

Инварианты Понселе

в свете

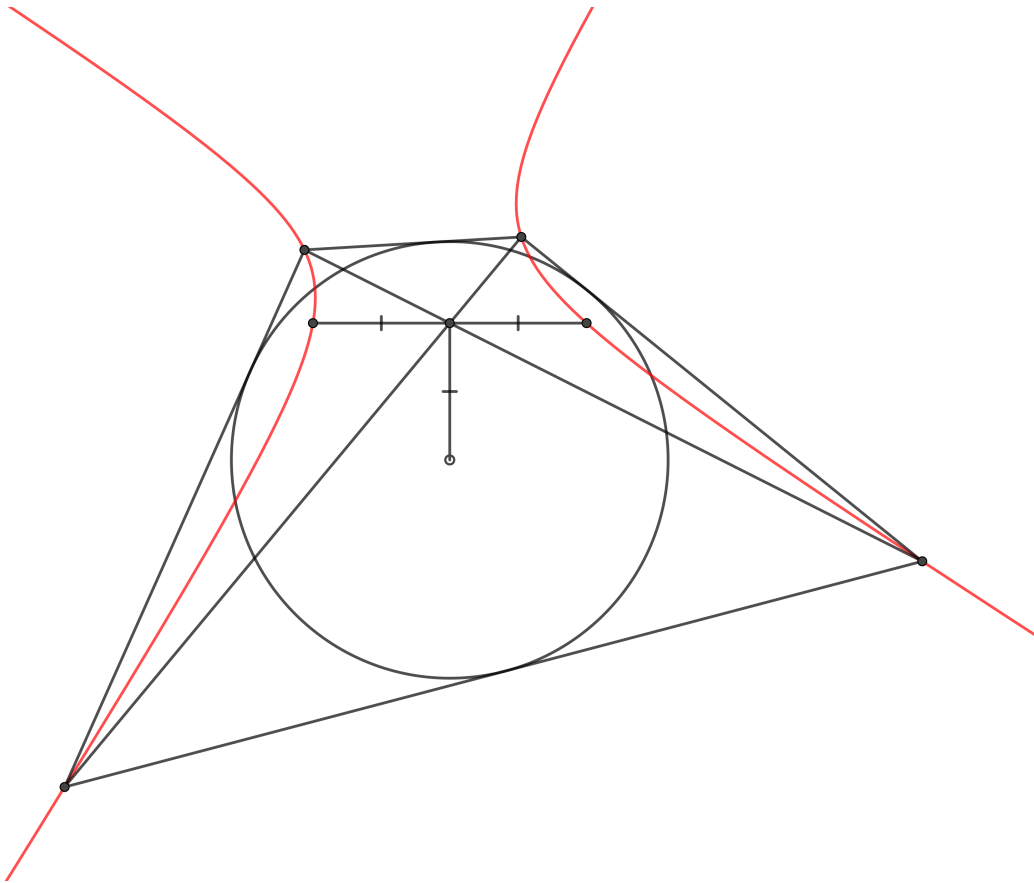
Cool ratio lemma

Авторы проекта

Ю.Э. Нагуманов, С.М. Кузнецов, Л.П. Горбунов, А.А. Заславский

Проект представляют

С.М. Кузнецов, Л.П. Горбунов, А.А. Заславский, П.В. Бибилов, П.А. Кожевников



Летняя Конференция Турнира Городов

2025

Содержание

Введение	3
1 Необходимые сведения	6
1.1 Проективная геометрия	6
1.2 Коники	9
1.3 Евклидов взгляд на коники	12
1.4 Изогональное сопряжение в четырёхугольнике	13
1.5 Проективные инволюции	14
1.6 Сопряжение Клоусона	15
1.7 Классическое доказательство теоремы Понселе	16
2 Cool ratio lemma	18
2.1 Определения и первая CRL	18
2.2 CRL помогает доказывать концикличность	20
2.3 Generalized Cool Ratio Lemma	22
2.4 Связь CRL с классическими метрическими теоремами	22
3 Евклидовы инварианты поризма Понселе	25
3.1 Сопряжение Клоусона и лемма Скутина	26
3.2 Связь с полярным преобразованием.	28
3.3 Теорема Лагерра	29
3.4 Скрытый Понселе. Часть 1	30
3.5 Скрытый Понселе. Связь с изогональным сопряжением	31
3.5.1 Лемма о степени ортоцентра	32
3.5.2 Теорема Айера	33
3.5.3 Задача 10.4 с последнего финала олимпиады им. Шарыгина	33
3.6 Вокруг классического доказательства теоремы Понселе	34
3.7 Разное	35
3.7.1 Ломаные Понселе	37

Введение

Поризм Понселе (или Теорема Понселе) является классическим фактом проективной алгебраической геометрии. Эта знаменитая теорема является примером так называемой теоремы о замыкании, когда некоторый процесс построения новых точек в результате проведения тех или иных линий закичивается через некоторое количество шагов. У поризма есть множество разных доказательств, разновидностей и обобщений. Он, несмотря на свою известность, является чрезвычайно трудным фактом, обладающим множеством различных содержательных доказательств. Наиболее известны геометрическое рассуждение через пучки окружностей, которое можно прочитать в книге [1], и аналитическое доказательство через функцию плотности, с которым можно ознакомиться в статье [7].

О поризме Понселе хотя бы раз слышали практически все продвинутые школьники-геометры. Некоторые даже знают какие-то доказательства, а совсем продвинутые — разные инварианты, возникающие при вращении Понселе. Например, то, что в четырёхугольнике Понселе точка пересечения диагоналей фиксирована... Поризм обладает очень глубокой конструкцией, в которой и по сей день находят новые результаты, порой довольно сложные и содержательные. К одному такому результату, обнаруженному и доказанному авторами проекта, мы будем плавно подводить сквозь казалось бы совершенно не связанные с поризмом сюжеты. Отметим также, что, к сожалению, многие доказательства Понселе обладают тем недостатком, что сильно используют евклидовость — т.е. тот факт, что определены понятия отрезков и углов. В проекте мы затронем как евклидовы, так и проективно-алгебраические рассуждения, и с разных сторон подойдем к инвариантам, возникающим в поризме.

Казалось бы, совершенно несвязанной с теоремой Понселе вещью выступает такой евклидов инструмент, как *cool ratio lemma*, или CRL. Впервые лемма была сформулирована в статье [11], опубликованной в 2020 году на известном математическом сайте aops.com. Усилиями авторов проекта в последние полтора года лемма набрала популярность и в русскоязычном геометрическом сообществе. На первый взгляд кажется, что это просто ещё один счётный инструмент. Но при детальном рассмотрении у CRL выявляются некоторые проективные свойства, а также связь со сложением точек на кубике. Оказывается, что CRL скорее напоминает двойные отношения, а кроме того имеет еще и более глубокую природу, связанную с понятием *дивизора* кубики — а точнее, его аналогом для вырожденной кубики. Мы почти не будем погружаться в теорию, но искушенные читатели могут обдумать более научное описание CRL в терминах аналога дивизора.

Отдельно отметим, что в первых пяти разделах проекта мы не будем работать с невырожденными кубическими кривыми, поэтому никаких знаний в этой области от участников не предполагается.

Но самое главное — в процессе размышления над одной задачей, поставленной 11 лет назад и решенной не так давно авторами проекта, авторами была придумана сложная и очень красивая теорема, связывающая CRL и поризм Понселе.

В проекте мы узнаем, что же такое CRL и как её использовать, докажем поризм Понселе, а также обсудим их загадочную связь. Помимо этого, мы глубоко погрузимся в мир евклидового Понселе:

- сформулируем и докажем новые или малоизвестные инварианты;
- исследуем связь поризма Понселе с набирающим популярность сопряжением Клоусона;
- придумаем (предположительно) новое доказательство известной теоремы Айера;
- обсудим, как можно решать некоторые задачи при помощи поризма, где его, казалось бы, нет;
- представим новый метод решения задач с помощью скрытого Понселе, основанный на вращении треугольника вокруг коники, которой изначально в задаче нет, и который позволяет решать сложные проблемы с реальных олимпиад (например, 10.4 Олимпиады Шарыгина 2025 года);
- и многое другое...

Поризм Понселе не впервые появляется на летней конференции турнира городов. В 2014 году ему был посвящён целый проект [4]. Наш проект полностью независим, поэтому для участия в нём знакомство с материалами предыдущего проекта не требуется. Тем не менее, особо мотивированные участники могут прочитать проект 2014 года беглым взглядом, чтобы глубже погрузиться в атмосферу поризма.

Структура нашего проекта такова:

Разделы 1, 2 и 3 выдаются в начале конференции, разделы 4 и 5 – после промежуточного финиша.

В разделе 1 собрана вся необходимая для проекта теоретическая база. Поскольку наш проект состоит из нескольких различающихся между собой частей, то и материалы в разделе 1 сильно различаются как по тематике, так и по сложности. Это не должно вас пугать. Вы можете пропустить раздел пререквизитов и возвращаться к нему по мере надобности.

В разделе 2 мы подробно поговорим про cool ratio лемму и её применение в олимпиадных задачах, а в разделе 4 осознаем проективную природу CRL и обсудим её связь со сложением точек на вырожденной кубике. Эти два раздела никак не связаны с поризмом Понселе, поэтому вы можете решать их, даже если не заинтересованы в работе над остальными частями нашего проекта.

Раздел 3 посвящен самым разнообразным инвариантам поризма Понселе и примерам его применения в олимпиадных задачах.

В разделе 5 мы перекинем мост между поризмом Понселе и cool ratio lemm'ой. Мы сформулируем и докажем сложный и очень красивый результат, стоящий на стыке этих двух миров, а также разберем несколько примеров его применения.

Наконец, в дополнительном разделе мы представим три малоизвестных доказательства теоремы Понселе. Два из них используют сложение точек на кубике и/или выход в пространство. Для самых искушенных читателей мы выдадим в виде задач третье, более алгебраическое доказательство поризма и связанных с ним фактов.

1 Необходимые сведения

В этом разделе приведены необходимые определения тех понятий, которыми мы будем активно пользоваться в дальнейшем, а также важные факты, связанные с этими понятиями. Мы сосредоточимся на утверждениях и конструкциях из проективной геометрии, поскольку язык проективной геометрии будет играть большую роль в дальнейшем изложении. Утверждениями из данного раздела можно пользоваться без доказательства, однако, если какие-то факты Вам не знакомы, их можно обсудить с преподавателями.

1.1 Проективная геометрия

В этом разделе мы приведем необходимые факты из проективной геометрии. Мы ограничимся проективной геометрией в размерностях 1 и 2.

Определение 1.1. Пусть O — произвольная точка плоскости. *Пучком прямых $\mathcal{L}_O$ с центром в точке O* называется множество всевозможных евклидовых прямых, проходящих через точку O .

