

ЛКТГ: игры на меняющихся графах

Полная редакция условий · версия 7 от 11 августа 2026 года

Проект представляют Максим Дидин, Марк Пименов, Матвей Сурков и ChatGPT.

Проект посвящён играм, в которых граф меняется по ходу партии. Игроки ходят по ещё не посещённым вершинам, ориентируют и раскрашивают рёбра, а в последних задачах сами строят графы с нужными игровыми свойствами. Первые задачи знакомят с основными приёмами; самые трудные посвящены сильным теоремам и пяти открытым пунктам.

Как работает проект

Работать можно индивидуально или в команде постоянного состава. Состав команды фиксируется перед началом работы и до окончания проекта не меняется; переходить из одной команды в другую нельзя. Единого итогового отчёта не требуется. Любой нумерованный или буквенный пункт можно сдавать устно или письменно в любой рабочий день проекта до объявленного финиша. После замечаний исправленный пункт можно сдавать снова. Каждый подпункт можно сдавать отдельно.

Решение должно содержать полное доказательство и учитывать все допустимые ходы соперника. Перебор малых случаев сам по себе доказательством общего утверждения не считается. В решении нужно указать все использованные книги, статьи и программы и ясно отделить самостоятельные рассуждения от результатов, полученных с их помощью.

Звёздочки. Знаком ★ отмечены ровно пять открытых пунктов: 11ж, 11з, 13г, 14е и задача 27. По ним можно сдавать доказанные частные случаи, новые леммы и проверенные вычислительные результаты. Использовать ИИ разрешено только при работе над пунктами, явно отмеченными ★. Во всех остальных пунктах проекта использование ИИ запрещено. При сдаче результата по ★ нужно точно описать использование ИИ и отдельно указать, что доказано участниками, а что получено вычислительно или с помощью ИИ.

Соглашения. Если не сказано иное, графы конечны и просты; длина пути или цикла — число его рёбер. В играх полная информация, случайности нет, пропуск хода запрещён, если не оговорено иное. Если описано немедленное условие победы, игра заканчивается в момент его первого выполнения. Ничья допускается только тогда, когда она явно названа. Сложность указана по шкале от 1/5 до 5/5 для сильных школьников: 1/5 — разминка; 2/5 — задача примерно до часа; 3/5 — сильная задача на занятие; 4/5 — задача на несколько часов; 5/5 — вершина маршрута или мини-проект.

Маршрут

- А.** Непосещённые вершины и добавление рёбер (1–4).
- В.** Динамические ориентации (5–9).
- С.** Раскраска рёбер и кликовые игры (10–15).
- Д.** Графы для игр (16–17).
- Е.** Весовые стратегии с одной целью (18–23).
- Ф.** Весовые стратегии с двумя целями (24–27).
- Г.** Динамика и турниры (28–29).

А. Непосещённые вершины и новые рёбра

1. Игра без возвратов

Сложность: а) 3/5; б) 2/5; в) 3/5; г) 2/5 · Источник: а) Fraenkel-Scheinerman-Ullman, 1993; б), в) — составительские варианты; г) — предложение соавтора

В конечном графе G Петя выбирает вершину s , ставит туда фишку и объявляет её посещённой. Затем Петя и Вася по очереди передвигают фишку по ребру в ещё не посещённую вершину; первым передвигает фишку Вася. Кто не может сделать ход, проигрывает.

а) Докажите, что Вася выигрывает тогда и только тогда, когда в G существует совершенное паросочетание, то есть паросочетание, покрывающее все вершины графа. В частности, при нечётном $|V(G)|$ Петя выигрывает.

б) Изменим правила: каждый игрок может один раз за партию вместо передвижения фишки пропустить ход. Пропуск разрешён и тогда, когда передвинуть фишку невозможно. Докажите, что критерий пункта а) не изменится.

в) Теперь Петя выбирает две различные вершины s и t , ставит в каждую из них по фишке и объявляет обе вершины посещёнными. За ход игрок выбирает одну из фишек и передвигает её по ребру в ещё не посещённую вершину; первым ходит Вася. Для каждого чётного $n \geq 4$ постройте связный граф G на n вершинах, имеющий совершенное паросочетание, и укажите два выбора пары $\{s, t\}$, при одном из которых выигрывает Вася, а при другом — Петя.

