

LKTG: بازی‌ها روی گراف‌های در حال تغییر

ویرایش کامل صورت مسئله‌ها - نسخه ۷، ۱۱ اوت ۲۰۲۶

ارائه‌دهندگان پروژه: ماکسیم دیدین، مارک پیمنوف، ماتوی سورکوف و ChatGPT.

این پروژه به بازی‌هایی اختصاص دارد که گراف در جریان آن‌ها تغییر می‌کند. بازیکنان روی رأس‌های بازدیدنشده حرکت می‌کنند، یال‌ها را جهت می‌دهند یا رنگ می‌کنند و در مسائل پایانی خودشان گراف‌هایی با ویژگی‌های بازی‌وار معین می‌سازند. مسائل آغازین ایده‌های اصلی را معرفی می‌کنند و دشوارترین مسائل به قضیه‌های مهم و پنج بخش باز می‌رسند.

شیوه کار پروژه

می‌توانید به‌تنهایی یا در تیمی با اعضای ثابت کار کنید. اعضای تیم پیش از آغاز پروژه تعیین می‌شوند و تا پایان پروژه تغییر نمی‌کنند. گزارش نهایی مشترک لازم نیست. هر مسئله شماره‌دار یا هر بخش حرف‌دار را می‌توان تا مهلت اعلام‌شده، در هر زمان از دوره پروژه، شفاهی یا کتبی تحویل داد. پس از دریافت نظرها می‌توانید نسخه اصلاح‌شده را دوباره ارائه کنید. هر بخش را می‌توان جداگانه تحویل داد.

راه‌حل باید برهانی کامل داشته باشد و همه پاسخ‌های مجاز حریف را در نظر بگیرد. بررسی چند حالت کوچک به‌تنهایی اثبات یک حکم کلی نیست. همه کتاب‌ها، مقاله‌ها و برنامه‌های استفاده‌شده باید ذکر شوند و استدلال مستقل شرکت‌کنندگان باید به‌روشنی از نتایجی که با کمک این منابع به دست آمده‌اند جدا شود.

ستاره‌ها. دقیقاً پنج بخش باز با ★ مشخص شده‌اند: ۱۱ج، ۱۱ح، ۱۳ت، ۱۴ج و مسئله ۲۷. در این مسائل می‌توانید حالت‌های خاص اثبات‌شده، لم‌های تازه یا نتایج محاسباتی بررسی‌شده ارائه کنید. استفاده از هوش مصنوعی فقط در بخش‌هایی مجاز است که صریحاً با ★ مشخص شده‌اند و در همه بخش‌های دیگر پروژه ممنوع است. در ارائه نتیجه برای یک مسئله ستاره‌دار باید دقیقاً توضیح دهید هوش مصنوعی چگونه به کار رفته و روشن کنید کدام قسمت را شرکت‌کنندگان اثبات کرده‌اند و کدام قسمت با محاسبه یا کمک هوش مصنوعی به دست آمده است. **قراردادها.** مگر آن‌که خلافش گفته شود، همه گراف‌ها متناهی و ساده‌اند و طول مسیر یا دور، تعداد یال‌های آن است. همه بازی‌ها با اطلاعات کامل و بدون حرکت تصادفی‌اند. رد کردن نوبت ممنوع است، مگر آن‌که صریحاً مجاز شده باشد. اگر شرط برد فوری تعریف شده باشد، بازی در نخستین لحظه تحقق آن پایان می‌یابد. تساوی فقط هنگامی ممکن است که صریحاً ذکر شده باشد. دشواری برای دانش‌آموزان قوی دبیرستانی از ۱/۵ تا ۵/۵ درجه‌بندی شده است: ۱/۵ گرم‌کردن؛ ۲/۵ تقریباً یک ساعت کار؛ ۳/۵ مسئله‌ای جدی برای یک جلسه؛ ۴/۵ ممکن است چند ساعت زمان برد؛ و ۵/۵ قله مسیر یا یک پروژه کوچک است.

مسیر پیشنهادی

- A. رأس‌های بازدیدنشده و افزودن یال‌ها (۱-۴).
- B. جهت‌دهی‌های پویا (۵-۹).
- C. رنگ‌آمیزی یال‌ها و بازی‌های کلیک (۱۰-۱۵).
- D. گراف‌ها برای بازی‌ها (۱۶-۱۷).
- E. راهبردهای وزنی با یک هدف (۱۸-۲۳).
- F. راهبردهای وزنی با دو هدف (۲۴-۲۷).
- G. پویایی و مسابقات (۲۸-۲۹).

فهرست مطالب

A. رأس‌های بازیدنشده و یال‌های تازه 3	D. گراف‌ها برای بازی‌ها 8
۱. بازی بدون بازگشت.....3	۱۶. تخته دوهمند برای قرمز.....8
۲. سکه‌ها روی گراف.....3	۱۷. حرکت‌ها و نابغه‌ها.....8
۳. افزودن یال‌ها تا نخستین دور فرد.....3	E. راهبردهای وزنی با یک هدف 9
۴. افزودن یال‌ها تا همبندی.....3	۱۸. کلیک‌های سفید.....9
B. جهت‌دهی‌های پویا 4	۱۹. دورهای همپلتونی سفید.....9
۵. مهره و برگرداندن جهت یال‌ها.....4	۲۰. خانواده‌ای از هدف‌های سفید.....9
۶. دو مهره و برگرداندن پیکان‌ها.....4	۲۱. درجه سیاه هر رأس.....10
۷. گراف‌های ۲-تباهیده.....4	۲۲. چگالی درون مجموعه‌های بزرگ.....10
۸. شبکه‌های مربعی.....4	۲۳. چگالی میان دو مجموعه بزرگ.....10
۹. بازی بولوباش-سابو.....5	F. راهبردهای وزنی با دو هدف 11
C. رنگ‌آمیزی یال‌ها و بازی‌های کلیکی 6	۲۴. کلیک سفید و درجه‌های سیاه.....11
۱۰. نخستین مثلث تکرنگ.....6	۲۵. دو کران در بازی اردوش.....11
۱۱. بازی متقارن اردوش.....6	۲۶. بازی $p : q$ و نسبت طلایی.....11
۱۲. بازی نامتقارن ۱:۲.....6	27 ★. حدس دقیق اردوش.....12
۱۳. بلا و چنگیز روی Kn 6	G. پویایی و مسابقات 13
۱۴. کلیک سفید روی تخته نامتناهی.....7	۲۸. سنگ، کاغذ، قیچی روی گراف.....13
۱۵. رابطه بازی‌های 1 : 1 و 2 : 1.....7	۲۹. دو لیک.....13