Рассмотрим пучок прямых $\mathcal{L}_O$ и произвольную прямую ℓ , не проходящую через точку O . Тогда все прямые пучка $\mathcal{L}_O$, кроме одной, пересекают прямую ℓ . Таким образом, мы получаем соответствие между точками прямой ℓ и прямыми пучка $\mathcal{L}_O$. Это наблюдение мотивирует следующее

Определение 1.2. *Проективной прямой* называется произвольный пучок прямых $\mathcal{L}_O$. Прямая из этого пучка называется *проективной точкой*. Если ℓ — произвольная евклидова прямая, не проходящая через точку O , то проективная точка $J \in \mathcal{L}_O$, соответствующая прямой, параллельной ℓ , называется *бесконечно удаленной точкой* прямой ℓ . Допуская вольность речи, мы будем говорить, что евклидова прямая ℓ *пополнена бесконечно удаленной точкой J* .

Определим теперь понятие *двойного отношения четырех проективных точек* проективной прямой. Пусть ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4 — четыре проективные точки, соответствующие четырем евклидовым прямым в пучке $\mathcal{L}_O$.

Определение 1.3. *Двойным отношением* четвёрки проективных точек ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4 называется число $[\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4] = \frac{\sin \angle(\ell_1, \ell_3)}{\sin \angle(\ell_2, \ell_3)} : \frac{\sin \angle(\ell_1, \ell_4)}{\sin \angle(\ell_2, \ell_4)}$.

Если пересечь пучок $\mathcal{L}_O$ прямой ℓ , то четыре прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4 высекут на прямой ℓ точки A, B, C и D соответственно. Тогда $[\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$. Это обстоятельство позволяет определить двойное отношение на обычной евклидовой прямой.

Определение 1.4. *Двойным отношением* четвёрки точек A, B, C, D , лежащих на прямой, называется число $[A, B; C, D] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

Четвёрка точек A, B, C, D называется *гармонической четвёркой*, если $[A, B; C, D] = -1$.

Удобно рассматривать проективную прямую как обычную евклидову прямую, пополненную бесконечно удаленной точкой J . Тогда, например, четвёрка точек A, B, M, J является гармонической, если точка M — середина отрезка AB .

Важным свойством двойного отношения является следующий факт: если выполнено равенство $[A, B; C, D_1] = [A, B; C, D_2]$, то $D_1 = D_2$. Иначе говоря, двойное отношение — это аналог расстояния в евклидовой геометрии, только в проективном мире это «расстояние» измеряется относительно трёх точек.

Определение 1.5. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — проективные прямые. Отображение $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ называется *проективным*, если оно сохраняет двойные отношения, т.е. для любой четвёрки точек A, B, C, D имеет место равенство $[A, B; C, D] = [f(A), f(B); f(C), f(D)]$.

Теорема 1.6. Любое проективное отображение прямой в себя однозначно задается образами трёх точек. Иначе говоря, для любых точек A, B, C, A', B' и C' существует единственное проективное отображение f , такое, что $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ и $f(C) = C'$.

Теперь напомним понятие проективной плоскости. Для этого рассмотрим пучок прямых в трёхмерном пространстве, т.е. множество прямых, проходящих через фиксированную точку O . Такое множество прямых называется *проективной плоскостью*. Каждая прямая, проходящая через отмеченную точку, называется *проективной точкой*, а каждая плоскость, проходящая через выделенную точку — *проективной прямой*. Отметим, что это определение согласуется с определенным ранее понятие проективной прямой как пучка прямых на плоскости. Если взять теперь обычную плоскость α , не проходящую через центр O пучка, то на ней каждая проективная точка высечет обычную евклидову точку, а каждая проективная прямая — обычную евклидову прямую. Все проективные точки, которые не пересекаются с плоскостью α , называются *бесконечно удаленными* и лежат на одной *бесконечно удаленной проективной прямой* α_∞ .

В некоторых ситуациях нам будет полезен аналитический взгляд на проективные точки и прямые. Для этого зафиксируем в пространстве систему координат $Oxyz$ с началом в центре O нашего пучка прямых. Каждой проективной точке можно сопоставить тройку координат направляющего вектора евклидовой прямой, соответствующей этой точке. Но поскольку этот вектор определен лишь с точностью до умножения на ненулевую константу, координаты проективной точки также определены с точностью до умножения на ненулевую константу. Такие координаты называются *однородными* и обозначаются следующим образом: $(x : y : z)$. Если в системе координат $Oxyz$ евклидова плоскость α задается уравнением $z = 1$, то проективная точка $(x : y : z)$ высечет на ней точку с координатами (x, y) , а бесконечно удаленная проективная прямая α_∞

задается уравнением $z = 0$.

Аналогично, каждая проективная прямая задается уравнением $ax + by + cz = 0$ и может быть определена числами a, b и c . Но и набор этих чисел (фактически это координаты вектора нормали данной плоскости) определен с точностью до умножения на ненулевую константу. Поэтому нашей плоскости (и, как следствие, проективной прямой) может быть сопоставлена тройка однородных координат $(a : b : c)$. Точка $(x : y : z)$ лежит на плоскости $(a : b : c)$ тогда и только тогда, когда $ax + by + cz = 0$.

Обращает на себя внимание равноправие в координатном описании проективных точек и прямых. Формализуется это равноправие следующим утверждением, которое называется *проективной двойственностью*.

Теорема 1.7 (Проективная двойственность). Если некоторое утверждение, сформулированное в терминах проективной геометрии, справедливо, то справедливо также двойственное утверждение, которое получается из исходного заменой слова «точка» на слово «прямая» и слова «прямая» на слово «точка».

Теперь напомним понятие проективного преобразования проективной плоскости.

Определение 1.8. *Проективным преобразованием проективной плоскости* называется такое преобразование, которое переводит проективные прямые в проективные прямые.

Проективные преобразования можно задавать в однородных координатах следующим образом. Мы рассмотрим *линейное преобразование* трёхмерного пространства, т.е. преобразование, которое меняет координаты каждой точки линейным образом:

$$(x, y, z) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z),$$

где числа a_{ij} — некоторые вещественные числа. Тогда это преобразование индуцирует проективное преобразование, когда однородные координаты меняются следующим образом:

$$(x : y : z) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z : a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z).$$

С точки зрения координат на евклидовой плоскости α проективное преобразование, как и в случае проективной прямой, задается дробно-линейными формулами:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \right).$$

Для проективной плоскости также есть теорема, позволяющая задавать проективное преобразование образами некоторых точек.

Теорема 1.9. Для любых двух четвёрок точек (A, B, C, D) и (A', B', C', D') общего положения существует единственное проективное преобразование, которое переводит первую четвёрку во вторую.

1.2 Коники

В этом разделе мы напомним основные понятия, связанные с *кониками*. Важно отметить, что для нас основным полем для работы будет именно проективная плоскость (хотя в задачах нам встретятся и коники на евклидовой плоскости), а потому нам потребуется такое определение коник, которое было бы согласовано с проективной геометрией, а с другой стороны, могло бы быть сформулировано без дополнительной подготовки. Такое определение мы и предлагаем.

Определение 1.10. *Коникой $\mathcal{C}$ на плоскости* называется множество нулей многочлена $F \in \mathbb{R}[x, y]$ степени 2 от переменных x и y .

В зависимости от вида многочлена F бывают *вырожденные коники* (соответствующие приводимым многочленам и являющиеся парой прямых) и *невырожденные коники* (соответствующие неприводимым многочленам и являющиеся эллипсом, гиперболой или параболой). В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать лишь невырожденные коники.

Коники можно рассматривать не только на обычной плоскости, но и на плоскости проективной. Геометрически это означает, что нам нужно выйти с нашей плоскости в трёхмерное пространство и провести всевозможные прямые через отмеченную точку и точки нашей коники. В результате мы получим *проективную конику* $\hat{\mathcal{C}}$, которая по сути является конусом над коникой. Ясно, что с таким объектом не очень-то удобно работать (сможете вписать в такую конику треугольник?..). Поэтому уже здесь аналитический язык, не требующий наглядного представления объекта, окажется нам полезен. Поскольку на обычной плоскости уравнение коники $F(x, y) = 0$ накладывает условие на координаты точки (x, y) , то в проективном мире нам нужно наложить условие на однородные координаты $(x : y : z)$ проективной точки. Делается это следующим образом. Пусть наша коника $\mathcal{C}$ была задана многочленом $F(x, y)$, т.е. $\mathcal{C} = (x, y) : F(x, y) = 0$. Заменяем многочлен $F(x, y)$ на однородный многочлен $\hat{F}(x, y, z) = z^2 F(x/z, y/z)$ от трёх переменных. Множество нулей однородного многочлена $\hat{F}(x, y, z)$ и будет проективной коникой $\hat{\mathcal{C}}$: $\hat{\mathcal{C}} = \{(x, y, z) \neq (0, 0, 0) : \hat{F}(x, y, z) = 0\}$.

В дальнейшем для краткости мы будем одинаково обозначать конику и ее проективизацию. Из контекста всегда будет понятно, рассматриваем мы конику в рамках евклидовой геометрии или в рамках геометрии проективной.

Отметим также следующее утверждение:

Утверждение 1.11. Проективный образ окружности является коникой. и обратно, любая коника может быть получена из окружности подходящим проективным преобразованием.

Первая часть утверждения очевидна, так как проективное преобразование не увеличивает степень многочлена при замене переменных. Второе утверждение также может быть доказано алгебраически.

Также в некоторых ситуациях нам будет важно расположение коники относительно бесконечно удаленной прямой ℓ_∞ .

Определение 1.12. *Эллипсом* называется коника, которая не пересекает бесконечно удаленной прямой. *Гиперболой* называется коника, пересекающая бесконечно удаленную прямую в двух различных точках. Наконец, *параболой* называется коника, касающаяся бесконечно удаленной прямой.

Теорема 1.13. Любые пять точек общего положения задают единственную конику, проходящую через них. Любые 5 прямых общего положения задают единственную конику, касающуюся их.

Оказывается, на конике также можно ввести понятие двойного отношения.

Определение 1.14. Пусть A, B, C, D — четыре точки на конике $\mathcal{C}$. *Двойным отношением* $[A, B; C, D]$ называется двойное отношение четвёрки прямых $[XA, XB; XC, XD]$, где X — произвольная точка коники, отличная от A, B, C и D .

Доказать корректность этого определения можно следующим образом. Подходящим проективным преобразованием переведем нашу конику $\mathcal{C}$ в окружность. Поскольку проективное преобразование сохраняет двойные отношения, достаточно проверить корректность определения для случая окружности. А это уже совсем несложно (можно либо воспользоваться равенством вписанных углов, либо, сделав инверсию, свести задачу к двойному отношению точек на прямой).

Отсюда следует следующее важное утверждение.

Теорема 1.15 (Лемма Соллертинского). Пусть $\mathcal{L}_O$ — пучок прямых и f — проективное преобразование плоскости. Обозначим через $\mathcal{L}_{O'}$ образ пучка $\mathcal{L}_O$ при преобразовании f . Для каждой прямой $\ell \in \mathcal{L}_O$ рассмотрим точку пересечения прямых ℓ и $f(\ell)$. Тогда все эти точки образуют конику, проходящую через точки O и O' .