г) Предположим, что в G нет ни совершенного паросочетания, ни изолированных вершин. Докажите, что Петя выигрывает не менее чем при двух различных выборах начальной вершины s .

2. Монеты на графе

Сложность: а) 2/5; б) 4/5; в) 2/5; г) 3/5 · Источник: предложение соавтора; пункты (в), (г) — составительские

В каждой вершине конечного связного графа G лежит неотрицательное целое число монет. Петя выбирает стартовую вершину, ставит туда фишку, объявляет вершину посещённой и забирает все монеты из неё. После этого первым передвигает фишку Вася. За ход нужно перейти по ребру в ещё не посещённую вершину и забрать из неё все монеты. Игра заканчивается, когда очередной игрок не может сделать ход. Побеждает набравший больше монет; при равенстве объявляется ничья.

а) Пусть G является путём. Докажите, что Петя может выбрать стартовую вершину и затем играть так, чтобы не проиграть.

б) Докажите то же, если G — произвольное конечное дерево.

в) Докажите то же, если G — цикл.

г) Верно ли это для произвольного конечного связного графа G ?

3. Добавление рёбер до первого нечётного цикла

Сложность: а) 3/5; б) 5/5; в) 3/5 · Источник: а), б) — Canadian Mathematical Olympiad 2019, задача 5; в) — предложение соавтора

На фиксированном множестве из $n \geq 3$ вершин изначально нет рёбер. Петя и Вася по очереди добавляют по одному отсутствующему ребру; начинает Петя. Игрок, чей ход впервые создаёт цикл нечётной длины, немедленно проигрывает.

а) Докажите, что при нечётном n выигрывает Вася.

б) Определите все чётные n , при которых выигрывает Петя.

в) Изменим правила: после первого хода Пети запрещается соединять ребром две изолированные вершины. Докажите, что при каждом чётном n выигрывает Петя.

4. Добавление рёбер до связности

Сложность: 4/5 · Источник: L. Csirmaz, Connected Graph Game

На фиксированном множестве из $n \geq 3$ вершин изначально нет рёбер. Петя и Вася по очереди добавляют по одному отсутствующему ребру; начинает Петя. Игрок, после хода которого граф впервые становится связным, немедленно проигрывает. Определите победителя при каждом $n \geq 3$.

В. Динамические ориентации

5. Фишка и развороты рёбер

Сложность: а) 2/5; б) 4/5 · Источник: Турнир городов 2018/19

Дан связный неориентированный граф хотя бы с двумя вершинами. Петя сначала ориентирует все рёбра и выбирает начальную вершину фишки. После этого игра идёт по раундам. В каждом раунде Петя обязан передвинуть фишку по исходящему ребру, после чего Вася разворачивает ровно одно ребро, инцидентное новой вершине; разрешено развернуть только что пройденное ребро. Если перед ходом Пети исходящего ребра нет, Вася выигрывает. Если игра продолжается бесконечно, выигрывает Петя.

а) Если граф — дерево, докажите, что Петя может выбрать начальное состояние и ходить бесконечно при любых ответах Васи.

б) Если граф содержит цикл, докажите, что Вася при любом начальном состоянии и любых ходах Пети выигрывает за конечное число раундов.

6. Две фишки и развороты стрелок

Сложность: а) 2/5; б) 4/5 · Источник: М. Дидин, 2026; пункт а) — предложение соавтора

На конечном ориентированном графе выбраны две различные вершины A и B . В A стоит фишка Пети, в B — фишка Васи; из A в B существует ориентированный путь. При каждом передвижении фишка идёт по выходящей стрелке, после чего направление пройденного ребра немедленно меняется на противоположное. Фишки могут находиться в одной вершине; положение одной фишки никак не ограничивает движение другой. Петя хочет привести свою фишку в вершину B .

а) Сначала Вася совершает любое конечное число допустимых передвижений своей фишки, возможно ни одного, и после этого больше не ходит. Затем ходит только Петя. Докажите, что после любых ходов Васи Петя может попасть в B .

