_0(u) : d(u, v) \leq t\}. \quad (2)$$

بگذارید $M = \max h_0$. پس از تعداد متناهی دقیقه، گوی ظاهرشده در طرف راست رابطه (۲) رأسی با ارتفاع M را در بر می‌گیرد؛ بنابراین همهٔ ارتفاع‌ها برابر M می‌شوند. همهٔ اشیا یکسان می‌شوند و فرایند می‌ایستد.

ب) زمان دقیق

پاسخ. بیشترین تعداد ممکن دقیقه برابر است با

$$n-1.$$

فرمول (۲) برای هر آرایش آغازین پاسخ دقیق می‌دهد. اگر

$$Z = \{u : h_0(u) = M\},$$

زمان پایدارشدن

$$T = \max_v d(v, Z)$$

است؛ روی درخت n -رأسی، $T \leq n-1$. تساوی روی مسیر $v_1 v_2 \dots v_n$ حاصل می‌شود اگر

$$h_0(v_1) = \dots = h_0(v_{n-1}) = 0, h_0(v_n) = 1.$$

یعنی در v_n شیء A_1 و در بقیه A_0 است. مرز دو نوع در هر دقیقه یک یال جابه‌جا می‌شود و v_1 فقط در دقیقه $n-1$ تغییر می‌کند.

پ) گراف دارای دور

آیده. هر آرایش روی دور یک عدد صحیح دورزدن دارد که با زمان عوض نمی‌شود؛ این عدد برای آرایش ثابت صفر است.

دور ساده

$$C = v_0 v_1 \dots v_{\ell-1} v_0$$

را برگزینید. برای یال جهت‌دار $v_i v_{i+1}$ ، $d_i(t) \in \{-1, 0, 1\}$ تنها عدد هم‌نهیشت پیمانه 3 با تفاضل شماره شیء در v_i و v_{i+1} باشد. $\varepsilon_i(t) = 1$ اگر شیء v_i در این دقیقه عوض شود و در غیر این صورت 0. آنگاه

$$d_i(t+1) = d_i(t) + \varepsilon_{i+1}(t) - \varepsilon_i(t). \quad (3)$$

نیازی به گرفتن باقیمانده طرف راست نیست. مثلاً اگر $d_i = 1$ ، رأس v_i شیء برنده را می‌بیند و حتماً تغییر می‌کند؛ طرف راست 0 یا 1 است. حالت $d_i = -1$ متقارن است. با جمع روی دور،

$$D(C) = \sum_{i=0}^{\ell-1} d_i(t)$$

ناوردا است.

اگر $\ell = 3$ ، اشیای A_0, A_1, A_2 را به ترتیب دور بگذارید. اگر $\ell \geq 4$ ، روی v_0, v_1, v_2, v_3 به ترتیب A_0, A_1, A_2, A_0 و روی بقیه رأس‌های دور A_0 بگذارید. بیرون دور دلخواه است. در هر دو حالت سه تفاضل پیاپی 1 و بقیه 0 هستند؛ پس $D(C) = 3$. اگر تغییرها متوقف شوند، دو سر هر یال شیء یکسان دارند؛ در غیر این صورت یکی دیگری را می‌برد و بازنده باید عوض شود. پس روی گراف همبند، آرایش ثابت تک‌رنگ و $D(C) = 0$ است؛ با ناوردا تناقض دارد. بنابراین تغییرها تا بی‌نهایت ادامه می‌یابند.

ت) تعداد فردی شیء

$m = 2r + 1$ باشد. روی درخت، شماره شیء را به ارتفاع صحیح بالا می‌بریم، اما برای هر یال می‌خواهیم

$$h(v) - h(u) \in \{-r, -r+1, \dots, r\}.$$

نماینده تفاضل پیمانه m یکتا است. رأس دقیقاً وقتی تغییر می‌کند که همسایه‌ای با ارتفاع بیشتر دارد؛ در آن صورت ارتفاعش یک واحد زیاد می‌شود. پس از تغییر هم‌زمان، تفاضل‌ها در همان بازه می‌مانند: اگر یک سر بالاتر است، سر پایین‌تر حتماً زیاد می‌شود و اختلاف از r یا $-r$ بیرون نمی‌رود.