Замечание. Если $f(OO') = OO'$, коника распадается в объединение прямой OO' и ещё одной прямой.

Поскольку на кониках корректно определено двойное отношение четвёрки точек, то для коник справедливы все факты, связанные с двойными отношениями, которые мы ранее отмечали для прямых. Так, для коник верна теорема, утверждающая, что проективное отображение коники в себя однозначно задается образами трёх точек. На самом деле, коника изоморфна проективной прямой как проективное многообразие.

Теперь рассмотрим понятия полюса и поляры относительно коники. Вновь мы возьмем за

основу аналитическое определение. (Мы понимаем, что такое определение, скорее всего, окажется для Вас непривычным, поэтому допустимо понимать поляры и полюсы так, как Вы их понимали в курсах проективной геометрии: через полный четырёхсторонник, касательные и гармонические четвёрки. Тем не менее аналитическое определение обладает рядом своих преимуществ, поэтому ознакомиться с ним также стоит).

Определение 1.16. Пусть коника $\mathcal{C}$ задана уравнением $q(v) = 0$ и u — вектор, соответствующий произвольной точке. Теперь рассмотрим следующую *билинейную форму* $Q(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$ (в этой странной на первый взгляд формуле на самом деле скрывается формула квадрата суммы двух слагаемых). Векторы u и u' называются *сопряженными относительно коники $\mathcal{C}$* , если $Q(u, u') = 0$. Для фиксированного вектора u множество всех векторов u' , сопряженных с u , называется *полярной* точки, соответствующей вектору u .

Заметим, что уравнение поляры имеет вид $Q(u, v) = 0$, где величины Q и u фиксированы. Но тогда оно линейно по v , т.е. полярной является некоторая прямая (проективная). Наоборот, пусть ℓ — некоторая проективная прямая. Выберем на ней два линейно независимых вектора v_1 и v_2 (т.е. мы отметили на проективной прямой две различные проективные точки). Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности вектор u , такой, что $Q(u, v_1) = Q(u, v_2) = 0$: вектор u соответствует точке пересечения двух поляр векторов v_1 и v_2 . Соответствующая точка называется *полюсом* прямой ℓ .

Таким образом, мы получаем соответствие между проективными точками и проективными прямыми, определяемое коникой $\mathcal{C}$, когда каждой точке ставится в соответствие ее поляр, а каждой прямой — ее полюс. Такое соответствие называется *полярным*.

Образом бесконечно удаленной прямой ℓ_∞ при полярном соответствии, выполненном относительно коники $\mathcal{C}$, будет точка, которая называется *центром коники $\mathcal{C}$* .

Отметим следующий классический факт.

Теорема 1.17 (Принцип двойственности). Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная коника, A и B — произвольные точки, a и b — их поляры. Тогда точка A лежит на прямой b тогда и только тогда, когда точка B лежит на прямой a .

Это утверждение очевидно в силу симметричности формы Q : $Q(u, v) = Q(v, u)$.

О комплексном мире. Все вышеперечисленные понятия аналогично вводятся над комплексными числами (на самом деле, над любым полем). Комплексную проективную прямую $\mathbb{CP}^1$, а также комплексную проективную плоскость $\mathbb{CP}^2$ мы определяем аналогично, как и понятия коник, поляр, проективных преобразований и отображений и т.д.; вопрос, как определить двойные отношения. Мы не будем вдаваться в подробности этой темы — желающие могут почитать об этом в [3]. Надо мыслить двойные отношения как функцию от четырех точек, которая меняется

при перестановке как и в вещественном случае и которая сохраняется при проекциях, а также проективных преобразованиях/отображениях. При этом $\mathbb{CP}^1$ можно мыслить как сферу (Римана) — ведь мы, по сути, добавили к плоскости одну точку, а значит, при стереографической проекции сферы на плоскость получится как раз наша комплексная проективная прямая. Нам будет удобно переходить к комплексной проективной плоскости, так как на такой плоскости любые 2 коники пересекаются по 4 точкам, любая коника пересекает любую прямую по 2 точкам, а каждая окружность проходит через 2 фиксированные точки плоскости с однородными координатами $\mathcal{J}_+(1:i:0)$ и $\mathcal{J}_-(1:-i:0)$, называемые *круговыми*. При этом, геометрически надо представлять себе это как обычно. Немного подробнее можно прочитать в проекте [2].

Следующая теорема позволяет в некоторых случаях сводить проективные утверждения для коник к случаю двух окружностей:

Теорема 1.18.

- (а) Любые две коники над $\mathbb{CP}^2$ можно перевести в две окружности комплексным проективным преобразованием.
- (б) Если две коники над $\mathbb{RP}^2$ имеют не более двух общих точек (с учётом кратности), то их можно перевести в две окружности вещественным проективным преобразованием.

1.3 Евклидов взгляд на коники

В некоторых ситуациях бывает полезно смотреть на коники не с проективной, а с евклидовой точки зрения. Кратко обсудим этот взгляд. Более подробную информацию можно получить в книге [1] (разделы 1 и 3.2).

Определение 1.19. Даны точки P, Q и вещественное число $k > |PQ|$. *Эллипс с фокусами P и Q* — это геометрическое место таких точек A , что $AP + AQ = k$.

Определение 1.20. Даны точки P, Q и вещественное число $k \in (0, |PQ|)$. *Гипербола с фокусами P и Q* — это геометрическое место таких точек A , что $|AP - AQ| = k$.

Определение 1.21. Даны точка F и прямая ℓ . *Парабола с фокусом F и директрисой ℓ* — это геометрическое место таких точек A , что $AF = \text{dist}(A, \ell)$.

В каком-то смысле можно утверждать, что у параболы есть второй, бесконечно удалённый, фокус. Можно проверить, что приведённые определения коник совпадают с определениями из подраздела (1.2). Мы не будем подробно на этом останавливаться. Следующие простые свойства очень важны. Обратите внимание на случай параболы — наше неформальное рассуждение о втором, бесконечно удалённом, фокусе получает новое развитие.

Утверждение 1.22 (Оптическое свойство коники).

- (а) Точка A лежит на конике с фокусами F_1 и F_2 . Тогда касательная к конике в точке A является (внешней для эллипса, внутренней для гиперболы) биссектрисой угла F_1AF_2 .
- (б) Точка A лежит на параболе с фокусом F и директрисой ℓ . Прямая m проходит через A и перпендикулярна директрисе. Тогда касательная к параболе в точке A является биссектрисой угла между прямыми AF и m .

Утверждение 1.23 (Изогональное свойство коники).

- (а) Точка A лежит вне коники с фокусами F_1 и F_2 . Тогда касательные из A к конике изогональны относительно угла F_1AF_2 .
- (б) Точка A лежит вне параболы с фокусом F и директрисой ℓ . Прямая m проходит через A и перпендикулярна директрисе. Тогда касательные из A к параболе изогональны относительно угла, образованного прямыми AF и m .

Следствие 1.24.

- (а) Коника с фокусами F_1 и F_2 касается сторон треугольника ABC или их продолжений. Тогда точки F_1 и F_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC .
- (б) Парабола с фокусом F и директрисой ℓ касается сторон треугольника ABC или их продолжений. Тогда F лежит на описанной окружности треугольника ABC , а ℓ проходит через его ортоцентр.

Обсудим связь коник с полярным преобразованием.

Теорема 1.25. Даны точка O и окружность γ . Тогда образ γ при полярном преобразовании относительно произвольной окружности с центром O — это коника, один из фокусов которой совпадает с O . Если O лежит внутри γ , то образ будет эллипсом, если вне — гиперболой, если на γ — параболой. Обратное утверждение тоже верно: если F — фокус коники Γ , то образ Γ при полярном преобразовании с центром F — это окружность.

1.4 Изогональное сопряжение в четырёхугольнике

Определение 1.26. Точки P и Q называются *изогонально сопряженными в многоугольнике* $A_1A_2 \dots A_n$, если направления из каждой вершины многоугольника на эти точки изогональны в соответствующем угле этого многоугольника.

Теорема 1.27. Даны четырёхугольник (более общо — замкнутая четырёхзвенная ломаная) $ABCD$ и точка P . Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) Существует точка Q , изогонально сопряжённая P относительно четырёхугольника $ABCD$.

$$(b) \angle APB = \angle DPC$$

(с) Проекции P на стороны четырёхугольника или их продолжения лежат на одной окружности или прямой.

(d) Существует коника с фокусом P , касающаяся сторон четырёхугольника или их продолжений.

Замечание. Обратите внимание, в пункте (с) помимо окружности упомянута прямая. Существует ровно одна точка, проекции которой на стороны четырёхугольника лежат на одной прямой — точка Микеля. Формально никакого противоречия нет: несложным счётом углов можно убедиться, что у точки Микеля существует изогонально сопряжённая точка, просто она будет бесконечно удалённой. Как найти направление на эту точку? Ответ даёт следующая теорема:

Теорема 1.28. Точка Микеля изогонально сопряжена в четырёхугольнике бесконечно удалённой точке его прямой Гаусса.

Прочитать доказательство теоремы (1.27) и подробнее ознакомиться с изогональным сопряжением в четырёхугольнике можно в статье [9].

1.5 Проективные инволюции

Определение 1.29. *Инволюцией* называется отображение $f : M \rightarrow M$ из произвольного множества M в себя, для которого справедливо соотношение $f \circ f = \text{id}$. Иначе говоря, $f(f(x)) = x$ для любого элемента $x \in M$. Если на множестве M определены двойные отношения (например, если M — это проективная прямая, пучок прямых или коника), то может случиться так, что f сохраняет двойные отношения (т.е. для любых различных элементов $a, b, c, d \in M$ выполнено равенство $[a, b; c, d] = [\varphi(a), \varphi(b); \varphi(c), \varphi(d)]$). В этом случае мы говорим, что f — *проективная инволюция*.

Утверждение 1.30. Если две проективные инволюции одинаково действуют на двух парах элементов, то они тождественно равны.

Доказательство. Пусть φ и ψ — проективные инволюции, $\varphi(a) = \psi(a) = b$, $\varphi(c) = \psi(c) = d$, $\varphi(x) = y$, $\psi(x) = z$. Тогда $[a, b; c, y] \stackrel{\varphi}{=} [b, a; d, x] \stackrel{\psi}{=} [a, b; c, z]$, откуда следует совпадение y и z . $\square$

Утверждение 1.31.

(a) Любая проективная инволюция на проективной прямой — это инверсия или центральная симметрия.

(b) Любая проективная инволюция на окружности — это центральная проекция.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что вышеупомянутые преобразования являются проективными инволюциями, после чего утверждение следует из единственности (1.30). $\square$

1.6 Сопряжение Клоусона

Мы начнём подраздел с более универсального, чем стандартное, определения точки Микеля, которое работает для вырожденных четырёхугольников.