б) Теперь игроки ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок может либо пропустить ход, либо передвинуть свою фишку. Петя выигрывает, как только его фишка впервые попадает в B ; если этого никогда не происходит, выигрывает Вася. Существует ли исходный ориентированный граф, на котором Вася может помешать Пете выиграть?

Общие правила задач 7–9. На неориентированном графе G игроки Циклист и Ациклист по очереди выбирают ещё не ориентированное ребро и направляют его в любую сторону. Цикл может состоять из стрелок, которые ориентировали разные игроки. Циклист выигрывает немедленно, как только появляется ориентированный цикл длины не менее 3; если все рёбра ориентированы и цикла нет, выигрывает Ациклист. На бесконечном графе Циклист должен создать конечный цикл за конечное число ходов; если этого никогда не происходит, выигрывает Ациклист.

7. 2-вырожденные графы

Сложность: а) 2/5; б) 4/5 · Источник: составительская задача

Граф называется 2-вырожденным, если в каждом его непустом подграфе есть вершина степени не больше 2.

а) Докажите, что граф 2-вырожден тогда и только тогда, когда существует ациклическая ориентация всех его рёбер с входящей степенью каждой вершины не больше 2. В этом пункте игра не ведётся: нужно лишь ориентировать рёбра графа.

б) Пусть G — конечный 2-вырожденный граф. Докажите, что Ациклист выигрывает, если $|E(G)|$ чётно и начинает Циклист, а также если $|E(G)|$ нечётно и начинает Ациклист.

8. Квадратные решётки

Сложность: а) 4/5; б) 3/5 · Источник: ориентационная игра на решётках

а) На бесконечной квадратной решётке с вершинами $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ и рёбрами между вершинами на расстоянии 1 определите победителя, когда первым ходит Циклист и когда первым ходит Ациклист.

б) Пусть $m, n \geq 1$, а $P_m \square P_n$ — конечная прямоугольная решётка, где P_k обозначает путь на k вершинах. Докажите, что Ациклист выигрывает, если m и n одной чётности и начинает Циклист, а также если m и n разной чётности и начинает Ациклист.

9. Игра Боллобаша-Сабо

Сложность: а) 4/5; б) 4/5; в) 5/5; г) 2/5; д) 2/5; е) 2/5 · Источник: Bollobás-Szabó, 1998

Сток — вершина, из которой не выходит ни одной стрелки; источник — вершина, в которую не входит ни одной стрелки.

Через $v(H)$ и $e(H)$ обозначим число вершин и число рёбер графа H . Конечный простой граф H назовём минимальным плотным ядром, если

$$v(H) \geq 3, \quad e(H) = 2v(H) - 2,$$

но для каждого собственного подграфа $F \subsetneq H$ с $v(F) \geq 3$ выполнено $e(F) \leq 2v(F) - 3$.

- а) Докажите, что на любом конечном простом 4-регулярном графе Циклист, ходя первым, имеет выигрышную стратегию.
- б) Игра идёт на минимальном плотном ядре H . Первым ходит Ациклист, вторым — Циклист. В этом пункте игроки ориентируют все рёбра H , даже если ориентированный цикл появился раньше. Докажите, что Циклист может гарантировать, что итоговая ориентация H не имеет стоков.
- в) На минимальном плотном ядре H Циклист ходит первым. Докажите, что он может играть так, чтобы либо появился ориентированный цикл, либо после ориентации всех рёбер итоговая ориентация не имела стоков или не имела источников.
- г) Выведите теорему Боллобаша-Сабо: если конечный простой граф G имеет $N \geq 3$ вершин и не менее $2N - 2$ рёбер, то Циклист, ходя первым, имеет выигрышную стратегию.
- д) Докажите, что на любом конечном простом 4-регулярном графе Циклист выигрывает независимо от того, кто сделал первый ход. Далее пусть простой граф с N вершинами клеточно вложен в замкнутую связную ориентируемую поверхность рода $g \geq 1$, а граница каждой грани имеет длину 4. Найдите число его рёбер и докажите, что Циклист выигрывает при обоих порядках хода.
- е) Корневым шаром радиуса R назовём подграф, порождённый вершинами на расстоянии не более R от отмеченного центра. Для каждого $R \geq 0$ постройте конечный простой граф G_R и вершину v_R , для которых корневой шар радиуса R с центром v_R изоморфен корневому шару радиуса R квадратной решётки, но при каждом из двух порядков хода победитель на G_R противоположен победителю в соответствующей игре на бесконечной решётке. Все параметры конструкции укажите явно.
- Первоисточник: B. Bollobás, T. Szabó, The oriented cycle game, Discrete Mathematics 186 (1998), 55–67.