A. رأس های بازدید نشده و یال های تازه

۱. بازی بدون بازگشت

دشواری: الف (3/5؛ ب (2/5؛ پ (3/5؛ ت (2/5 - منبع: الف (Fraenkel–Scheinerman–Ullman, 1993؛ ب، پ) صورت های تدوین کنندگان پروژه: ت) پیشنهاد یکی از هم نویسان

در گراف متناهی G ، پتیا رأسی به نام s انتخاب می کند، مهره را روی آن می گذارد و آن رأس را بازدید شده اعلام می کند. سپس پتیا و واسیا به نوبت مهره را در امتداد یک یال به رأسی بازدید نشده می برند؛ نخستین حرکت با واسیاست. بازیکنی که نتواند حرکت کند می بازد. الف) ثابت کنید واسیا برنده است اگر و تنها اگر G تطابق کامل داشته باشد؛ یعنی تطابقی که همه رأس ها را بپوشاند. به ویژه، اگر $|V(G)|$ فرد باشد، پتیا برنده است.

ب) قوانین را چنین تغییر دهید: هر بازیکن در طول بازی حداکثر یک بار می تواند به جای حرکت مهره نوبتش را رد کند. رد کردن نوبت حتی وقتی هیچ حرکتی ممکن نیست مجاز است. ثابت کنید معیار بخش الف تغییر نمی کند.

پ) اکنون پتیا دو رأس متمایز s و t را انتخاب می کند، روی هر کدام یک مهره می گذارد و هر دو رأس را بازدید شده اعلام می کند. در هر نوبت، بازیکن یکی از مهره ها را انتخاب کرده و آن را در امتداد یک یال به رأسی بازدید نشده می برد؛ واسیا نخستین حرکت را انجام می دهد. برای هر $n \geq 4$ زوج، گراف همبند G با n رأس و دارای تطابق کامل بسازید و دو انتخاب برای $\{s, t\}$ بدهید که در یکی واسیا و در دیگری پتیا برنده باشد.

ت) فرض کنید G نه تطابق کامل دارد و نه رأس منزوی. ثابت کنید پتیا دست کم برای دو انتخاب متمایز رأس آغازین s برنده است.

۲. سکه ها روی گراف

دشواری: الف (2/5؛ ب (4/5؛ پ (2/5؛ ت (3/5 - منبع: پیشنهاد یکی از هم نویسان؛ پ، ت) از تدوین کنندگان پروژه

در هر رأس از گراف متناهی و همبند G ، تعدادی نامنفی و صحیح سکه قرار دارد. پتیا رأس آغازین را انتخاب می کند، مهره را آن جا می گذارد، رأس را بازدید شده اعلام می کند و همه سکه هایش را برمی دارد. سپس واسیا نخستین حرکت را انجام می دهد. در هر حرکت، مهره باید در امتداد یک یال به رأسی بازدید نشده برود و بازیکن همه سکه های رأس جدید را برمی دارد. وقتی بازیکن بعدی نتواند حرکت کند، بازی پایان می یابد. بازیکنی که سکه بیشتری دارد برنده است؛ برابری، تساوی است.

الف) فرض کنید G یک مسیر است. ثابت کنید پتیا می تواند رأس آغازین را چنان انتخاب کند و سپس چنان بازی کند که نیازد.

ب) همین حکم را برای هر درخت متناهی G ثابت کنید.

پ) همین حکم را وقتی G یک دور است ثابت کنید.

ت) آیا این حکم برای هر گراف متناهی و همبند G درست است؟

۳. افزودن یال ها تا نخستین دور فرد

دشواری: الف (3/5؛ ب (5/5؛ پ (3/5 - منبع: الف، ب) Canadian Mathematical Olympiad 2019, Problem 5؛ پ) پیشنهاد یکی از هم نویسان

با مجموعه ای ثابت از $n \geq 3$ رأس و بدون هیچ یالی آغاز کنید. پتیا و واسیا به نوبت یک یال غایب اضافه می کنند و پتیا آغاز می کند. بازیکنی که حرکتش برای نخستین بار دوری فرد بسازد فوراً می بازد.

الف) ثابت کنید اگر n فرد باشد، واسیا برنده است.

ب) همه مقادیر زوج n را که در آن ها پتیا برنده است تعیین کنید.

پ) قوانین را چنین تغییر دهید: پس از نخستین حرکت پتیا، هیچ یالی نمی تواند دو رأس منزوی را به هم وصل کند. ثابت کنید پتیا برای هر n زوج برنده است.

۴. افزودن یال ها تا همبندی

دشواری: 4/5 - منبع: پیشنهاد یکی از هم نویسان

با مجموعه ای ثابت از $n \geq 3$ رأس و بدون هیچ یالی آغاز کنید. پتیا و واسیا به نوبت یک یال غایب اضافه می کنند و پتیا آغاز می کند. بازیکنی که حرکتش برای نخستین بار گراف را همبند کند فوراً می بازد. برنده را برای هر $n \geq 3$ تعیین کنید.