Определение 1.32. На плоскости даны точки A, B, C, D . При этом некоторые точки могут лежать на одной прямой, а также допускается совпадение точек в одной из пар $(A, C), (B, D)$. Точкой Микеля упорядоченной четвёрки точек (A, B, C, D) мы будем называть центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок DC — или, что равносильно, центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AD в отрезок BC . Позволяя себе некоторую вольность речи, иногда мы будем называть точку Микеля четвёрки точек (A, B, C, D) «точкой Микеля четырёхугольника $ABCD$ ».

Замечание. Если точки A, B, C, D различны и находятся в общем положении, то данное определение совпадает с традиционным.

Замечание. Напомним, что B -точкой Болтая треугольника ABC называется проекция центра описанной окружности на симедиану из вершины B . Можно доказать, что если S — B -точка Болтая, то $\angle SAB = \angle SBC$ и $\angle SCB = \angle SBA$. Следовательно, B -точка Болтая — это в точности точка Микеля «четырёхугольника» $ABCB$.

На плоскости даны точки A, B, C, D общего положения. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , прямые BC и AD — в точке F , прямые AC и BD — в точке G . Пусть M — точка Микеля четвёрки (A, B, C, D) . Из всего вышесказанного несложно вывести, что $MA \cdot MC = MB \cdot MD = ME \cdot MF$, и биссектрисы углов $\angle AMC$, $\angle BMD$ и $\angle EMF$ совпадают. Следовательно, существует инверссимметрия с центром в M , меняющая местами A и C , B и D , E и F . Данное преобразование называется *сопряжением Клоусона* относительно $ABCD$.

Замечание. Если $BC \parallel AD$, то M совпадает с E , и сопряжение Клоусона — это просто инверссимметрия относительно трапеции $ABCD$.

Утверждение 1.33. Пусть точки P и Q сопряжены по Клоусону относительно $ABCD$. Тогда $\angle APB = \angle ADQ + \angle QCB$.

Доказательство. Так как при сопряжении Клоусона A переходит в C , а P — в Q , то треугольники MAP и MCQ подобны. Аналогично, подобны треугольники MBP и MDQ . Следовательно, $\angle APB = \angle APM + \angle MPB = \angle QCM + \angle MDQ = (\angle QCB + \angle BCM) + (\angle MDA + \angle ADQ) = \angle ADQ + \angle QCB$. Последний переход следует из подобия треугольников MBC и MAD . $\square$

Утверждение (1.33) можно использовать для проверки сопряжённости точек по Клоусону. Для этого достаточно проверить, что равенство выполнено для двух соседних сторон. Отметим

важное следствие:

Следствие 1.34. Сопряжение Клоусона меняет местами изогонально сопряжённые точки в четырёхугольнике.

Доказательство. Пусть P и Q изогонально сопряжены в четырёхугольнике $ABCD$. Тогда $\angle APB = \angle DPC = \angle PDC + \angle DCP = \angle ADQ + \angle QCB$. Аналогичные равенства верны и для других сторон, а тогда P и Q сопряжены по Клоусону. $\square$

Утверждение 1.35. Сопряжение Клоусона — это проективная инволюция на $\mathbb{CP}^1$.

Доказательство. Инволютивность очевидна, докажем проективность. Пусть m — комплексная координата точки Микеля. Если сопряжение Клоусона отправляет точку $P(p)$ в точку $Q(q)$, то $(m-a)(m-c) = (m-p)(m-q)$. Следовательно, отображение $p \mapsto q$ дробно-линейно, а тогда оно сохранит двойные отношения. $\square$

Из предыдущего утверждения и утверждения (1.30) следует, что сопряжение Клоусона — это *единственная* инволюция на $\mathbb{CP}^1$, меняющая местами противоположные вершины четырёхугольника.

Пусть теперь четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Теорема Брокара утверждает, что O — ортоцентр треугольника EFG , а M — основание перпендикуляра из O на EF . Следовательно, прямая MO совпадает с осью симметрии, а G при сопряжении Клоусона переходит в O .

Более подробно познакомиться с сопряжением Клоусона можно в статье [8]

1.7 Классическое доказательство теоремы Понселе

Здесь и далее символами $\text{row}_\omega(X)$ мы обозначаем степень точки X относительно окружности ω .

Теорема 1.36 (Лемма о соосных окружностях). Даны окружности ω_1 и ω_2 и вещественное число k . Тогда геометрическое место таких точек P , что $\text{row}_{\omega_1}(P) = k \cdot \text{row}_{\omega_2}(P)$ — это окружность (для $k = 1$ — прямая), соосная с ω_1 и ω_2 .

Теорема 1.37. Пусть $A_1A_2A_3 \dots$ — траектория Понселе, т.е. точки окружности (или коники) Ω таковы, что лучи $A_1A_2, A_2A_3 \dots$ касаются окружности (или коники) ω . Аналогично, пусть $B_1B_2B_3 \dots$ — другая траектория Понселе. Тогда прямые $A_1B_1, A_2B_2 \dots$ касаются окружности (или коники), соосной с Ω и ω .

Классическое геометрическое доказательство теоремы Понселе основано как раз на теореме (1.37), которая доказывается через лемму о соосных окружностях. Вы можете прочитать его, например, в замечательной книге [1].

Отметим также два простых, но важных следствия теоремы (1.37):

Теорема 1.38. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ вписан в окружность (или конику) Ω и описан вокруг окружности (или коники) ω . Тогда для любого натурального $k < n$ все прямые A_iA_{i+n} касаются окружности (или коники), соосной с Ω и ω .

Замечание. Разумеется, условие замыкания здесь не нужно, и верно более сильное утверждение: если незамкнутая ломаная $A_1A_2 \dots A_k$ вращается между двумя окружностями (или кониками) Ω и ω , то прямая A_1A_k всё время касается окружности (или коники), соосной с Ω и ω .

Теорема 1.39. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$ вписан в окружность (или конику) Ω и описан вокруг окружности (или коники) ω .

- (а) Главные диагонали A_iA_{i+n} пересекаются в одной точке, которая является предельной точкой пучка, порождённого Ω и ω .
- (б) Пусть прямая A_iA_{i+1} касается вписанной коники в точке X_i . Тогда прямые X_iX_{i+n} пересекаются в той же предельной точке.

В нашем проекте предложен другой, более алгебраический подход к доказательству теоремы Понселе и теорем (1.38) и (1.39), основанный на $2-2$ -соответствиях. Мы подробно поговорим об этом в дополнительном разделе.

2 Cool ratio lemma

Прежде, чем вы приступите к решению задач проекта, условимся об обозначениях. Задачи, помеченные звёздочкой, по чуть менее, чем полностью субъективному мнению авторов проекта, имеют повышенную относительную сложность. Если задача состоит из нескольких пунктов, то звёздочки ставятся именно около пунктов. Решения задач, которые отмечены двумя звёздочками, авторам проекта неизвестны. Да пребудет с вами сила!

2.1 Определения и первая CRL

Начнем с классического утверждения, известного многим как *лемма Однакова*, *лемма об отношении синусов* или *boring ratio lemma*.

Теорема 2.1 (Boring ratio lemma). Пусть дан треугольник AXY и точка C на стороне XY . Тогда $\frac{XC}{YC} = \frac{AX \cdot \sin(\angle XAC)}{AY \cdot \sin(\angle YAC)}$

Теперь посмотрим на отношение синусов в правой стороне. Пусть прямая AC пересекает повторно окружность (AXY) в точке B . По теореме синусов $\frac{\sin(\angle XAC)}{\sin(\angle YAC)} = \frac{BX}{BY}$, что сразу даёт нам следующую теорему.

Теорема 2.2 (Cool ratio lemma). Даны окружность и хорда XY . Точки A и B лежат на окружности. Прямые AB и XY пересекаются в точке C . Тогда $\frac{XA}{AY} \cdot \frac{XB}{BY} = \frac{XC}{CY}$

Недостаток данной формулировки в том, что лемма не работает в обратную сторону: если точки C и D лежат обе либо на окружности, либо на прямой XY , то из равенства отношений $\frac{XC}{YC}$ и $\frac{XD}{YD}$ не следует совпадение точек C и D . Исправим это.

Определение 2.3. Зафиксируем точки X и Y . Прямая XY делит плоскость на две полуплоскости. Назовем одну из них *верхней*, а другую *нижней*. *Cool-ratio функцией по базису XY* назовем функцию $f_{XY}(T)$ из $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ в $\mathbb{R}$, равную по модулю $\frac{XT}{YT}$, со знаком $-$, если T лежит на отрезке XY или в нижней полуплоскости и со знаком $+$ иначе.

Замечание. Обратите внимание, что f_{XY} и f_{YX} — это не одно и то же!

Замечание. Часто в задачах мы будем определять cool-ratio-функцию только для одного отрезка. С целью упрощения выкладок, в таком случае мы будем опускать индекс XY , предварительно объявив, какой отрезок мы берём в качестве базиса.

Утверждение 2.4. Пусть ω — окружность или прямая, проходящая через X и Y . Тогда f_{XY} — биективное отображение из $\omega \setminus Y$ в $\mathbb{R}$.

Теперь, разобрав случаи, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.5 (Cool ratio lemma). Пусть дана окружность ω и её хорда XY . Точки A и B лежат на окружности, а точка C — на прямой XY . Тогда A, B, C лежат на одной прямой, если и только если $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C)$.

Однако можно обойтись и без разбора случаев.

Доказательство. Пусть T пересечение касательной в точке A к ω с XY . Коллинеарность точек A, B и C равносильна равенству $[X, Y; A, B] = [X, Y; T, C] \iff \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f(T)}{f(C)} \iff \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f^2(A)}{f(C)} \iff f(A) \cdot f(B) = f(C)$. $\square$

Этот результат уже позволяет доказывать весьма нетривиальные утверждения.

Пример (Теорема о бабочке). Точки A, B, C, D лежат на окружности ω . Пусть P — точка пересечения AC и BD . Хорда XY окружности ω такова, что P лежит на XY и $PX = PY$. Пусть AD пересекает XY в точке M , а BC в точке N . Докажите, что $PM = PN$.

Доказательство. Определим cool-ratio-функцию f относительно отрезка XY . Тогда $f(M)f(N) = f(A)f(D)f(B)f(C) = f^2(P) = (-1)^2 = 1$, что в точности и означает симметричность точек M и N относительно середины хорды XY . $\square$

Пример (Частный случай теоремы Паскаля). Точки A, B, C, D, E, F лежат на окружности ω . Хорда XY окружности ω такова, что AD и BC , CF и DE пересекаются на XY . Докажите, что AF и BE пересекаются на XY .