С. Раскраска рёбер и кликовые игры

Для графа H обозначим через $\omega(H)$ размер наибольшей клики, а через $\alpha(H)$ — размер наибольшего независимого множества.

10. Первый одноцветный треугольник

Сложность: 2/5 · Источник: Simon Marais Mathematics Competition 2017, A1; обобщение

Пусть $n \geq 5$. Синий и Красный по очереди красят свободные рёбра K_n в свой цвет; начинает Синий. Игрок немедленно выигрывает, когда три ребра его цвета впервые образуют треугольник. Если все рёбра окрашены и такого треугольника ни у кого нет, объявляется ничья. Определите исход при правильной игре.

11. Симметричная игра Эрдёша

Сложность: а) 2/5; б) 2/5; в) 2/5; г) 3/5; д) 3/5; е) 5/5; ж★) открытая; з★) открытая · Источник: Erdős; Malekshahian-Spiro, 2026; Cambie-Provoost, 2025

Пусть $n \geq 3$. На рёбрах K_n Красный и Синий по очереди выбирают по одному свободному ребру и красят его в свой цвет; начинает Красный. После окраски всех рёбер Красный выигрывает, если его наибольшая клика строго больше синей; при равенстве или меньшем размере выигрывает Синий. Обозначим графы красных и синих рёбер через R и B соответственно.

- а) Докажите, что Красный всегда может гарантировать $\omega(R) \geq \omega(B)$.
- б) Докажите, что Синий всегда может гарантировать

$$\omega(R) \leq \omega(B) + 1.$$

в) Пусть вместо полного графа доской служит произвольный конечный граф G хотя бы с одним ребром. Красный и Синий по очереди красят его свободные рёбра, начинает Красный. Докажите, что Красный может гарантировать $\omega(R) \geq \omega(B)$, а Синий может гарантировать $\omega(R) \leq \omega(B) + 1$. В частности, при правильной игре разность кликовых чисел равна 0 или 1.

г) Предположим, что на K_n Красный может гарантировать строгую победу. Докажите, что на K_{n+1} Синий имеет выигрышную стратегию.

д) Предположим, что на K_n Красный может гарантировать строгую победу. Докажите, что на K_{n+2} Синий имеет выигрышную стратегию.

е) Пусть $n > 100$, и предположим, что на K_n Красный может гарантировать строгую победу. Докажите, что на K_{n+3} Синий имеет выигрышную стратегию.

ж★) Докажите или опровергните: существует такое натуральное число N , что для каждого $n \geq N$, если на K_n Красный может гарантировать строгую победу, то на K_{n+4} Синий имеет выигрышную стратегию.

з★) Докажите или опровергните: для каждого $n \geq 3$ при правильной игре выигрывает Синий.

12. Смещённая игра 1 : 2

Сложность: а) 1/5; б) 2/5 · Источник: составительская задача

Пусть $n \geq 3$. Белла и Чингиз играют на рёбрах полного графа K_n ; начинает Белла. В каждом раунде Белла красит одно свободное ребро белым, после чего Чингиз красит два свободных ребра чёрным, а если их осталось меньше двух — все оставшиеся. После окраски всех рёбер Чингиз выигрывает, если наибольшая чёрная клика строго больше наибольшей белой; иначе выигрывает Белла.

а) Если W — граф белых рёбер, объясните равенство $\omega(\text{чёрного графа}) = \alpha(W)$.

б) При $n = 4$ постройте явную выигрышную стратегию Чингиза.

