

4 Проективизация CRL

4.1 Сложение точек на вырожденной кубике

При введении cool ratio функции, мы пользовались таким понятием, как отрезок. Это понятие — чисто евклидово; поэтому, кажется, что cool ratio lemma — чисто евклидов инструмент, и его нельзя применять в общей проективной геометрии (т. е. на проективных плоскостях над произвольными полями; в частности, на $\mathbb{CP}^2$). Однако, оказывается, что это совсем не так, и CRL можно адаптировать под проективную геометрию, причём адаптация будет связана с кубическими кривыми. Для начала, напомним, что это.

В дальнейшем — начиная с этого момента, и до конца (кроме нескольких исключений, о которых будет отдельно сказано), мы считаем, что все происходит на комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ (на самом деле $\mathbb{C}$ можно заменить на алгебраически замкнутое поле характеристики 0).

Определение 4.1. Кубической кривой, или кубикой будем называть множество $\{[x : y : z] \mid P(x, y, z) = 0\}$, где P — однородный многочлен степени 3.

Общая теория кубических кривых и понятие сложения точек на кубике нам потребуется только в самом конце проекта. Тем не менее, участникам, заинтересованным в более глубоком изучении темы, мы советуем почитать, например, книгу [6].

Удивительно, но нас в первую очередь будут интересовать вырожденные кубики.

Определение 4.2. Пусть $\mathcal{K} = \mathbb{C} \cup \ell$ — распавшаяся кубика. Выберем на прямой ℓ произвольную точку O , не лежащую на конике; ее будем считать нулевой точкой сложения точек. Определим точку $T \in \ell$ следующим образом: если $X \neq Y$ (ℓ пересекает $\mathbb{C}$ в различных точках), то T такова, что $[O, T; X, Y] = -1$; если же $X = Y$ (т.е. ℓ касается $\mathbb{C}$), то $T = X$. Введем операцию $+$: $\mathcal{K} \setminus \{X, Y\} \times \mathcal{K} \setminus \{X, Y\} \rightarrow \mathcal{K} \setminus \{X, Y\}$ следующим образом.

- если $A \in \mathbb{C}$, $B \in \ell$. Пусть прямая AB повторно пересекает $\mathbb{C}$ в точке C . Тогда точка $A + B$ является повторным пересечением прямой OC и $\mathbb{C}$;
- если $A, B \in \ell$, то $A + B$ — это такая точка, что существует проективная инволюция, которая меняет местами пары точек: $(A + B, O), (A, B), (X, Y)$;
- если $A, B \in \mathbb{C}$. Пусть C — пересечение прямых AB и ℓ . Тогда точка $A + B$ — это такая точка, что $[A + B, C; O, T] = -1$.

Оказывается, что такое определение действительно является аналогом сложения точек на кубике, но для распавшейся кубики. А именно, верны следующие утверждения.

Утверждение 4.3. Пусть $\mathbb{C}$ — коника, а ℓ — прямая. Тогда только что введения операция сложения корректно задает на $\mathcal{K} \setminus \{X, Y\}$ структуру абелевой группы.

Оставим его без доказательства (содержательная часть доказательства — проверка ассоциативности, остальное очевидно; ее мы опустим). Отметим важное следствие:

Следствие 4.4. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup \ell$ — вырожденная кубика. Точки A, B лежат на $\mathcal{C}$, а точка C — на ℓ . Точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $A + B + C = O$.

Следующая теорема является обобщением теоремы (2.10):

Теорема 4.5. Коника Γ пересекает $\mathcal{C}$ в точках A, B, C и D , а прямую ℓ — в точках E и F , причём никакие из этих точек не лежат в пересечении $\mathcal{C}$ и ℓ . Тогда $A + B + C + D + E + F = O$. При этом, верно и обратное: если на $\mathcal{C}$ выбраны точки A, B, C и D , а на ℓ точки E и F , то если $A + B + C + D + E + F = O$, то эти шесть точек лежат на одной конике.

Доказательство. Пусть ℓ пересекает $\mathcal{C}$ в точках X, Y ; они необязательно различны. Понятно, что достаточно доказать прямое утверждение (ибо дальше можно воспользоваться обратным ходом: провести конику через пять точек и воспользоваться единственностью обратного элемента). Пусть AB, CD пересекают ℓ в точках U, V . Тогда, $A + B + C + D + P + Q = P + Q - U - V$, и мы хотим проверить, что $P + Q = U + V$. По теореме Дезарга об инволюции для пучка $\mathcal{O}_{A,B,C,D}$ и прямой ℓ существует проективная инволюция на ℓ , меняющая местами точки в парах $(X, Y), (P, Q), (U, V)$, откуда и следует требуемое. $\square$

Задача 62.