Доказательство. Определим cool-ratio-функцию f относительно отрезка XY . Пусть AD и BC пересекаются в M , а CF и DE в N . Тогда $f(A) \cdot f(F) = \frac{f(A) \cdot f(F) \cdot f(C) \cdot f(D)}{f(C) \cdot f(D)} = \frac{f(M) \cdot f(N)}{f(C) \cdot f(D)} = \frac{f(B) \cdot f(E) \cdot f(C) \cdot f(D)}{f(C) \cdot f(D)} = f(B) \cdot f(E)$. Следовательно, прямые AF и BE также пересекаются на XY . $\square$

Как мыслить про CRL? У многих людей CRL сразу вызывает отторжение, так как там даны какие-то равенства на отрезки — причем интуитивно не понятные, а также сам метод чисто счётный. Но на самом деле можно вспомнить, что в двойных отношениях (в евклидовом смысле) также фигурируют отрезки и синусы. Тем не менее, двойные отношения не считаются несинтетической геометрией, и многие активно используют их в задачах. Почему же так? Дело в том, что двойные отношения допускают обобщение на произвольные проективные плоскости; но самое главное — двойное отношение мыслят как инвариант при проекциях, симметриях и проективных преобразованиях. Иными словами, двойные отношения — это то, что мы перекидываем, и в итоге, используя их основные свойства, решаем задачу, даже не задумываясь о том, что в определении двойных отношений присутствуют отрезки или синусы. Так вот, про CRL можно мыслить так же!

Задача 1. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность ω . Точка S — середина её дуги AD , не содержащей точку B . На продолжении отрезка AD за точку A выбрана точка E . Отрезки CE и SE повторно пересекают ω в точках X и Y соответственно.

Докажите, что AD , SX и BY пересекаются в одной точке.

Задача 2. Дан треугольник ABC и точки E, F на его сторонах AB и AC . Точка M — проекция центра описанной окружности на EF . AM пересекает описанную около ABC окружность в точке D . Оказалось, что EF , BC и касательная к описанной в точке D пересекаются в одной точке. Докажите, что M — середина EF .

Задача 3. Даны треугольник ABC и его биссектриса AD . Точки P и Q на окружности (ABC) таковы, что $\angle BPD = \angle DQC = 90^\circ$. Прямые PQ и BC пересекаются в точке T . Докажите, что прямая AT касается окружности (ABC).

Задача 4.

- (а) (Теорема об окружностно-чевианном пинг-понге) В окружности ω проведена хорда XY . На прямой XY выбраны фиксированные точки P, Q и R , а на ω — переменная точка A . Прямая AP повторно пересекает ω в точке A_1 , прямая A_1Q повторно пересекает ω в точке A_2 , прямая A_2R повторно пересекает ω в точке A_3 . Докажите, что точка пересечения прямых AA_3 и XY не зависит от выбора точки A .
- (б) Даны окружность и $2n$ прямых, пересекающихся в одной точке P , лежащей вне окружности. На первой прямой выбирается произвольная точка A_1 . Из неё проводится касательная к конике до пересечения со второй прямой в точке A_2 . Из точки A_2 проводится касательная к конике до пересечения с третьей прямой в точке A_3 и так далее по циклу. Докажите, что если мы спустя k полных оборотов замкнулись (т.е. $A_{2nk+1} = A_1$), то и для любой другой точки A_1 мы тоже замкнёмся за k оборотов.

2.2 CRL помогает доказывать концикличность

Рассмотрим теперь немного другой сюжет.

Теорема 2.6 (Second cool ratio lemma). Даны окружность ω и хорда XY . Точки A и B лежат на ω , а точки C и D — на прямой XY . Точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D)$.

Пример. Точки M, Q лежат на прямой BC , а точки P, N — на описанной окружности ABC . Известно, что, AP и AQ , AM и AN симметричны относительно биссектрисы угла BAC . Докажите, что прямые PM и QN пересекаются на описанной окружности, причём эта точка лежит на описанной окружности AQM .

Доказательство. Определим cool-ratio-функцию f относительно отрезка BC . Пусть прямая AM пересекает описанную окружность в точке K , прямая AQ — в точке L , а прямая PM — в точке X . Тогда $f(X) = \frac{f(M)}{f(P)} = \frac{\frac{f(A)}{f(N)}}{\frac{f(A)}{f(Q)}} = \frac{f(Q)}{f(N)}$, откуда получаем, что точка X лежит на прямой

QN. Но $f(X) = \frac{f(M)}{f(P)} = f(M) \cdot f(L) = \frac{f(M) \cdot f(Q)}{f(A)}$. Следовательно, $f(A) \cdot f(X) = f(M) \cdot f(Q)$, т.е. точки A, X, M, Q лежат на одной окружности. $\square$

А можно ли заменить окружность+прямую на две окружности? Положительный ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение.

Теорема 2.7 (Third cool ratio lemma). Пусть даны окружности ω_1 и ω_2 , пересекающиеся по точкам X и Y . Точки A и B лежат на ω_1 , а точки C и D лежат на ω_2 . Точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D)$.

Отметим ещё одну интересную идею.

Утверждение 2.8. При инверсии относительно окружности, проходящей через X и Y , $|f_{XY}|$ сохраняется.

Если центр окружности инверсии лежит на отрезке XY , то он совпадает с серединой отрезка, а инверсия меняет местами внутренность и внешность отрезка. Получаем следующее утверждение:

Следствие 2.9. На прямой XY отмечены точки A и B . Точка M — середина отрезка XY . Следующие утверждения эквивалентны:

- $f_{XY}(A) = -f_{XY}(B)$ (или, что равносильно, $[X, Y; A, B] = -1$);
- $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MX^2$ (т.е. A и B инверсны относительно окружности с диаметром XY).

Задача 5. Треугольник ABC вписан в окружность Ω . Также дана произвольная прямая ℓ , пересекающая окружность в различных точках X и Y . Пусть M — точка Микеля прямых AB, BC, AC и ℓ . Пусть $f = f_{XY}$. Докажите, что $f(M) = f(A) \cdot f(B) \cdot f(C)$.

Задача 6. $ABCD$ — равнобокая трапеция. Некоторая окружность проходит через A и касается основания BC в точке E . Пусть X — вторая точка пересечения этой окружности с описанной окружностью трапеции. Прямая XE пересекает описанную окружность в точке Y , а прямая DY пересекает прямую BC в точке F . Докажите, что $CF = BE$.

Задача 7. Даны две окружности ω_1 и ω_2 , пересекающиеся в точках P и Q . Точки A и B лежат на PQ , точки K, L — на ω_1 , и точки M, N — на ω_2 . Известно, что прямые AK, BL касаются ω_1 , а прямые AM, BN касаются ω_2 , причём с каждой стороны от XY ровно по две точки из K, L, M, N . Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

Задача 8. Точки B, C, D, E, F лежат на одной окружности. Прямые DE и DF пересекают прямую BC в точках X и Y . Описанные окружности треугольников XYD и BCD пересекаются в точке Z . Докажите, что точки E, F , точка, симметричная D относительно середины отрезка BC , и точка, симметричная Z относительно прямой BC , лежат на одной окружности.

Задача 9. В треугольник ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Прямые AC и A_1C_1 пересекаются в точке B_2 . Прямая, проходящая через B_1 параллельно A_1C_1 , пересекает прямые AB и BC в точках X и Y . Докажите, что точки X , Y , B_2 и середина отрезка AC лежат на одной окружности.

Задача 10* (Устная городская геометрическая олимпиада 2025 10.5). Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне BC и прямые AB , AC образуют треугольник Δ . Пусть X — точка пересечения касательных в точках B и C к окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая AX повторно пересекает эту окружность в точке G , а M — середина стороны BC . Докажите, что описанные окружности треугольников XGM и Δ касаются.

Задача 11*. В треугольнике ABC медиана AM пересекает описанную окружность в точке F . Вписанная в треугольник ABC парабола с фокусом F касается прямых BC , AC и AB в точках P , Q и R . Докажите, что точки P , Q , R , M лежат на одной окружности.

2.3 Generalized Cool Ratio Lemma

Теорема 2.10 (Generalized Cool Ratio lemma). Пусть дана окружность ω и хорда XY . Точки A , B , C и D лежат на ω . На прямой XY выбраны точка E и F . Тогда A , B , C , D , E , F лежат на одной конике тогда и только тогда, когда

$$f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) \cdot f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D) = f_{XY}(E) \cdot f_{XY}(F).$$

Задача 12. Окружность и прямая пересекаются в двух точках. Коника пересекает окружность в точках X , Y , Z и T , а прямую — в точках A и B . Прямые AX , AY , BZ и BT повторно пересекают окружность в точках X' , Y' , Z' и T' . Докажите, что точки X' , Y' , Z' , T' , A и B лежат на одной конике.

2.4 Связь CRL с классическими метрическими теоремами

Утверждение 2.11 (Связь с поворотной гомотетией). Дан треугольник ABC и точки E и F на прямых AB и AC соответственно. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и AEF . Тогда $|f_{AB}(M)| = |f_{AC}(M)| = \frac{AE}{BF}$.

В предыдущих задачах мы фиксировали одну базовую хорду и использовали CRL для неё. Однако иногда бывает полезно ввести несколько cool-ratio-функций и переписать требуемое утверждение с их помощью! В качестве примера можно привести теоремы Фалеса, Чевы и Менелая. В дальнейшем, если в задаче дан треугольник ABC , мы рекомендуем следующую нотацию: $p(T) = f_{BC}(T)$, $q(T) = f_{CA}(T)$, $r(T) = f_{AB}(T)$, причем $p(A), q(B), r(C) > 0$ (иными словами, внутри треугольника ABC все три функции положительны.)

Утверждение 2.12 (Теорема Фалеса). Дан треугольник ABC и точки E и F на AB и AC соответственно. Прямые EF и BC параллельны тогда и только тогда, когда $r(E) \cdot q(F) = 1$.

Утверждение 2.13 (Теорема Чевы). Дан треугольник ABC и точки D , E и F на BC , AB и AC соответственно. Прямые AD , BE , CF пересекаются в одной точке или попарно параллельны тогда и только тогда, когда $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = -1$.

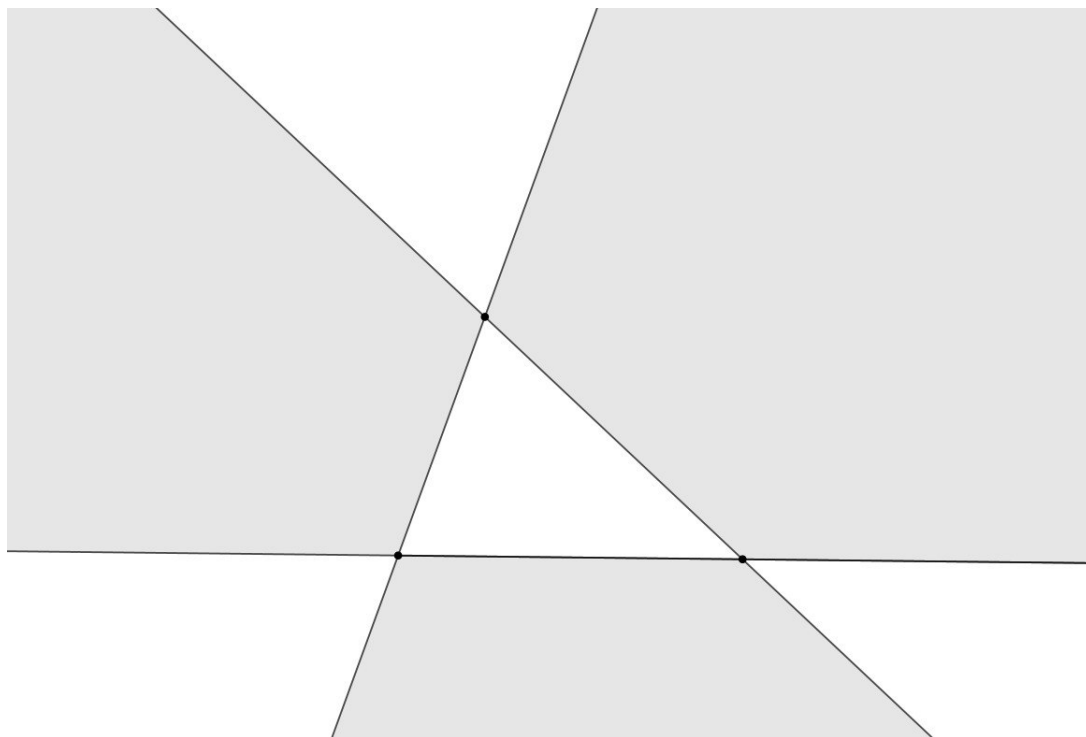
Утверждение 2.14 (Теорема Менелая). Дан треугольник ABC и точки D , E и F на BC , AB и AC соответственно. Точки D , E , F лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = 1$.