13. Белла и Чингиз на K_n

Сложность: а) 3/5; б) 4/5; в) 5/5; г★) открытая · Источник: ЮМТ 2025, гранд-финал, задача 3; Erdős; Cambie-Provoost, 2025

Пусть $n \geq 3$ и $k \geq 1$ — целые числа. Белла и Чингиз играют на полном графе K_n ; начинает Белла. В каждом раунде Белла красит одно свободное ребро белым. Если после этого свободные рёбра остались, Чингиз красит k из них чёрным, а если их меньше k — все оставшиеся. Игра заканчивается сразу после окраски последнего свободного ребра. Чингиз выигрывает тогда и только тогда, когда наибольшая чёрная клика строго больше наибольшей белой.

а) Пусть $n > 3$ чётно и $k = 4$. Постройте явную выигрышную стратегию Чингиза.

б) Пусть $n > 3$ чётно и $k = 3$. Постройте явную выигрышную стратегию Чингиза.

в) Пусть теперь $n > 3$ нечётно и $k = 3$. Постройте явную выигрышную стратегию Чингиза.

г★) Докажите или опровергните: при $k = 2$ Чингиз имеет выигрышную стратегию для каждого чётного $n > 3$.

14. Белая клика на бесконечной доске

Сложность: а) 3/5; б) 3/5; в) 4/5; г) 5/5; д) 5/5; е★) открытая · Источник: а) Pekeč, 1996; б) составительская задача; в), г) Beck, 2002, Pekeč, 1996; д) Beck, 2002; е) Beck, 2002, Gebauer, 2012

Пусть $b \geq 1$ и $r \geq 2$ — целые числа. На рёбрах счётного полного графа K_∞ Белла и Чингиз играют следующим образом. В каждом раунде Белла красит одно свободное ребро белым, после чего Чингиз красит b свободных рёбер чёрным. Белла выигрывает сразу после появления белой клики K_r . Через $T_b(r)$ обозначим наименьшее число ходов Беллы, за которое она может гарантировать победу.

а) Докажите, что для любых целых $b \geq 1$ и $r \geq 2$ Белла имеет выигрышную стратегию; в частности, число $T_b(r)$ конечно.

б) Докажите, что

$$T_b(3) = b + 3.$$

в) При $r \geq 17$ докажите, что

$$\lfloor 2^{r/2} \rfloor \leq T_1(r) \leq (r - 3)2^{r-1} + r + 1.$$

г) При $r \geq 30$ докажите, что

$$\lfloor 3^{r/2} \rfloor \leq T_2(r) \leq \sum_{j=0}^{r-2} j3^j + r + 1 < r3^{r-1}.$$

д) Докажите оценку Бека

$$T_1(r) < 2^{r+2}.$$

е★) Улучшите при больших r расхождение между лучшими известными оценками

$$2^{r/2} \leq T_1(r) \leq 2r^7 2^{2r/3}.$$

Комментарий. Верхняя оценка в пункте е) принадлежит Гебауэр и заметно сильнее оценки Бека, но известное доказательство слишком техническое для этого проекта.

15. Связь игр $1 : 2$ и $1 : 1$

Сложность: 3/5 · Автор: ChatGPT, 2026

Пусть $N \geq r \geq 2$. На рёбрах K_N Белла красит за раунд одно свободное ребро белым, а затем Чингиз красит два свободных ребра чёрным; если свободных рёбер осталось меньше двух, он красит все оставшиеся. Белла выигрывает сразу после появления белой клики K_r . Если все рёбра окрашены и этого не произошло, выигрывает Чингиз. Предположим, что Белла имеет выигрышную стратегию в этой игре.

Докажите, что при тех же правилах, но с одним чёрным ребром Чингиза за раунд, Белла может гарантировать белую клику K_{r+1} на каждом полном графе K_M , где

$$M \geq 6N + 1.$$

Д. Графы для игр

16. Двусвязная доска для Красного

Сложность: 4/5 · Источник: Malekshahian-Spiro, 2026

Красный и Синий по очереди красят свободные рёбра заранее выбранного конечного графа H , начинает Красный. После окраски всех рёбер Красный выигрывает, если его наибольшая клика строго больше синей; иначе выигрывает Синий.