B. جهت دهی های پویا

۵. مهره و برگرداندن جهت یال ها

دشواری: الف (2/5؛ ب) 4/5 • منبع: Tournament of Towns 2018/19

گراف ساده بدون جهت و همبند G دست کم دو رأس دارد. پتیا ابتدا همه یال ها را جهت می دهد و رأس آغازین مهره را انتخاب می کند. سپس بازی در دورهایی انجام می شود. در هر دور، پتیا باید مهره را روی یک یال خروجی حرکت دهد؛ بعد واسیا دقیقاً جهت یک یال متصل به رأس جدید را معکوس می کند و می تواند همان یالی را که مهره پیموده است معکوس کند. اگر پیش از نوبت پتیا هیچ یال خروجی از محل مهره نباشد، واسیا برنده است. اگر بازی بی نهایت ادامه یابد، پتیا برنده است.

الف) اگر G درخت باشد، ثابت کنید پتیا می تواند وضعیت آغازین را چنان انتخاب کند که در برابر هر پاسخ واسیا برای همیشه حرکت کند.

ب) اگر G دوری داشته باشد، ثابت کنید واسیا مستقل از وضعیت آغازین و حرکت های پتیا پس از تعداد متناهی دور برنده می شود.

۶. دو مهره و برگرداندن پیکان ها

دشواری: الف (2/5؛ ب) 4/5 • منبع: M. Didin, 2026؛ بخش الف پیشنهاد یکی از هم نویسان

دو رأس متمایز A و B در یک گراف جهت دار متناهی انتخاب شده اند. مهره پتیا در A و مهره واسیا در B است و مسیری جهت دار از A به B وجود دارد. هر مهره هنگام حرکت یک پیکان خروجی را دنبال می کند و جهت یال پیموده شده بلافاصله معکوس می شود. هر دو مهره می توانند در یک رأس باشند و محل یک مهره هیچ محدودیتی برای حرکت مهره دیگر ایجاد نمی کند. پتیا می خواهد مهره خود را به B برساند.

الف) ابتدا واسیا هر تعداد متناهی حرکت مجاز، حتی صفر حرکت، با مهره خود انجام می دهد و سپس دیگر حرکت نمی کند. از آن پس فقط پتیا حرکت می کند. ثابت کنید پتیا پس از هر دنباله حرکت های واسیا می تواند به B برسد.

ب) اکنون بازیکنان به نوبت حرکت می کنند و پتیا آغاز می کند. بازیکن در نوبتش می تواند نوبت را رد کند یا مهره خود را حرکت دهد. پتیا به محض آن که مهره اش برای نخستین بار به B برسد برنده می شود؛ اگر این اتفاق هرگز نیفتد، واسیا برنده است. آیا گراف جهت دار آغازینی وجود دارد که واسیا روی آن بتواند مانع برد پتیا شود؟

قوانین مشترک مسائل ۷ تا ۹. روی گراف بدون جهت G ، چرخه ساز و چرخه شکن به نوبت یک یال هنوز جهت گذاری نشده را انتخاب می کنند و آن را در یکی از دو جهت قرار می دهند. یک دور جهت دار می تواند از پیکان هایی ساخته شده باشد که هر دو بازیکن جهت داده اند. چرخه ساز به محض پدید آمدن دور جهت داری با طول دست کم 3 برنده می شود؛ اگر همه یال ها جهت داده شوند و چنین دوری وجود نداشته باشد، چرخه شکن برنده است. روی گراف نامتناهی، چرخه ساز باید در تعداد متناهی حرکت یک دور جهت دار متناهی بسازد؛ اگر این اتفاق هرگز نیفتد، چرخه شکن برنده است.

۷. گراف های ۲-تباهیده

دشواری: الف (2/5؛ ب) 4/5 • منبع: مسئله ای از تدوین کنندگان پروژه

گراف را 2-تباهیده می نامیم اگر هر زیرگراف ناتهی آن رأسی با درجه حداکثر 2 داشته باشد.

الف) ثابت کنید گراف 2-تباهیده است اگر و تنها اگر یال هایش جهت گذاری بدون دوری داشته باشند که درجه ورودی هر رأس حداکثر 2 باشد. در این بخش بازی انجام نمی شود؛ فقط باید یال های گراف را جهت دهید.

ب) فرض کنید G گرافی متناهی و 2-تباهیده است. ثابت کنید اگر $|E(G)|$ زوج باشد و چرخه ساز آغاز کند، چرخه شکن برنده است؛ و نیز اگر $|E(G)|$ فرد باشد و چرخه شکن آغاز کند، چرخه شکن برنده است.

۸. شبکه های مربعی

دشواری: الف (4/5؛ ب) 3/5 • منبع: بازی جهت گذاری روی شبکه ها

الف) شبکه مربعی نامتناهی با مجموعه رأس $\mathbb{Z}^2$ را در نظر بگیرید که دو رأس با فاصله اقلیدسی 1 مجاورند. برنده را هم در حالت آغاز کردن چرخه ساز و هم در حالت آغاز کردن چرخه شکن تعیین کنید.

ب) فرض کنید $m, n \geq 1$ و $P_m \square P_n$ شبکه مستطیلی متناهی باشد، که در آن P_k مسیر دارای k رأس است. ثابت کنید اگر m و n هم پار باشند و چرخه ساز آغاز کند، چرخه شکن برنده است؛ و اگر m و n ناهم پار باشند و چرخه شکن آغاز کند، باز هم چرخه شکن برنده است.

۹. بازی بولوباش-سابو

دشواری: الف (۴/۵؛ ب (۴/۵؛ پ (۵/۵؛ ت (۲/۵؛ ث (۲/۵؛ ج (۲/۵ . منبع: Bollobás–Szabó, 1998

چاه رأسی است که هیچ پیکان خروجی ندارد و چشمه رأسی است که هیچ پیکان ورودی ندارد.

تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف H را به‌ترتیب با $v(H)$ و $e(H)$ نشان می‌دهیم. گراف ساده و متناهی H را هسته چگال کمینه می‌نامیم اگر

$$v(H) \geq 3, \quad e(H) = 2v(H) - 2,$$

و هر زیرگراف درست $F \subsetneq H$ با $v(F) \geq 3$ شرط $e(F) \leq 2v(F) - 3$ را داشته باشد.