Утверждение 2.15 (Тригонометрическая теорема Чевы). Дан треугольник ABC и точки D , E и F на (ABC) . Прямые AD , BE , CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = -1$.

Также хочется отметить ещё несколько простых, но полезных свойств:

Утверждение 2.16.

- (a) $p(T) \cdot q(T) \cdot r(T) = \pm 1$, где знак $+$ в серых секторах (см. картинку).
- (b) $p(A) \cdot q(B) \cdot r(C) = 1$



Задача 13. Дан треугольник ABC . Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_2 , C_2 . B_2A_1 повторно пересекает окружность в точке X_1 , а B_2C_1 повторно пересекает окружность в точке Y_1 . Окружность описанная около $A_1A_2X_1$ пересекает повторно сторону BC в точке X_2 , а окружность описанная около $C_1C_2Y_1$ пересекает повторно сторону AB в точке Y_2 . Докажите, что $X_2Y_2 \parallel AC$.

Задача 14. Дан треугольник ABC . Точка D - произвольная на его описанной, M - середина BC . Окружность AMD повторно пересекает прямую BC в точке X . BD пересекает AC в точке Y . Касательные к описанной в B и C пересекаются в T . Докажите, что точки X , Y и T лежат на одной прямой.

Задача 15.

(а) Треугольники ABC и DEF вписаны в окружность Ω . Прямая BC пересекает прямые DE и DF в точках X и Y . Окружность (DXY) пересекает Ω в точке D_1 . Аналогично определяются точки E_1 и F_1 . Докажите, что прямые AD_1 , BE_1 и CF_1 пересекаются в одной точке.

(b*) (Гроб из JCG). Треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют общую описанную окружность, а прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке. Точка A_1 на (ABC) такова, что она лежит на окружности, проходящей через A и точки пересечения $B'C'$ с AB, AC . Аналогично определим точки $B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$. Докажите, что прямые $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ и $C_1C'_1$ пересекаются в одной точке.

Упомянем ещё одну теорему, которая в некотором смысле является аналогом теоремы (2.10) для случая, когда окружность+прямая заменены на три прямые общего положения.

Теорема 2.17 (Теорема Карно). Дан треугольник ABC , точки A_1, A_2 на BC , точки B_1, B_2 на AC , точки C_1, C_2 на AB . Точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной конике тогда, и только тогда, когда

$$p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot q(B_1) \cdot q(B_2) \cdot r(C_1) \cdot r(C_2) = 1.$$

Задача 16* (Московская математическая олимпиада 2006, 10.6). На описанной окружности треугольника ABC выбраны точки P и Q . Точка A_1 выбрана на прямой BC так, что прямые PA_1 и QA_1 симметричны относительно BC . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Задача 17. Дан треугольник ABC , A_1, A_2 на BC , B_1, B_2 на AC , C_1, C_2 на AB , таковы, что $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ на одной конике. Точки $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4$ на описанной окружности треугольника ABC таковы, что четвёрки точек $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4, C_1C_2C_3C_4$ лежат на одной

окружности. Докажите, что:

- (a) треугольник образованный прямыми A_3A_4 , B_3B_4 и C_3C_4 , перспективен треугольнику ABC .
- (b) если прямые AA_3 , BB_3 и CC_3 пересекаются в одной точке, то прямые AA_4 , BB_4 и CC_4 также пересекаются в одной точке.

Одно из преимуществ CRL — более компактная запись отношений отрезков, поэтому обычно мы стремимся перевести как можно большую часть выкладок на язык cool-ratio-функций. Однако иногда для проверки финального равенства бывает полезно вернуться к стандартной записи отрезков. При этом важно не забыть проверить совпадение знаков. Следующие задачи про это.

Задача 18 (ЮМТ-2019). В треугольнике ABC с описанной окружностью ω проведены чевианы AD , BE и CF , пересекающиеся в одной точке. Точка M — середина стороны BC . Окружности ω и (AEF) повторно пересекаются в точке X . Прямая XD повторно пересекает ω в точке Y . Прямая YM повторно пересекает ω в точке Z . Докажите, что прямая AZ касается (AEF) .

Задача 19. Дан треугольник ABC . Точки D и E на сторонах AB и BC соответственно таковы, что $ADEC$ вписанный. Оказалось, что на стороне AC существует такая точка T , что $BT = BD$, $CT = CE$. Докажите, что описанная окружность треугольника DET проходит через основание внутренней биссектрисы из вершины B .

3 Евклидовы инварианты поризма Понселе

Данный раздел посвящён разнообразным инвариантам поризма Понселе, а также применениям поризма в олимпиадных задачах. Подразделы по большей части независимы, так что не обязательно решать задачи по порядку. Тем не менее, при решении некоторых задач может быть полезно вернуться назад и подчеркнуть какую-нибудь полезную идею оттуда.

Разумеется, большинство задач не являются оригинальными: они взяты из статей или олимпиад, в том числе недавних. Поэтому нет ничего страшного, если вдруг вы видели или даже умеете решать ту или иную задачу. Задач в разделе много (возможно, даже слишком много), так что вам в любом случае не будет скучно.

Правила игры:

- Во всех задачах словосочетание «треугольник вращается между окружностями / кониками» означает вращение в смысле теоремы Понселе.
- Словосочетание «вписанная коника» означает, что коника касается сторон многоугольника или их продолжений — в частности, может лежать вне треугольника. Однако вписанную и невписанную окружности мы различаем.

- Если вас просят доказать существование фиксированной окружности с какими-то свойствами (точка движется по ней, переменная окружность всё время её касается и т.д.), то эта окружность вполне может выродиться в точку или прямую. Аналогично, в утверждении «прямые проходят через фиксированную точку» точке разрешается быть бесконечно удалённой. А под словом «инверсия» может скрываться не только обычная инверсия, но и композиция инверсии и центральной симметрии с общим центром (так называемая «инверсия с отрицательным радиусом»). Список можно продолжить. Общее правило таково: если вам кажется, что утверждение какой-то задачи в своей текущей формулировке неверно, обращайтесь к авторам проекта.
- Некоторые задачи состоят из нескольких пунктов. Принципы группировки утверждений в одну задачу могут быть разными. Иногда предыдущие пункты помогают в решении следующих — так происходит в доказательстве теоремы Лагерра. В других случаях мы объединяем утверждение и его обобщение (см., например, задачу (53)), разные свойства общей конструкции или просто похожие утверждения, как в задаче (45). В исключительных случаях принцип объединения может быть загадочен и прояснится позже.

3.1 Сопряжение Клоусона и лемма Скутина

Задача 20. Четырёхугольник $ABCD$ вращается между описанной окружностью Ω и вписанной коникой γ с фокусами P и Q .

- Докажите, что сопряжение Клоусона, соответствующее четырёхугольнику, остаётся постоянным.
- Пусть вписанная коника — это окружность, а прямые AB и CD пересекаются в точке E . Докажите, что все окружности (BCE) касаются фиксированной окружности.
- Вернёмся к случаю эллипса. Докажите, что сумма $\angle ABP + \angle CDP$ постоянна.

Следующая теорема интересна сама по себе и может быть доказана с помощью сопряжения Клоусона, однако не имеет прямого отношения к поризму Понселе, поэтому мы не выделяем её в отдельную задачу.

Теорема 3.1 (Теорема Микеля об изогональном сопряжении). Дан треугольник ABC и две пары (P, P') , (Q, Q') изогонально сопряжённых относительно него точек. Тогда точка Микеля четырёхугольника $PQR'Q'$ лежит на описанной окружности треугольника ABC .

Тем не менее, эта теорема полезна при доказательстве леммы Скутина — одного из самых важных утверждений раздела с евклидовыми инвариантами.

Теорема 3.2 (Лемма Скутина). Треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг эллипса γ и вращается между ними в смысле теоремы Понселе. Фиксированная точка P

не принадлежит Ω . Тогда точка Q , изогонально сопряжённая P относительно треугольника ABC , движется по окружности.

Задача 21. Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипса, а M — точка Микеля четырёхугольника F_1PF_2Q .

- (а) Запишите в комплексных координатах отображение $M \mapsto Q$ и докажите лемму Скутина.
- (б) Рассмотрите композицию инверсии с центром P и радиусом $\sqrt{PF_1 \cdot PF_2}$ и симметрии относительно биссектрисы угла F_1PF_2 и докажите лемму Скутина.

Внимательно приглядевшись к любому из двух доказательств леммы Скутина, можно явно описать траекторию движения ортоцентра:

Следствие 3.3. Ортоцентр треугольника Понселе движется по окружности, центр которой симметричен O относительно центра вписанного эллипса, а радиус равен $\frac{OF_1 \cdot OF_2}{R_{(ABC)}}$.

Задача 22. Пусть вписанная коника тоже является окружностью с радиусом r . Докажите, что точка Нагеля треугольника ABC движется по окружности с центром O и радиусом $R - 2r$.

Задача 23. Треугольник ABC вращается между двумя окружностями. Фиксированная прямая ℓ касается вписанной окружности.

- (а) Докажите, что точка Микеля прямых AB , BC , AC и ℓ остаётся неподвижной.
- (б) Напомним, что если даны четыре прямые, то четыре ортоцентра треугольников, образованных всевозможными тройками прямых, лежат на одной прямой, которая называется *прямой Обера*. Докажите, что прямая Обера прямых из пункта (а) проходит через фиксированную точку.
- (с*) Пусть ω_H — окружность, по которой движется ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что фиксированная точка из предыдущего пункта лежит на ω_H .