Для каждого натурального M постройте двусвязный граф H хотя бы на M вершинах, на котором Красный имеет выигрышную стратегию. Здесь двусвязность означает, что граф связан и остаётся связным после удаления любой одной вершины.

17. Фирмы и гении

Сложность: а) 2/5; б) 3/5; в) 4/5 · Источник: ММО 2011; Турнир городов 2011; обобщение

Вершины конечного простого графа — программисты, а рёбра означают знакомства. Фирмы Пети и Васи по очереди нанимают по одному программисту, ещё не нанятому ни одной фирмой; начинает фирма Пети. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно. Каждый следующий нанятый ею программист должен быть знаком хотя бы с одним программистом, уже работающим в этой фирме. Если фирма не может сделать ход, она прекращает набор, а другая продолжает по тем же правилам, пока может. Среди программистов заранее отмечены r гениев.

а) Для $r = 3$ постройте граф, в котором фирма Васи гарантированно наймёт не меньше двух гениев.

б) Для $r = 4$ постройте граф, в котором фирма Васи гарантированно наймёт не меньше трёх гениев.

в) Для каждого $r \geq 2$ постройте граф, в котором фирма Васи гарантированно наймёт не меньше $r - 1$ гениев.

Е. Весовые стратегии с одной целью

Общие правила задач 18-23. Пусть $p, q \geq 1$ — целые числа. Игра идёт по раундам на рёбрах K_n . В каждом раунде сначала Чингиз красит p свободных рёбер чёрным, а затем Белла красит q свободных рёбер белым. Если перед ходом игрока свободных рёбер меньше, чем ему разрешено покрасить, он красит все оставшиеся. Через B и W обозначим итоговые графы чёрных и белых рёбер. В пунктах об игре 1 : 1 предполагается $p = q = 1$. Логарифм без указанного основания является натуральным.

18. Белые клики

Сложность: а) 2/5; б) 4/5; в) 1/5 · Источник: весовой метод Эрдёша-Селфриджа; составительское обобщение

Для $2 \leq k \leq n$ через N_k обозначим число множеств из k вершин, все рёбра между которыми в конце игры белые.

а) В игре 1 : 1 докажите, что Чингиз может гарантировать

$$N_k \leq \left\lfloor \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \right\rfloor.$$

б) В игре $p : q$ докажите, что Чингиз может гарантировать

$$N_k \leq \left\lfloor \binom{n}{k} (p+1)^{-\binom{k}{2}/q} \right\rfloor.$$

в) Выведите соответственно оценки

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_2 n \rceil + 1 \quad \text{и} \quad \omega(W) \leq \lceil 2q \log_{p+1} n \rceil + 1.$$

19. Белые гамильтоновы циклы

Сложность: а) 2/5; б) 3/5; в) 1/5 · Источник: составительская задача; постановка гамильтоновой игры — Chvátal-Erdős, 1978

Пусть $n \geq 3$. Через $h(W)$ обозначим число гамильтоновых циклов графа W ; циклы, отличающиеся только выбором начальной вершины или направлением обхода, считаются одинаковыми.

а) Докажите, что в игре 1 : 1 Чингиз может гарантировать

$$h(W) \leq \left\lfloor \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} \right\rfloor.$$

б) Докажите, что в игре $p : q$ Чингиз может гарантировать

$$h(W) \leq \left\lfloor \frac{(n-1)!}{2^{(p+1)^{n/q}}} \right\rfloor.$$

в) Выведите, что при

$$(p+1)^{n/q} > \frac{(n-1)!}{2}$$

Чингиз может не допустить появления белого гамильтонова цикла.

20. Семейство белых целей

Сложность: а) 2/5; б) 4/5 · Источник: Erdős-Selfridge, 1973; составительское обобщение

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное семейство непустых наборов рёбер графа K_n . Через $N_{\mathcal{F}}$ обозначим число наборов $F \in \mathcal{F}$, все рёбра которых в конце игры белые.