- (а) **Обобщённая теорема Менеля.** Алгебраическая кривая $\mathcal{W}$ степени d пересекает прямые AB, BC, CA в точках C_i, A_i, B_i для $i = 1, \dots, d$. Докажите, что $\prod_{i=1}^d \frac{\overrightarrow{AC_i} \overrightarrow{BA_i} \overrightarrow{CB_i}}{\overrightarrow{C_iB} \overrightarrow{A_iC} \overrightarrow{B_iA}} = (-1)^d$.
- (б*) **Обобщение crl.** Алгебраическая кривая $\mathcal{W}$ степени d пересекает окружность в точках $A_1, \dots, A_{2d}$, а ее хорду XY в точках $B_1, \dots, B_d$. Докажите, что $f(A_1) \dots f(A_{2d}) = f(B_1) \dots f(B_d)$, где f — cool-ratio-функция для отрезка XY .

Замечание. Задача (62) остаётся верной, если заменить вырожденную кубику (три прямые в пункте (а) и прямую+окружность в пункте (б)) на произвольную. Но её доказательство становится значительно сложнее.

Если коника $\mathcal{C}$ является окружностью, то в качестве нулевой точки обычно берут бесконечно удалённую точку прямой ℓ . Мы будем придерживаться этого правила, если явно не оговорено иное.

Предположим, что $\mathcal{K} = \Omega \cup \ell$ — распавшаяся кубика, и Ω — это окружность. Другая окружность γ пересекает ℓ в точках A, B и Ω в точках C, D . Круговые точки $\mathcal{J}_+$ и $\mathcal{J}_-$ являются двумя оставшимися точками пересечения $\mathcal{K}$ и γ , а прямая $\mathcal{J}_+\mathcal{J}_-$ проходит через нулевую точку кубики. Следовательно, $\mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_- = O$, и равенство из теоремы (4.5) можно упростить. В обратную сторону рассуждение тоже верно. В итоге получаем следующее утверждение:

Следствие 4.6. Пусть $\mathcal{K} = \Omega \cup \ell$ — распавшаяся кубика «окружность + прямая». Точки A, B лежат на ℓ , а C, D — на Ω . Точки A, B, C и D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $A + B + C + D = O$.

Отметим, что по некоторым причинам (поймём в дальнейшем) нам удобно считать, что если A на прямой ℓ отлична от Y , то $X + A = X$. Аналогично с точкой Y . Сумма $X + Y$ же не определена.

4.2 Проективное обобщение CRL

Итак поймем почему CRL действительно проективный объект. Рассмотрим некоторую конику и прямую, не касающуюся её.

Определение 4.7. Зафиксируем на конике $\mathcal{C}$ точки X, Y, Z ; пусть касательная к $\mathcal{C}$ в точке Z пересекает XY в точке T . Пусть $\mathcal{K}$ — вырожденная кубика, состоящая из коники $\mathcal{C}$ и прямой ℓ . *Обобщенной cool ratio-функцией* с основной прямой XY и с центром Z будем называть функцию $f_{XY,Z} = f: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое работает следующим образом: если $P \in \mathcal{C}$, то $f(P) = [X, Y; P, Z]$, а если P на XY , то $f(P) = [X, Y; T, P]$.

Сразу заметим, что при данном s есть ровно одна такая точка A на $\mathcal{C}$ что $f(A) = s$ и ровно одна такая точка B на ℓ , что $f(B) = s$.

Для начала, проведем мост между этим определением и привычным нам определением cool ratio функции.

Пусть XY — хорда окружности ω . Пусть N — середина одной из дуг, соединяющих X, Y на ω . Рассмотрим обобщенную cool-ratio функцию для отрезка XY и центра N . Тогда, заметим, что получится в точности обычная cool-ratio функция f_{XN} для точек на прямой и f_{XY} для точек на конике. Таким образом, мы получаем проективное обобщение cool-ratio функции. Вообще говоря, выбрать середину дуги — как и cool-ratio функцию для отрезка XY — можно двумя способами, но они отличаются только знаком. Каждой середине дуги отвечает свой способ ввести функцию для отрезка XY .

Следующая задача является ключевой в разделе. Она показывает, что cool ratio lemma и сложение точек на вырожденной кубике — это практически одно и то же.