Замечание. Сравните пункт (б) с задачей 6 из проекта «Вокруг теоремы Понселе» с ЛКТГ-2014:

Утверждение 3.4. Треугольник ABC вращается между двумя окружностями, а P — фиксированная точка на описанной окружности. Докажите, что все прямые Симсона точки P относительно треугольника ABC проходят через фиксированную точку.

Задача 24.

- (а) (Telv Cohl¹, 2014) Дан треугольник ABC . Пусть ℓ — переменная касательная к его вписанной окружности. Прямая ℓ и три прямые, симметричные ей относительно сторон треугольника ABC , образуют полный четырёхсторонник. Докажите, что точка Микеля

этого четырёхсторонника движется по окружности или прямой.

- (b) Докажите то же утверждение при условии, что прямая ℓ фиксирована, а треугольник ABC вращается между двумя окружностями.

Задача 25. Треугольник ABC вращается между двумя окружностями. Фиксированная прямая ℓ касается вписанной окружности и пересекает прямые BC и AC в точках D и E соответственно. Прямая ℓ' проходит через точки, симметричные D и E относительно середин сторон BC и AC соответственно.

- (a*) (SAGF² 2024, P3) Докажите, что ℓ' проходит через фиксированную точку.
 (b*) Пусть ω_N — окружность, по которой движется точка Нагеля треугольника ABC . Докажите, что фиксированная точка из предыдущего пункта лежит на ω_N .

Задача 26.

- (a) (Теорема Морли) В треугольнике ABC отмечены изогонально сопряжённые точки P и Q . Рассмотрим комплексную систему координат, в которой окружность (ABC) является единичной, и обозначим координаты точек соответствующими строчными буквами. Докажите, что

$$p + q + ab\overline{c}\overline{p}\overline{q} = a + b + c.$$

- (b) Треугольник Δ вращается между описанной окружностью и вписанной коникой. Также на плоскости фиксированы точки P и Q . Как известно из леммы Скутина, точки P' и Q' , изогонально сопряжённые P и Q относительно Δ , движутся по окружностям. Докажите, что угловые скорости этих точек равны.

3.2 Связь с полярным преобразованием.

Следующая задача принадлежит Е. Диомидову и В. Калашникову и была предложена в 2014 году читателям журнала «Journal of Classical Geometry» в качестве открытой проблемы. Насколько известно авторам проекта, задача оставалась нерешённой как минимум долгое время.

Утверждение 3.5. Треугольник Δ вращается между описанной окружностью Ω и (вне)вписанной окружностью γ . Тогда трилинейная поляра фиксированной точки $P \in \Omega$ относительно Δ проходит через фиксированную точку.

Менее года назад авторам проекта удалось придумать короткое и элегантное доказательство. Следующая задача является ключевой:

¹Telv Cohl — известный тайваньский геометр и задачный композитор, автор геометрического блога [12].

²SAGF — онлайн-олимпиада по геометрии, организованная Кириллом Бельским. Два дня по четыре задачи, сложность которых примерно соответствует задачам G3-G8 шортлиста IMO.

Задача 27. Треугольник Δ вращается между описанной коникой и вписанной параболой. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника Δ движется по прямой, если описанная коника — это:

- (a) эллипс;
- (b) гиперболы;
- (c*) парабола.

Из предыдущей задачи уже несложно вывести задачу Диомидова и Калашникова (хотя вы, конечно, вправе решать её независимо).

Задача 28. Докажите утверждение (3.5) для случая, когда P лежит:

- (a) внутри γ .
- (b) снаружи γ .
- (c*) на γ .
- (d**) Можно доказать (счёт в барицентрических координатах приведён в статье [5]), что точка Лемуана треугольника ABC движется по эллипсу. Докажите, что фиксированная точка из предыдущих пунктов лежит на этом эллипсе.

Следующая задача является единственной в разделе, где в условии появляется комплексная проективная плоскость. А именно, мы будем работать с предельными точками пучка двух коник (в то время как пятиугольник и коники можно по-прежнему считать вещественными).

Задача 29* (Ф. Нилов). Пятиугольник $ABCDE$ вписан в конику Γ и описан вокруг коники γ . Диагонали пятиугольника образуют пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ ($A_1 = BD \cap CE$ и т.д.), который вписан в конику Γ_1 и описан вокруг коники γ_1 . Докажите, что у пучков, порождённых парами (Γ, γ) и (Γ_1, γ_1) , совпадают предельные точки.

3.3 Теорема Лагерра

Теорема 3.6 (Формула Эйлера). Треугольник Δ вписан в окружность с центром O и радиусом R и описан вокруг окружности с центром I и радиусом r . Тогда

$$R^2 - OI^2 = 2Rr. \quad (3.1)$$

Естественно задать вопрос об обобщении формулы Эйлера на случай произвольных вписанных коник. Ответ на этот вопрос даёт теорема Лагерра:

Теорема 3.7 (Теорема Лагерра, 1879). Треугольник ABC вписан в окружность с центром O и радиусом R и описан вокруг эллипса с фокусами F_1, F_2 и длиной малой оси l . Тогда

$$(R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2) = R^2 l^2. \quad (3.2)$$

Замечание. Утверждение теоремы остаётся верным, если заменить эллипс на гиперболу, а под l^2 подразумевать квадрат её мнимой оси (который может быть выражен формулой $l^2 = a^2 - d^2$, где d — расстояние между фокусами гиперболы, а a — расстояние между точками пересечения гиперболы и прямой через её фокусы).

Замечание. Из теоремы Лагерра легко вывести обратное утверждение: если выполнено соотношение (3.2), то существует треугольник, вписанный в окружность и описанный вокруг коники.

Теперь мы готовы доказать теорему Лагерра.

Задача 30.

- (а) Дан эллипс с фокусами F_1 и F_2 и длиной малой оси $2b$, а m — произвольная касательная к эллипсу. Тогда $\text{dist}(F_1, m) \cdot \text{dist}(F_2, m) = b^2$.
- (б) Обобщение леммы о трезубце. Пусть L_1 и L_2 — точки повторного пересечения окружности (ABC) с лучами AF_1 и AF_2 . Докажите, что $F_1L_1 \cdot F_2L_2 = BL_1 \cdot BL_2$.
- (с) Выведите теорему Лагерра из предыдущих пунктов.

Теорема 3.8 (Теорема о 3-парах Понселе). Сферы Ω_1 и Ω_2 касаются плоскости α с разных сторон. Сфера Ω касается этих двух сфер одинаковым образом и пересекает α по окружности ω . Общие внешние касательные к Ω_1 и Ω_2 пересекают α по эллипсу γ . Тогда существует треугольник, вписанный в ω и описанный вокруг γ .

Теорема 3.9 (Теорема Грейса). Пусть ω и ω_A — вписанная и A -вневыписанная сферы тетраэдра $ABCD$. Тогда существует сфера, проходящая через вершины B, C, D и касающаяся ω и ω_A .

Задача 31.

- (а*) Докажите теорему о 3-парах Понселе.
- (б) Выведите теорему Грейса из теоремы о 3-парах Понселе.

3.4 Скрытый Понселе. Часть 1

Использование теоремы Понселе в олимпиадных задачах не всегда подразумевает процесс вращения треугольника. Часто картинка статична, а теорема Понселе появляется в облике следующих простых следствий:

Следствие 3.10. Треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω . Произвольная точка D лежит на Ω . Касательные из D к ω (если они существуют), повторно пересекают Ω в точках E и F . Тогда прямая EF также касается ω .

Следствие 3.11. Треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω . Произвольная хорда EF окружности Ω касается ω . Тогда вторые касательные из E и F к ω пересекаются на Ω .

Следствие 3.12. Треугольники ABC и DEF вписаны в общую конику. Тогда они описаны вокруг общей коники; в частности, главные диагонали шестиугольника, образованного в пересечении треугольников, пересекаются в одной точке. В обратную сторону утверждение, разумеется, тоже верно.

Задача 32. Обозначим символом ω_a внеписанную окружность треугольника ABC , касающуюся отрезка BC . Окружности (ABC) и ω_a пересекаются в точках X и Y . Касательные, проведенные в точках X и Y к ω_a , повторно пересекают окружность (ABC) в точках P и Q . Докажите, что прямые, касающиеся (ABC) в точках P и Q , также касаются и окружности ω_a .

Задача 33. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Точки X, Y на описанной окружности таковы, что $AI = AX = AY$. Докажите, что XY касается вписанной в треугольник ABC окружности.

Задача 34 (Майские сборы 2022, P2/3). Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности ω_A и ω_C с центрами I_A и I_C вписаны в треугольники DAB и BCD соответственно. Общая внешняя касательная к ω_A и ω_C пересекает окружность $(ABCD)$ в точках X и Y . Докажите, что точки I_A, I_C, X и Y лежат на одной окружности.

Задача 35 (IGO-2019, Advanced, P5). Дана парабола с фокусом F . Рассматриваются всевозможные вписанные в параболу треугольники, ортоцентр которых совпадает с F . Докажите, что у всех таких треугольников общая вписанная окружность.

Задача 36. В треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Прямая $АН$ повторно пересекает (ABC) в точке A_1 , а серединный перпендикуляр к отрезку $АН$ пересекает (ABC) в точках A_2 и A_3 . Точки $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ определяются аналогично. Докажите, что точки Лемуана треугольников $ABC, A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$ лежат на одной окружности, центр которой принадлежит прямой $ОН$.

3.5 Скрытый Понселе. Связь с изогональным сопряжением

Для любой пары изогонально сопряжённых точек существует коника с фокусами в этих точках, касающаяся сторон треугольника или их продолжений. Поэтому бывает полезно начать вращать треугольник между описанной окружностью и данной коникой. Также могут быть полезны лемма Скутина и теорема Лагерра, особенно если в условии задач фигурируют какие-то

другие замечательные точки.

Пусть дан эллипс с фокусами P и Q и длиной большой оси $2a$. Прямая ℓ касается его в точке X , а точка P' симметрична P относительно ℓ . В силу оптического свойства эллипса, точки P' , X и Q лежат на одной прямой, а тогда $P'Q = PX + QX = 2a$. В качестве следствия получаем простое, но очень полезное наблюдение:

Утверждение 3.13. Эллипс с фокусами P , Q и длиной большой оси $2a$ вписан в треугольник Δ . Тогда радиус общей педальной окружности точек P и Q относительно Δ равен a .

Задача 37 (Третья теорема Фонтене). Точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC .

- (a) Докажите, что если PQ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC , то педальная окружность точек P и Q касается окружности девяти точек треугольника ABC .
- (b) Докажите обратное утверждение.

Замечание. Геометрическое множество точек P из предыдущей задачи называется *кубикой МакКея*.

Задача 38 (SAGF-2024, P7, переформулировано). Треугольник ABC вписан в окружность с центром O и радиусом R и описан вокруг эллипса с центром X и длиной малой оси l . Точка N — центр окружности девяти точек треугольника ABC .

- (a) Докажите, что если O лежит на малой оси эллипса, то $2NX = R - l$.
- (b) Докажите, что в общем случае выполнено неравенство $2NX \leq R - l$.