а) Докажите, что в игре 1 : 1 Чингиз может гарантировать

$$N_{\mathcal{F}} \leq \left\lfloor \sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} \right\rfloor.$$

б) Докажите, что в игре $p : q$ Чингиз может гарантировать

$$N_{\mathcal{F}} \leq \left\lfloor \sum_{F \in \mathcal{F}} (p+1)^{-|F|/q} \right\rfloor.$$

21. Чёрная степень каждой вершины

Сложность: а) 3/5; б) 4/5 · Источник: весовой метод Эрдёша-Селфриджа; составительская задача

Через $\delta(G)$ обозначим наименьшую степень вершины графа G .

а) Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n Чингиз в игре 1 : 1 может гарантировать

$$\delta(B) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) (n-1).$$

б) Докажите, что для любых фиксированных $p, q \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n Чингиз может гарантировать

$$\delta(B) \geq \left(\frac{p}{p+q} - \varepsilon \right) (n-1).$$

22. Плотность внутри больших множеств

Сложность: а) 4/5; б) 5/5 · Источник: весовой метод Эрдёша-Селфриджа; составительская задача

Через $e_B(U)$ обозначим число чёрных рёбер с обоими концами в U .

а) Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C = C(\varepsilon)$, для которой при всех достаточно больших n Чингиз в игре 1 : 1 может гарантировать

$$e_B(U) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \binom{|U|}{2}$$

для каждого множества U , содержащего не менее $\lceil C \log n \rceil$ вершин.

б) Докажите, что для любых фиксированных $p, q \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C = C(p, q, \varepsilon)$, для которой при всех достаточно больших n Чингиз может гарантировать

$$e_B(U) \geq \left(\frac{p}{p+q} - \varepsilon\right) \binom{|U|}{2}$$

для каждого множества U , содержащего не менее $\lceil C \log n \rceil$ вершин.

23. Плотность между большими множествами

Сложность: а) 4/5; б) 5/5 · Источник: весовой метод Эрдёша-Селфриджа; составительская задача

Для непересекающихся множеств вершин X и Y через $e_B(X, Y)$ обозначим число чёрных рёбер, соединяющих X с Y .

а) Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C = C(\varepsilon)$, для которой при всех достаточно больших n Чингиз в игре 1 : 1 может гарантировать

$$e_B(X, Y) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) |X| |Y|$$

для любых непересекающихся множеств X, Y , каждое из которых содержит не менее $\lceil C \log n \rceil$ вершин.

б) Докажите, что для любых фиксированных $p, q \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C = C(p, q, \varepsilon)$, для которой при всех достаточно больших n Чингиз может гарантировать

$$e_B(X, Y) \geq \left(\frac{p}{p+q} - \varepsilon\right) |X| |Y|$$

для любых непересекающихся множеств X, Y , каждое из которых содержит не менее $\lceil C \log n \rceil$ вершин.

Г. Весовые стратегии с двумя целями

24. Белая клика и чёрные степени

Сложность: а) 3/5; б) 4/5 · Источник: составительская задача

В игре $p : 1$ каждого раунда Чингиз первым красит p свободных рёбер чёрным, а затем Белла красит одно свободное ребро белым. Если свободных рёбер не хватает, игрок красит все оставшиеся. Через B и W обозначим итоговые графы.

а) Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n Чингиз в игре $1 : 1$ может одной стратегией одновременно гарантировать

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_2 n \rceil + 1 \quad \text{и} \quad \delta(B) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) (n - 1).$$

б) Докажите, что для любых фиксированных $p \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n Чингиз в игре $p : 1$ может одной стратегией одновременно гарантировать

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_{p+1} n \rceil + 1 \quad \text{и} \quad \delta(B) \geq \left(\frac{p}{p+1} - \varepsilon \right) (n - 1).$$

25. Две оценки в игре Эрдёша

Сложность: а) 5/5; б) 2/5 · Источник: М. Дидин, М. Пименов, 2026; составительская версия

Зафиксируем число

$$0 < \beta < \frac{2}{3}.$$

Белла и Чингиз играют на рёбрах K_n . Белла ходит первой и каждый раз красит одно свободное ребро белым; после каждого её хода Чингиз красит два свободных ребра чёрным. Если перед ходом Чингиза свободных рёбер меньше двух, он красит все оставшиеся.