الف) ثابت کنید چرخه‌ساز، هنگامی که نخستین حرکت را انجام دهد، روی هر گراف ساده، متناهی و ۴-منتظم راهبرد برد دارد.

ب) بازی روی هسته چگال کمینه H انجام می‌شود. چرخه‌شکن نخست و چرخه‌ساز دوم حرکت می‌کند. در این بخش بازیکنان همه یال‌های H را جهت می‌دهند، حتی اگر دوری جهت‌دار زودتر پدید آمده باشد. ثابت کنید چرخه‌ساز می‌تواند تضمین کند که جهت‌گذاری نهایی H هیچ چاهی نداشته باشد.

پ) چرخه‌ساز روی هسته چگال کمینه H آغاز می‌کند. ثابت کنید او می‌تواند چنان بازی کند که یا دوری جهت‌دار پدید آید، یا جهت‌گذاری نهایی پس از جهت دادن همه یال‌ها هیچ چاهی نداشته باشد، یا هیچ چشمه‌ای نداشته باشد.

ت) قضیه بولوباش-سابو را نتیجه بگیرید: اگر گراف ساده و متناهی G دارای $N \geq 3$ رأس و دست‌کم $2N - 2$ یال باشد، چرخه‌ساز با آغاز بازی راهبرد برد دارد.

ث) ثابت کنید چرخه‌ساز روی هر گراف ساده، متناهی و ۴-منتظم، مستقل از این‌که چه کسی آغاز کند، برنده است. اکنون فرض کنید گراف ساده‌ای با N رأس به‌صورت سلولی در رویه‌ای بسته، همبند و جهت‌پذیر از جنس $g \geq 1$ نشانده شده باشد و طول پیمایش مرزی هر وجه ۴ باشد. تعداد یال‌ها را بیابید و ثابت کنید چرخه‌ساز در هر دو ترتیب حرکت برنده است.

ج) توپ ریشه‌دار شعاع R ، زیرگراف القاشده توسط رأس‌هایی است که فاصله‌شان از یک مرکز مشخص حداکثر R است. برای هر $R \geq 0$ ، گراف ساده و متناهی G_R و رأس v_R را چنان بسازید که توپ ریشه‌دار شعاع R با مرکز v_R با توپ ریشه‌دار شعاع R در شبکه مربعی یکریخت باشد، اما برای هر یک از دو انتخاب بازیکن آغازگر، برنده روی G_R مخالف برنده بازی متناظر روی شبکه نامتناهی باشد. همه پارامترهای ساخت را صریح بیان کنید.

منبع اصلی: B. Bollobás, T. Szabó, The oriented cycle game, Discrete Mathematics 186 (1998), 55–67.

C. رنگ آمیزی یال ها و بازی های کلیک

برای گراف H ، عدد کلیک آن را با $\omega(H)$ و عدد استقلال آن را با $\alpha(H)$ نشان می دهیم.

۱۰. نخستین مثلث تک رنگ

دشواری: ۲/۵ (ب)؛ منبع: Simon Marais Mathematics Competition 2017, A1؛ تعمیم یافته در این پروژه

فرض کنید $n \geq 5$. آبی و قرمز به نوبت یال های بی رنگ K_n را با رنگ خود رنگ می کنند و آبی آغاز می کند. بازیکن به محض آن که سه یال رنگ او برای نخستین بار یک مثلث بسازند برنده می شود. اگر همه یال ها رنگ شوند و هیچ یک چنین مثلثی نداشته باشد، بازی مساوی است. نتیجه بازی بهینه را تعیین کنید.

۱۱. بازی متقارن اردوش

دشواری: الف (۲/۵؛ ب) ۲/۵؛ پ) ۲/۵؛ ت) ۳/۵؛ ث) ۳/۵؛ ج) ۵/۵؛ چ) ۵/۵؛ ح) ۵/۵؛ منبع: Erdős; Malekshahian–Spiro, 2026; Cambie–Provoost, 2025

فرض کنید $n \geq 3$. قرمز و آبی به نوبت یک یال بی رنگ از K_n انتخاب کرده و با رنگ خود رنگ می کنند؛ قرمز آغاز می کند. پس از رنگ شدن همه یال ها، اگر بزرگترین کلیک قرمز اکیداً بزرگتر از بزرگترین کلیک آبی باشد، قرمز برنده است؛ در غیر این صورت آبی برنده است. گراف یال های قرمز و آبی را به ترتیب با R و B نشان می دهیم.

الف) ثابت کنید قرمز همیشه می تواند $\omega(R) \geq \omega(B)$ را تضمین کند.

ب) ثابت کنید آبی همیشه می تواند

$$\omega(R) \leq \omega(B) + 1$$

را تضمین کند.

پ) به جای گراف کامل، گراف متناهی دلخواه G با دست کم یک یال را در نظر بگیرید. قرمز و آبی به نوبت یال های بی رنگ آن را رنگ می کنند و قرمز آغاز می کند. ثابت کنید قرمز می تواند $\omega(R) \geq \omega(B)$ را تضمین کند و آبی می تواند $\omega(R) \leq \omega(B) + 1$ را تضمین کند. بنابراین در بازی بهینه اختلاف دو عدد کلیک برابر ۰ یا ۱ است.

ت) فرض کنید قرمز بتواند روی K_n برد اکید را تضمین کند. ثابت کنید آبی روی K_{n+1} راهبرد برد دارد.

ث) فرض کنید قرمز بتواند روی K_n برد اکید را تضمین کند. ثابت کنید آبی روی K_{n+2} راهبرد برد دارد.

ج) فرض کنید $n > 100$ و قرمز بتواند روی K_n برد اکید را تضمین کند. ثابت کنید آبی روی K_{n+3} راهبرد برد دارد.

چ (★) ثابت یا رد کنید: عدد طبیعی N ای وجود دارد که برای هر $n \geq N$ ، اگر قرمز بتواند روی K_n برد اکید را تضمین کند، آبی روی K_{n+4} راهبرد برد داشته باشد.

ح (★) ثابت یا رد کنید: برای هر $n \geq 3$ ، آبی در بازی بهینه برنده است.