Задача 63. Пусть прямая ℓ пересекает $\mathcal{C}$ в двух различных точках X, Y . На конике выберем также точку Z ; пусть T точка на XY такая что ZT касается $\mathcal{C}$. Пусть f — обобщенная cool ratio функция для отрезка XY и центра Z . Введем на $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup \ell$ структуру сложения точек с начальной точкой в точке T . Пусть $A, B \in \mathcal{K}$ — две точки. Тогда $f(A + B) = f(A)f(B)$.

Предлагаем вам решить следующую задачу, чтобы лучше прочувствовать связь между CRL и сложением точек на вырожденной кубике.

Задача 64. Переведите решения задач (1), (3), (4), (5), (6) и (12) на язык сложения точек.

Замечание. Поскольку в решении через сложение точек не требуется, чтобы окружность и прямая пересекались в вещественных точках, то в условии пункта (а) задачи (4) прямая $P - Q - R$ может и не пересекать окружность. Аналогично, в условии пункта (b) той же задачи можно избавиться от условия на взаимное расположение окружности и точки P . Также, поскольку оба пункта обладают проективной формулировкой, в их условиях можно заменить окружность на произвольную конику. Подобным образом обобщаются и остальные задачи.

Переформулировка задачи (5) настолько элегантна, что заслуживает быть вынесенной в отдельное утверждение:

Утверждение 4.8. Треугольник ABC вписан в окружность Ω . Также дана произвольная прямая ℓ . Рассмотрим кубику $\mathcal{C} = \Omega \cup \ell$. Пусть M — точка Микеля прямых AB , BC , AC и ℓ . Тогда $M = A + B + C$.

5 Awesome Ratio lemma

5.1 Формулировка и доказательство

Теорема 5.1 (Awesome ratio lemma). Многоугольник $A_1 \dots A_n$ на $\mathbb{CP}^2$ описан около коники $\mathcal{D}$ и вписан в конику $\mathcal{C}$. Фиксированная хорда XY коники $\mathcal{C}$ касается коники $\mathcal{D}$. Рассмотрим кубику $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup XY$. Тогда $\sum_{i=1}^n A_i = \text{const}$ при вращении $A_1 \dots A_n$ по Понселе.

Замечание. На самом деле некоторый частный случай ARL мы уже доказали в предыдущих разделах. А именно тот, где все объекты вещественны, $n = 3$, а описанная коника является окружностью. Действительно, из задачи (23) известно, что точка Микеля M прямых AB , BC , CA и XY неподвижна при вращении треугольника. С другой стороны, в силу утверждения (4.8), $M = A + B + C$.

Если перевести ARL с языка вырожденной кубики на язык CRL, получим следующее утверждение.

Следствие 5.2. Многоугольник $A_1 \dots A_n$ вписан в окружность Ω и описан около коники γ . Хорда XY окружности Ω касается γ . Тогда величина $\prod_{i=1}^n f_{XY}(A_i) = \text{const}$ при вращении $A_1 \dots A_n$ по Понселе.

Замечание. С точки зрения евклидовой геометрии, это крайне нетривиальное утверждение.

5.2 Приложения ARL

Задача 65.

- (а) Треугольник ABC вращается между описанной коникой $\mathcal{C}$ и вписанной коникой $\mathcal{D}$. Точки X и Y таковы, что прямая XY касается $\mathcal{D}$. Докажите, что все коники $(ABCXY)$ принадлежат одному пучку, одна из вершин которого лежит на $\mathcal{C}$.

(b) Выведите в одну строчку из пункта (a) следующее утверждение: Треугольник ABC вращается между описанной коникой и вписанной параболой. Тогда описанные окружности всех треугольников ABC принадлежат одному пучку.

Задача 66. Шестиугольник $ABCDEF$ вращается между описанной окружностью и вписанной коникой. Фиксированная прямая m касается вписанной коники и пересекает прямые AF , AB , DC , DE в точках X , Y , Z , T соответственно. Окружности (AXY) и (DZT) повторно пересекают описанную окружность в точках P и Q . Тогда прямая PQ проходит через фиксированную точку, лежащую на прямой m .

Задача 67. Пусть $ABCD$ — четырехугольник Понселе, вписанный в конику $\mathcal{C}$ и описанный около коники $\mathcal{D}$. Пусть X — произвольная точка плоскости. Докажите, что коники $(ABCDX)$ образуют пучок.

Задача 68* (Ол. Шарыгина 2025, финал, 10.9). Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I . Пусть L — точка пересечения диагоналей четырехугольника а X, Y такие точки, что $LI = LX = LY$, $\angle XLI = \angle YLI = 90^\circ$. Докажите, что точки A, B, C, D, X и Y лежат на одной равнобокой гиперболе.

Приглашаем вас найти новые приложения ARL.