а) Докажите, что существуют постоянная $C = C(\beta)$ и число n_0 , такие, что при каждом $n \geq n_0$ Чингиз может одной стратегией одновременно гарантировать

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_3 n \rceil + 1$$

и

$$e_B(U) \geq \beta \binom{|U|}{2}$$

для каждого множества U , содержащего не менее $\lceil C \log n \rceil$ вершин.

б) Выведите, что при всех достаточно больших n

$$\omega(B) > \omega(W).$$

26. Игра $p : q$ и золотое сечение

Сложность: 5/5 · Источник: М. Дидин, М. Пименов, 2026; составительское обобщение

Пусть

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Зафиксируем целые $p, q \geq 1$, для которых

$$p > \varphi, \quad p + 1 > \left(1 + \frac{q}{p} \right)^{2q}.$$

Белла и Чингиз играют на рёбрах K_n . Белла ходит первой и каждый раз красит q свободных рёбер белым; после каждого её хода Чингиз красит p свободных рёбер чёрным. Если перед ходом игрока свободных рёбер меньше, чем ему разрешено покрасить, он красит все оставшиеся.

Докажите, что при всех достаточно больших n Чингиз может гарантировать

$$\omega(B) > \omega(W).$$

27★. Точная гипотеза Эрдёша

Сложность: открытая задача · Источник: Erdős; R. K. Guy, 1983

Белла и Чингиз играют на рёбрах K_n . Белла ходит первой и каждый раз красит одно свободное ребро белым; после каждого её хода Чингиз красит два свободных ребра чёрным. После окраски всех рёбер Чингиз выигрывает, если $\omega(B) > \omega(W)$, иначе выигрывает Белла.

Докажите или опровергните: Чингиз имеет выигрышную стратегию для каждого $n \geq 4$.

Г. Динамика и турниры

28. Камень, ножницы, бумага на графе

Сложность: а) 2/5; б) 3/5; в) 4/5; г) 4/5 · Автор расширенной постановки: Марк Пименов, 2026 · Исходный пункт а): «Высшая проба», заключительный этап 2024 года, 11 класс, задача 11.5

Пусть G — конечный простой связный граф. В каждой его вершине находится камень, ножницы или бумага. Ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень, камень побеждает ножницы.

Каждую минуту предмет в вершине заменяется на побеждающий его предмет, если такой предмет есть хотя бы в одной соседней вершине. Если его нет, предмет не меняется. Все замены происходят одновременно: при каждой замене учитывается расстановка в начале минуты.

а) Пусть G — дерево. Докажите, что при любой первоначальной расстановке через конечное число минут изменения прекратятся.

б) Пусть в условиях пункта а) дерево G имеет n вершин. Найдите наибольшее возможное число минут до момента, после которого изменения прекратятся. Максимум берётся по всем деревьям на n вершинах и всем первоначальным расстановкам.

в) Пусть G не является деревом. Докажите, что существует первоначальная расстановка, при которой изменения будут происходить бесконечно долго.

г) Вместо трёх предметов рассмотрим нечётное число $m = 2r + 1 \geq 3$ предметов

$$A_0, A_1, \dots, A_{2r},$$

расположенных по циклу; индексы считаются по модулю m . Предмет A_i проигрывает предметам $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{i+r}$.

За минуту предмет A_i в вершине заменяется на A_{i+1} , если хотя бы в одной соседней вершине находится предмет, которому A_i проигрывает; иначе A_i не меняется. Все замены снова происходят одновременно. Докажите для этого правила утверждения пунктов а) и в).

29. Две лиги

Сложность: а) 2/5; б) 3/5 · Автор: Марк Пименов, 2026

В однокруговом турнире без ничьих участвовали n команд: каждые две команды сыграли один матч, и в каждом матче одна из команд победила. После окончания турнира все результаты объявили. Затем две лиги по очереди выбирают ещё не выбранную команду и принимают её к себе. Первой ходит Первая лига. Пропускать ход нельзя.

После распределения команд назовём **межлиговыми** те матчи турнира, участники которых попали в разные лиги.

а) Пусть n чётно. Докажите, что Первая лига может гарантировать: её команды выиграли не менее половины межлиговых матчей.

б) Для каких чётных n Первая лига при любых результатах турнира может гарантировать, что её команды выиграли строго больше половины межлиговых матчей?