۱۲. بازی نامتقارن ۱:۲

دشواری: الف (۱/۵؛ ب) ۲/۵؛ منبع: مسئله ای از تدوین کنندگان پروژه

فرض کنید $n \geq 3$. پلا و چنگیز روی یال های گراف کامل K_n بازی می کنند و پلا آغاز می کند. در هر دور، پلا یک یال بی رنگ را سفید می کند؛ سپس چنگیز دو یال بی رنگ را سیاه می کند، یا اگر کمتر از دو یال باقی مانده باشد همه آن ها را سیاه می کند. پس از رنگ شدن همه یال ها، اگر بزرگترین کلیک سیاه اکیداً بزرگتر از بزرگترین کلیک سفید باشد، چنگیز برنده است؛ در غیر این صورت پلا برنده است.

الف) اگر W گراف یال های سفید و B گراف یال های سیاه باشد، توضیح دهید چرا $\omega(B) = \alpha(W)$.

ب) برای $n = 4$ ، یک راهبرد برد صریح برای چنگیز ارائه کنید.

۱۳. بلا و چنگیز روی K_n

دشواری: الف (۳/۵؛ ب) ۴/۵؛ پ) ۵/۵؛ ت) ۵/۵؛ منبع: YUMT 2025 Grand Final, Problem 3; Erdős; Cambie–Provoost, 2025

فرض کنید $n \geq 3$ و $k \geq 1$ اعداد صحیح باشند. پلا و چنگیز روی یال های K_n بازی می کنند و پلا آغاز می کند. در هر دور، پلا یک یال بی رنگ را سفید می کند. اگر یال بی رنگی باقی مانده باشد، چنگیز k تای آن ها را سیاه می کند، یا اگر تعدادشان کمتر از k باشد همه را سیاه می کند. بازی با رنگ شدن آخرین یال پایان می یابد. چنگیز برنده است اگر و تنها اگر بزرگترین کلیک سیاه اکیداً بزرگتر از بزرگترین کلیک سفید باشد.

- الف) فرض کنید $n > 3$ زوج و $k = 4$ باشد. یک راهبرد برد صریح برای چنگیز ارائه کنید.
- ب) فرض کنید $n > 3$ زوج و $k = 3$ باشد. یک راهبرد برد صریح برای چنگیز ارائه کنید.
- پ) فرض کنید $n > 3$ فرد و $k = 3$ باشد. یک راهبرد برد صریح برای چنگیز ارائه کنید.
- ت) ثابت یا رد کنید: اگر $k = 2$ باشد، چنگیز برای هر $n > 3$ زوج راهبرد برد دارد.

۱۴. کلیک سفید روی تخته نامتناهی

دشواری: الف (3/5؛ ب (3/5؛ پ (4/5؛ ت (5/5؛ ج (5/5؛ * باز - منبع: الف (Pekeč, 1996؛ ب) تدوین‌کنندگان پروژه؛ پ)، ت (Beck, 2002؛ Pekeč, 1996؛ Beck, 2002؛ Gebauer, 2012؛ ج) Beck, 2002؛ ت)

فرض کنید $b \geq 1$ و $r \geq 2$ اعداد صحیح باشند. پلا و چنگیز روی یال‌های گراف کامل شمارای K_∞ بازی می‌کنند. در هر دور، پلا یک یال بی‌رنگ را سفید می‌کند و سپس چنگیز b یال بی‌رنگ را سیاه می‌کند. پلا به محض پدید آمدن یک کلیک سفید K_r برنده می‌شود. با $T_b(r)$ کمترین تعداد حرکات‌های پلا را نشان می‌دهیم که برای تضمین برد لازم است.

الف) ثابت کنید پلا برای همه اعداد صحیح $b \geq 1$ و $r \geq 2$ راهبرد برد دارد؛ به‌ویژه $T_b(r)$ متناهی است.

ب) ثابت کنید

$$T_b(3) = b + 3.$$

پ) برای $r \geq 17$ ثابت کنید $\lfloor 2^{r/2} \rfloor \leq T_1(r) \leq (r-3)2^{r-1} + r + 1$.

ت) برای $r \geq 30$ ثابت کنید

$$\lfloor 3^{r/2} \rfloor \leq T_2(r) \leq \sum_{j=0}^{r-2} j 3^j + r + 1 < r 3^{r-1}$$

ث) کران بک را ثابت کنید:

$$T_1(r) < 2^{r+2}.$$

ج) * برای r های بزرگ، فاصله میان بهترین کران‌های شناخته‌شده

$$2^{r/2} \leq T_1(r) \leq 2r^7 2^{2r/3}$$

را کاهش دهید.

توضیح. کران بالای بخش ج از گباوئر است و به‌طور محسوسی از کران بک قوی‌تر است، اما اثبات شناخته‌شده آن برای این پروژه بیش از حد فنی است.

۱۵. رابطه بازی‌های 1 : 1 و 1 : 1

دشواری: 3/5 - نویسنده: ChatGPT, 2026

فرض کنید $r \geq 2$ و $N \geq r$. روی یال‌های K_N ، پلا در هر دور یک یال بی‌رنگ را سفید می‌کند و سپس چنگیز دو یال بی‌رنگ را سیاه می‌کند؛ اگر کمتر از دو یال بی‌رنگ باقی مانده باشد، همه آن‌ها را سیاه می‌کند. پلا به محض پدید آمدن کلیک سفید K_r برنده می‌شود. اگر همه یال‌ها رنگ شوند و چنین کلیک پدید نیاید، چنگیز برنده است. فرض کنید پلا در این بازی راهبرد برد دارد.

ثابت کنید اگر قوانین همان باشند، جز این‌که چنگیز در هر دور فقط یک یال سیاه کند، پلا می‌تواند روی هر گراف کامل K_M با

$$M \geq 6N + 1$$

یک کلیک سفید K_{r+1} را تضمین کند.