بیشینه سراسری M ثابت است؛ ارتفاع‌ها نامنزولی و حداکثر M هستند. پس

$$\Phi = \sum v(M - h(v))$$

در هر دقیقه‌ای که تغییری رخ دهد اکیداً کم می‌شود. فرایند روی درخت متناهی است.

روی دور، $d_i(t) \in \{-r, \dots, r\}$ را مانند بالا تعریف کنید. رابطه (3) همچنان تساوی صحیح است و $D(C)$ ناوردا می‌ماند. روی سه یال پیاپی تفاضل‌های

$$r, r, 1$$

و روی بقیه 0 بگذارید. مجموع $m = 2r + 1$ است، پس آرایش سازگاری روی دور می‌دهد. برای آن $D(C) = m \neq 0$ ، ولی برای آرایش ثابت $D(C) = 0$. بنابراین روی هر گراف دارای دور، در قانون جدید نیز فرایندی نامتناهی وجود دارد.

۲۹. دو لیگ

نویسنده: مارک پیمتوف، ۲۰۲۶.

برای تیم v ، تراز نهایی در کل مسابقات را

$$s(v) = \#\{\text{بردهای آن}\} - \#\{\text{باخت‌های آن}\}$$

بنامید. مجموع همه ترازها صفر است؛ هر بازی به برنده 1 و بازنده -1 می‌دهد.

الف) دست کم نصف

پس از تقسیم، لیگ اول و دوم مجموعه های A, B باشند. در $\sum_{v \in A} s(v)$ ، بازی میان دو تیم لیگ اول خنثی می شود: یک سر $+1$ و دیگری -1 . فقط بازی های میان دو لیگ می مانند؛ پس

$$\sum_{v \in A} s(v) = \# \{ \text{بردهای لیگ اول بر لیگ دوم} \} - \# \{ \text{بردهای لیگ دوم بر لیگ اول} \}. \quad (۴)$$

راهبرد. لیگ اول در هر حرکت، از میان تیم های باقی مانده تیمی با بیشترین $s(v)$ را انتخاب می کند.

هر حرکت لیگ اول را با حرکت بعدی لیگ دوم زوج کنید. اگر در زوج i -ام a_i, b_i انتخاب شوند، $s(a_i) \geq s(b_i)$ ، زیرا هنگام انتخاب a_i ، b_i هنوز آزاد بود. با جمع روی زوج ها،

$$\sum_{a \in A} s(a) \geq \sum_{b \in B} s(b).$$

مجموع کل صفر است، پس طرف چپ نامنفی است. از رابطه (4)، لیگ اول دست کم نیمی از بازی های میان لیگی را برده است.

ب) چه وقت اکثریت اکید تضمین می شود؟

پاسخ. دقیقاً وقتی

$$n \equiv 2 \pmod{4}.$$

$n=2m$ بگذارید. میان دو لیگ m^2 بازی هست. اگر m فرد باشد، این عدد فرد است و تساوی دقیق ممکن نیست؛ راهبرد بخش الف دست کم نصف و در نتیجه اکثریت اکید را می دهد. این همان $n \equiv 2 \pmod{4}$ است.

برای $n \equiv 0 \pmod{4}$ ، یعنی m زوج، مانع می سازیم. یک تورنمنت منتظم روی $2m+1$ تیم بگیرید: تیم ها را روی دایره شماره گذاری کنید و تیم i تیم بعدی را ببرد. هر تیم m برد دارد. یک تیم را حذف کنید. میان $2m$ تیم باقی مانده، دقیقاً m تیم تراز $+1$ و m تیم تراز -1 دارند.

چون m زوج است، تیم های $+1$ را پیشاپیش زوج زوج و تیم های -1 را جداگانه زوج زوج کنید. لیگ دوم به هر انتخاب لیگ اول با همتای همان تیم پاسخ می دهد. از هر زوج یک تیم به هر لیگ می رسد و مجموع تراز دو لیگ برابر و صفر است. به موجب رابطه (4)، تعداد بردهای میان لیگی شان برابر است؛ پس لیگ اول نمی تواند اکثریت اکید را تضمین کند.