D. گراف‌ها برای بازی‌ها

۱۶. تخته دوهمبند برای قرمز

دشواری: ۴/۵ • منبع: Malekshahian–Spiro, 2026

قرمز و آبی به نوبت یال‌های بی‌رنگ گراف متناهی و از پیش تعیین شده H را رنگ می‌کنند و قرمز آغاز می‌کند. پس از رنگ شدن همه یال‌ها، اگر بزرگ‌ترین کلیک قرمز اکیداً بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین کلیک آبی باشد، قرمز برنده است؛ در غیر این صورت آبی برنده است. برای هر عدد صحیح مثبت M ، گراف 2-همبند H با دست‌کم M رأس بسازید که قرمز روی آن راهبرد برد داشته باشد. در این جا 2-همبند یعنی گراف همبند است و پس از حذف هر یک رأس نیز همبند می‌ماند.

۱۷. شرکت‌ها و نابغه‌ها

دشواری: الف (۲/۵؛ ب (۳/۵؛ پ (۴/۵ • منبع: Moscow Mathematical Olympiad 2011; Tournament of Towns 2011؛ تعمیم

رأس‌های یک گراف ساده و متناهی برنامه‌نویس‌اند و یال‌ها آشنایی میان آن‌ها را نشان می‌دهند. شرکت‌های پتیا و واسیا به نوبت برنامه‌نویسی را استخدام می‌کنند که هنوز هیچ‌یک از دو شرکت او را استخدام نکرده است؛ شرکت پتیا آغاز می‌کند. هر شرکت می‌تواند نخستین برنامه‌نویس خود را آزادانه انتخاب کند. هر استخدام بعدی باید دست‌کم یک برنامه‌نویس آشنا در همان شرکت داشته باشد. اگر شرکتی نتواند حرکت کند، استخدام را متوقف می‌کند و شرکت دیگر تا زمانی که بتواند، با همان قاعده ادامه می‌دهد. دقیقاً r برنامه‌نویس از پیش به‌عنوان نابغه مشخص شده‌اند.

الف) برای $r = 3$ ، گرافی بسازید که در آن شرکت واسیا بتواند استخدام دست‌کم دو نابغه را تضمین کند.

ب) برای $r = 4$ ، گرافی بسازید که در آن شرکت واسیا بتواند استخدام دست‌کم سه نابغه را تضمین کند.

پ) برای هر $r \geq 2$ ، گرافی بسازید که در آن شرکت واسیا بتواند استخدام دست‌کم $r - 1$ نابغه را تضمین کند.

E. راهبردهای وزنی با یک هدف

قواعد مشترک مسائل ۱۸ تا ۲۳. فرض کنید $p, q \geq 1$ اعداد صحیح اند. بازی به صورت دوری روی یال های K_n انجام می شود. در هر دور، نخست چنگیز p یال آزاد را سیاه می کند و سپس q یال آزاد را سفید می کند. اگر پیش از نوبت بازیکنی تعداد یال های آزاد از تعداد مجاز حرکت او کمتر باشد، همه یال های باقی مانده را رنگ می کند. گراف های نهایی یال های سیاه و سفید را به ترتیب با B و W نشان می دهیم. در بخش های مربوط به بازی ۱ : ۱، داریم $p = q = 1$. هرگاه پایه ی لگاریتم ذکر نشده باشد، منظور لگاریتم طبیعی است.

۱۸. کلیک های سفید

دشواری: الف (۲/۵؛ ب (۴/۵؛ پ (۱/۵ منبع: روش وزنی اردوش-سلفریج؛ تعمیم تدوین کنندگان

برای $2 \leq k \leq n$ ، با N_k تعداد مجموعه های k -رأسی را نشان می دهیم که در پایان بازی همه یال های میان رأس هایشان سفید باشند.

الف) ثابت کنید در بازی ۱ : ۱، چنگیز می تواند تضمین کند که

$$N_k \leq \left\lfloor \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \right\rfloor.$$

ب) ثابت کنید در بازی $p : q$ ، چنگیز می تواند تضمین کند که

$$N_k \leq \left\lfloor \binom{n}{k} (p+1)^{-\binom{k}{2}/q} \right\rfloor.$$

پ) به ترتیب نتیجه بگیرید که

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_2 n \rceil + 1 \quad \text{و} \quad \omega(W) \leq \lceil 2q \log_{p+1} n \rceil + 1.$$

۱۹. دورهای همیلتونی سفید

دشواری: الف (۲/۵؛ ب (۳/۵؛ پ (۱/۵ منبع: مسئله ای از تدوین کنندگان پروژه؛ صورت بندی بازی همیلتونی: Chvátal-Erdős, 1978

فرض کنید $n \geq 3$. تعداد دورهای همیلتونی W را با $h(W)$ نشان می دهیم؛ دورهایی که فقط در انتخاب رأس آغازین یا جهت پیمایش تفاوت دارند، یکسان شمرده می شوند.

الف) ثابت کنید در بازی ۱ : ۱، چنگیز می تواند تضمین کند که

$$h(W) \leq \left\lfloor \frac{(n-1)!}{2^{n+1}} \right\rfloor.$$

ب) ثابت کنید در بازی $p : q$ ، چنگیز می تواند تضمین کند که

$$h(W) \leq \left\lfloor \frac{(n-1)!}{2(p+1)^{n/q}} \right\rfloor.$$

پ) نتیجه بگیرید که اگر

$$(p+1)^{n/q} > \frac{(n-1)!}{2},$$

آنگاه چنگیز می تواند از تشکیل دور همیلتونی سفید جلوگیری کند.

۲۰. خانواده ای از هدف های سفید

دشواری: الف (۲/۵؛ ب (۴/۵ منبع: Erdős-Selfridge, 1973؛ تعمیم تدوین کنندگان

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده ای دلخواه از مجموعه های ناتهی یال های K_n باشد. با $N_{\mathcal{F}}$ تعداد اعضای $F \in \mathcal{F}$ را نشان می دهیم که در پایان بازی همه یال هایشان سفید باشند.

الف) ثابت کنید در بازی ۱ : ۱، چنگیز می تواند تضمین کند که

$$N_{\mathcal{F}} \leq \left\lfloor \sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} \right\rfloor.$$

ب) ثابت کنید در بازی $p : q$ ، چنگیز می تواند تضمین کند که

$$N_{\mathcal{F}} \leq \left\lfloor \sum_{F \in \mathcal{F}} (p+1)^{-|F|/q} \right\rfloor.$$

۲۱. درجهٔ سیاه هر رأس

دشواری: الف (3/5؛ ب) 4/5. منبع: روش وزنی اردوش-سلفریج؛ مسئله‌ای از تدوین‌کنندگان پروژه

کمینهٔ درجهٔ رأس‌های گراف G را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

الف) ثابت کنید برای هر $\varepsilon > 0$ و همهٔ n ‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ، چنگیز در بازی 1 : 1 می‌تواند تضمین کند که

$$\delta(B) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(n-1).$$

ب) ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح ثابت $p, q \geq 1$ ، هر $\varepsilon > 0$ و همهٔ n ‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ، چنگیز می‌تواند تضمین کند که

$$\delta(B) \geq \left(\frac{p}{p+q} - \varepsilon\right)(n-1).$$

۲۲. چگالی درون مجموعه‌های بزرگ

دشواری: الف (4/5؛ ب) 5/5. منبع: روش وزنی اردوش-سلفریج؛ مسئله‌ای از تدوین‌کنندگان پروژه

تعداد یال‌های سیاهی را که هر دو سرشان در U است با $e_B(U)$ نشان می‌دهیم.

الف) ثابت کنید برای هر $\varepsilon > 0$ ، ثابتی مانند $C = C(\varepsilon)$ وجود دارد که برای همهٔ n ‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ، چنگیز در بازی 1 : 1 می‌تواند برای هر مجموعهٔ U با دستکم $\lceil C \log n \rceil$ رأس تضمین کند که

$$e_B(U) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \binom{|U|}{2}.$$

ب) ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح ثابت $p, q \geq 1$ و هر $\varepsilon > 0$ ، ثابتی مانند $C = C(p, q, \varepsilon)$ وجود دارد که برای همهٔ n ‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ، چنگیز می‌تواند برای هر مجموعهٔ U با دستکم $\lceil C \log n \rceil$ رأس تضمین کند که

$$e_B(U) \geq \left(\frac{p}{p+q} - \varepsilon\right) \binom{|U|}{2}.$$

۲۳. چگالی میان دو مجموعهٔ بزرگ

دشواری: الف (4/5؛ ب) 5/5. منبع: روش وزنی اردوش-سلفریج؛ مسئله‌ای از تدوین‌کنندگان پروژه

برای دو مجموعهٔ رأس مجزای X و Y ، تعداد یال‌های سیاه میان X و Y را با $e_B(X, Y)$ نشان می‌دهیم.

الف) ثابت کنید برای هر $\varepsilon > 0$ ، ثابتی مانند $C = C(\varepsilon)$ وجود دارد که برای همهٔ n ‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ، چنگیز در بازی 1 : 1 می‌تواند برای هر دو مجموعهٔ مجزای X, Y ، که هرکدام دستکم $\lceil C \log n \rceil$ رأس دارند، تضمین کند که

$$e_B(X, Y) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) |X| |Y|.$$

ب) ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح ثابت $p, q \geq 1$ و هر $\varepsilon > 0$ ، ثابتی مانند $C = C(p, q, \varepsilon)$ وجود دارد که برای همهٔ n ‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ، چنگیز می‌تواند برای هر دو مجموعهٔ مجزای X, Y ، که هرکدام دستکم $\lceil C \log n \rceil$ رأس دارند، تضمین کند که

$$e_B(X, Y) \geq \left(\frac{p}{p+q} - \varepsilon\right) |X| |Y|.$$

F. راهبردهای وزنی با دو هدف

۲۴. کلیک سفید و درجه‌های سیاه

دشواری: الف (3/5؛ ب) 4/5 - منبع: مسئله‌ای از تدوین‌کنندگان پروژه

در بازی $1 : p$ ، در هر دور نخست چنگیز p یال آزاد را سیاه می‌کند و سپس پلا یک یال آزاد را سفید می‌کند. اگر تعداد یال‌های آزاد کافی نباشد، بازیکن همه یال‌های باقی‌مانده را رنگ می‌کند. گراف‌های نهایی را با B و W نشان می‌دهیم.

الف) ثابت کنید برای هر $\varepsilon > 0$ و همه n ‌های به‌اندازه کافی بزرگ، چنگیز در بازی $1 : 1$ می‌تواند با یک راهبرد، هم‌زمان تضمین کند که

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_2 n \rceil + 1 \quad \text{و} \quad \delta(B) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) (n - 1).$$

ب) ثابت کنید برای هر عدد صحیح ثابت $p \geq 1$ ، هر $\varepsilon > 0$ و همه n ‌های به‌اندازه کافی بزرگ، چنگیز در بازی $1 : p$ می‌تواند با یک راهبرد، هم‌زمان تضمین کند که

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_{p+1} n \rceil + 1 \quad \text{و} \quad \delta(B) \geq \left(\frac{p}{p+1} - \varepsilon \right) (n - 1).$$

۲۵. دو کران در بازی اردوش

دشواری: الف (5/5؛ ب) 2/5 - منبع: م. دیدین، م. پیمنوف، ۲۰۲۶؛ نسخه تدوین‌کنندگان

عدد حقیقی β را چنان ثابت کنید که

$$0 < \beta < \frac{2}{3}.$$

پلا و چنگیز روی یال‌های K_n بازی می‌کنند. پلا آغاز می‌کند و در هر حرکت یک یال آزاد را سفید می‌کند؛ چنگیز پس از هر حرکت او دو یال آزاد را سیاه می‌کند. اگر پیش از حرکت چنگیز کمتر از دو یال آزاد باقی‌مانده باشد، همه آن‌ها را سیاه می‌کند.

الف) ثابت کنید ثابت $C = C(\beta)$ و عدد صحیح n_0 ‌ای وجود دارند که برای هر $n \geq n_0$ ، چنگیز می‌تواند با یک راهبرد، هم‌زمان تضمین کند که

$$\omega(W) \leq \lceil 2 \log_3 n \rceil + 1$$

و

$$e_B(U) \geq \beta \binom{|U|}{2}$$

برای هر مجموعه U با دست‌کم $\lceil C \log n \rceil$ رأس برقرار است.

ب) نتیجه بگیرید که برای همه n ‌های به‌اندازه کافی بزرگ،

$$\omega(B) > \omega(W).$$

۲۶. بازی $p : q$ و نسبت طلایی

دشواری: 5/5 - منبع: م. دیدین، م. پیمنوف، ۲۰۲۶؛ تعمیم تدوین‌کنندگان

فرض کنید

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

اعداد صحیح $p, q \geq 1$ را چنان ثابت کنید که

$$p > \varphi, \quad p + 1 > \left(1 + \frac{q}{p} \right)^{2q}.$$

پلا و چنگیز روی یال‌های K_n بازی می‌کنند. پلا آغاز می‌کند و در هر حرکت q یال آزاد را سفید می‌کند؛ چنگیز پس از هر حرکت او p یال آزاد را سیاه می‌کند. اگر پیش از نوبت بازیکنی تعداد یال‌های آزاد از تعداد مجاز حرکت او کمتر باشد، همه یال‌های باقی‌مانده را رنگ می‌کند.

ثابت کنید برای همه n ‌های به‌اندازه کافی بزرگ، چنگیز می‌تواند تضمین کند که

$$\omega(B) > \omega(W).$$

★. 27 حدس دقیق اردوش

دشواری: مسئله باز • منبع: Erdős; R. K. Guy, 1983

بالا و چنگیز روی یال‌های K_n بازی می‌کنند. بالا آغاز می‌کند و در هر حرکت یک یال آزاد را سفید می‌کند؛ چنگیز پس از هر حرکت او دو یال آزاد را سیاه می‌کند. پس از رنگ شدن همه یال‌ها، اگر $\omega(B) > \omega(W)$ باشد چنگیز برنده است و در غیر این صورت بالا برنده است. ثابت یا رد کنید: چنگیز برای هر $n \geq 4$ راهبرد برد دارد.

G. پویایی و مسابقات

۲۸. سنگ، کاغذ، قیچی روی گراف

دشواری: الف (2/5؛ ب (3/5؛ پ (4/5؛ ت (4/5 • بسط مسئله: مارک پیمنوف، ۲۰۲۶ • بخش اصلی الف): المپیاد "Vysshaya Proba" HSE، مرحله نهایی ۲۰۲۴، پایه یازدهم، مسئله 11.5

فرض کنید G گرافی متناهی، ساده و همبند است. در هر رأس یکی از سه شیء سنگ، قیچی یا کاغذ قرار دارد. قیچی کاغذ را می برد، کاغذ سنگ را می برد و سنگ قیچی را می برد.

در هر دقیقه، اگر در دست کم یکی از رأس های مجاور شیئی باشد که شیء فعلی را می برد، شیء آن رأس با شیء برنده جایگزین می شود؛ در غیر این صورت تغییر نمی کند. همه جایگزینی ها هم زمان انجام می شوند و هر کدام بر پایه آرایش ابتدای همان دقیقه اند.

الف) اگر G درخت باشد، ثابت کنید برای هر آرایش اولیه پس از تعداد متناهی دقیقه همه تغییرها متوقف می شوند.

ب) در شرایط بخش الف، فرض کنید G دارای n رأس است. بیشترین تعداد ممکن دقیقه ها تا توقف همه تغییرها را تعیین کنید؛ بیشینه روی همه درخت های n -رأسی و همه آرایش های اولیه گرفته می شود.

پ) اگر G درخت نباشد، ثابت کنید آرایش اولیه ای وجود دارد که در آن تغییرها برای همیشه ادامه می یابند.

ت) به جای سه شیء، تعداد فرد $m = 2r + 1 \geq 3$ شیء

$$A_0, A_1, \dots, A_{2r}$$

را در نظر بگیرید که به ترتیب روی یک دور قرار گرفته اند؛ اندیس ها به پیمانه m محاسبه می شوند. شیء A_i از اشیای $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{i+r}$ شکست می خورد.

در یک دقیقه، اگر در دست کم یکی از رأس های مجاور شیئی باشد که A_i را می برد، شیء A_i در آن رأس با A_{i+1} جایگزین می شود؛ در غیر این صورت تغییر نمی کند. همه جایگزینی ها باز هم هم زمان اند. برای این قاعده، حکم های بخش های الف و پ را ثابت کنید.

۲۹. دو لیگ

دشواری: الف (2/5؛ ب (3/5 • نویسنده: مارک پیمنوف، ۲۰۲۶

در مسابقاتی دوره ای، تک مرحله ای و بدون تساوی، n تیم شرکت کرده اند: هر دو تیم دقیقاً یک بازی با هم انجام داده اند و در هر بازی دقیقاً یکی از دو تیم برنده شده است. پس از پایان مسابقات همه نتایج اعلام می شوند. سپس دو لیگ به نوبت یکی از تیم های انتخاب نشده را برمیگزینند و به عضویت خود درمی آورند. لیگ اول آغاز می کند و رد کردن نوبت مجاز نیست.

پس از انتخاب همه تیم ها، بازی ای را بین لیگی می نامیم که دو تیم آن عضو دو لیگ متفاوت باشند.

الف) فرض کنید n زوج است. ثابت کنید لیگ اول می تواند تضمین کند که تیم هایش دست کم نیمی از همه بازی های بین لیگی را برده اند.

ب) برای کدام مقادیر زوج n ، لیگ اول می تواند برای هر مجموعه ممکن از نتایج مسابقات تضمین کند که تیم هایش اکیداً بیش از نیمی از همه بازی های بین لیگی را برده اند؟