3.5.1 Лемма о степени ортоцентра

Задача 39 (Лемма о степени ортоцентра). Дан треугольник ABC с центром описанной окружности O и ортоцентром H . Точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC , а ρ — радиус общей педальной окружности точек P и Q . Тогда

$$4\rho^2 - HP^2 - HQ^2 = -\text{pow}(H, (ABC)).$$

Иными словами, если точки P_a, P_b, P_c симметричны P относительно сторон треугольника ABC , то

$$\text{pow}(H, (P_a P_b P_c)) + HP^2 = \text{pow}(H, (ABC)).$$

Следствие 3.14. Точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC . Точки P_a, P_b, P_c симметричны P относительно BC, AC, AB . Аналогично определим Q_a, Q_b, Q_c . Ортоцентр H треугольника ABC лежит на радикальной оси $(P_a P_b P_c)$ и $(Q_a Q_b Q_c)$ тогда и только тогда,

когда $HP = HQ$.

Задача 40.

- (а) Треугольники ABC и DEF имеют общий ортоцентр и описаны вокруг одной параболы. Докажите, что вершины этих треугольников лежат на равносторонней гиперболы.
- (b) (Tev Cohl, 2019) Точки A, B, C, D, E и F лежат на конике, которая не является равносторонней гиперболой. Известно, что ортоцентры треугольников ABC и DEF совпадают (обозначим эту точку буквой H). Докажите, что H лежит на радикальной оси (ABC) и (DEF) .

3.5.2 Теорема Айера

Задача 41. Треугольник ABC вращается между описанной окружностью Ω и вписанной коникой с фокусами P и Q . Точка M_a — точка Микеля четырёхугольника $BPCQ$. Несложно проверить счётом углов, что $M_a \in \Omega$. Докажите, что отображение $A \mapsto M_a$ — проективная инволюция.

Следствие 3.15. Все прямые AM_a проходят через фиксированную точку или попарно параллельны.

Задача 42*. Треугольник ABC вращается между описанной окружностью и вписанной коникой с фокусами P и Q . Докажите, что $\angle ABP + \angle BCP + \angle CAP = \text{const}$.

Задача 43 (Теорема Айера). Даны треугольник ABC и точка P . Пусть $P_aP_bP_c$ — её педальный треугольник, а Ω_9 — окружность девяти точек треугольника ABC . Докажите, что направленный угол между касательными, проведёнными к окружностям $(P_aP_bP_c)$ и Ω_9 в их общей точке, равен $\pm(90^\circ - \angle ABP - \angle BCP - \angle CAP)$.

3.5.3 Задача 10.4 с последнего финала олимпиады им. Шарыгина

Задача 44 (Поризм Брокера). Треугольник ABC вращается между описанной окружностью и вписанным эллипсом с фокусами P и Q . Предположим, что для одного положения треугольника точки P и Q являются точками Брокера с углом φ . Докажите, что для всех других положений треугольника точки P и Q также являются точками Брокера с углом φ .

Задача 45. В треугольнике ABC отмечены точка пересечения медиан M , ортоцентр H , центр описанной окружности O и точка Лемуана L .

- (а*) (Ол. Шарыгина 2025, финал, 10.4) Точка S является точкой Шалтая треугольника LHM со стороны вершины L , а L^* инверсна L относительно описанной окружности. Тогда $SL^* \parallel MH$.

(b*) Точка T является точкой Шалтая треугольника LOM со стороны вершины M , а M^* инверсна M относительно описанной окружности. Тогда $TM^* \parallel OL$.

Замечание. Утверждение пункта (b) равносильно тому, что образ M при инверсии относительно окружности с диаметром OL попадает на описанную окружность треугольника ABC .

3.6 Вокруг классического доказательства теоремы Понселе

В этом подразделе собраны задачи, связанные с леммой о соосных окружностях и классическими фактами про многоугольники Понселе (подробности в подразделе (1.7)).

Теорема 3.16. Дано натуральное число $2 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ вращается между двумя окружностями. Из теоремы (1.38) следует, что прямая A_kA_{n+2-k} касается фиксированной окружности. Тогда точка касания проективно зависит от A_1 .

Замечание. На множестве касательных к конике естественным образом можно определить двойное отношение. Следовательно, можно сказать, что и сами прямые A_kA_{n+2-k} проективно зависят от A_1 .

Следствие 3.17. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2s+1}$ вращается между двумя окружностями. Тогда точка касания стороны $A_{s+1}A_{s+2}$ со вписанной окружностью проективно зависит от A_1 .

Замечание. Следствие (3.17) было предложено на летней конференции турнира городов в 2022 году (проект [2], задача №25). Тогда никто из участников проекта его не осилил, а составители проекта обладали только сложным алгебраическим доказательством. Лишь некоторое время спустя было найдено простое геометрическое доказательство, которое мы и предлагаем вам проделать.

Задача 46.

(a) (Обобщённая гомография Понселе). Даны окружности Ω и γ . Из произвольной точки $A \in \Omega$ проводятся касательные (если они существуют) к γ , повторно пересекающие Ω в точках B и C . Из теоремы (1.38) следует, что все прямые BC касаются фиксированной окружности. Докажите, что точка касания проективно зависит от A .

(b) Докажите теорему (3.16).

Замечание. Из теоремы (1.18) следует, что обычная и обобщённая гомографии Понселе также верны и для коник, пересекающихся не более, чем в двух точках (с учётом кратности). Тем не менее, разрешается пользоваться этими утверждениями для произвольной пары коник: обычной гомографией Понселе — всегда, а задачей (46) — после того, как решите её. Если вы желаете узнать максимально общее доказательство этих фактов, то мы удовлетворим ваше любопытство в дополнительном разделе (если до него дойдёт дело).

Задача 47 (Д. Бродский). Окружность ω находится внутри окружности Γ . Пусть $X \in \omega$, $Y \in \Gamma$ — два велосипедиста, стартующих в ближайших точках окружностей ω, Γ , и едущих по ним в одном направлении с одинаковыми угловыми скоростями. Точки P, Q на окружности ω таковы, что $PX = QX = XY$. Докажите, что PQ касается фиксированной окружности.

Задача 48. Внутри окружности Ω расположена окружность ω . Рассмотрим замкнутую цепочку окружностей $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n}$. Окружность γ_i с центром O_i касается внешним образом ω , внутренним образом Ω и окружностей γ_{i-1} и γ_{i+1} (как обычно, $\gamma_{i \pm 2n} = \gamma_i$). Докажите, что все прямые $O_i O_{i+n}$ пересекаются в одной точке, которая зависит только от ω и Ω , но не от выбора цепочки.

Задача 49 (ЮМТ 2024, обобщение). Многоугольник $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ вращается между двумя окружностями. Докажите, что величина $\frac{\sum_{i=1}^n A_i A_{i+n}}{S_{A_1 \dots A_{2n}}}$ постоянна.

Задача 50.

(а*) Многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$ вращается между двумя окружностями. Прямая $A_i A_{i+1}$ касается вписанной окружности в точке X_i . Докажите, что центр масс точек $X_1, X_2, \dots, X_n$ постоянен.

(b) Многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$ вращается между двумя окружностями, а P — фиксированная точка плоскости. Прямая $A_i A_{i+1}$ касается вписанной окружности в точке X_i . Докажите, что величина $\sum_{i=1}^n PX_i^2$ постоянна.

(с) Пусть теперь $n = 2m$. Докажите, что величина $\sum_{i=1}^{2m} \frac{A_i A_{i+1}}{A_{m+i} A_{m+i+1}}$ постоянна.

Отдельный интерес вызывает (не)возможность построения вписанно-описанных многоугольников циркулем и линейкой. Мы практически не будем затрагивать этот вопрос в проекте и приведём только следующую задачу, которая утверждает, что достаточно научиться строить нечётноугольники.

Задача 51. Окружность β лежит внутри окружности α . Известно, что существует n -угольник, вписанный в α и описанный вокруг β . С помощью циркуля и линейки постройте $2n$ -угольник, вписанный в α и описанный вокруг некоторой окружности β' , соосной с α и β .

3.7 Разное

В разделе евклидовых инвариантов мы не стремимся к максимальной общности результатов. Многие задачи раздела остаются верными при замене вписанной окружности на произвольную двухфокусную конику. Если разница кажется нам существенной, мы формулируем обе версии (см., например, задачу (53)). Но зачастую решение практически не меняется (конечно, если вы придумали «правильное» решение). Предлагаем вам убедиться в этом.

Задача 52. Решите задачи (23), (24), (25), (28), (32) и (56a) для случая, когда (вне)вписанная окружность заменена на двухфокусную конику.

Задача 53. Треугольник ABC вращается между описанной окружностью и вписанной

(a) (Олимпиада им. Шарыгина, 2023, финал, 10.4) окружностью

(b*) (Xiuyi Chen, aka LoloChen, 2024) двухфокусной коникой

с центром X . Точка A_1 симметрична A относительно X . Докажите, что точка, изогонально сопряжённая A_1 относительно треугольника ABC , движется по прямой.

Следующая задача в каком-то смысле является обратной к лемме Скутина.

Задача 54* (Xinchen Yu, 2024). Треугольник ABC вращается между описанной окружностью и вписанной коникой с центром X . Точка G — центр масс треугольника ABC , точка Y такова, что $\overrightarrow{GY} = -2\overrightarrow{GX}$. Докажите, что точка, изогонально сопряжённая Y , фиксирована.

Замечание. Если коника является окружностью, то Y — это точка Нагеля, а изогонально сопряжённая к ней — центр положительной гомотетии вписанной и описанной окружностей, который и в самом деле фиксирован при вращении треугольника.

Задача 55.** Сходство между задачами (23), (25) и (28) видно невооружённым глазом. Придумайте утверждение, обобщающее их.

Задача 56.

(a*) Шестиугольник $ABCDEF$ вращается между двумя окружностями. Точка P — фиксированная, а точки Q и R изогонально сопряжены P относительно треугольников ACE и BDF . Докажите, что все прямые QR пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

(b**) Шестиугольник $ABCDEF$ вращается между двумя произвольными кониками. Описанные окружности треугольников ACE и BDF четвёртый раз пересекают описанную конику в точках X и Y . Докажите, что все прямые XY пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

Введём определение. Будем говорить, что семейство окружностей *принадлежит одной связке*, если центры всех этих окружностей лежат на одной прямой, или существует точка, имеющая одинаковую степень относительно всех окружностей семейства.

Задача 57. Треугольник Δ вращается между двумя произвольными кониками. Докажите, что его

(a*) описанная окружность

(b**) окружность девяти точек

принадлежит фиксированной связке.

3.7.1 Ломаные Понселе

Незамкнутые ломаные Понселе уже становились предметом изучения геометров. В качестве примера можно вспомнить задачи 7 и 10 из предыдущего проекта про Понселе. В данном разделе мы изучим их подробнее и докажем несколько утверждений, обобщающих уже известные нам факты про замкнутые многоугольники.

Для начала сформулируем несложное утверждение, которое как интересно само по себе, так и может быть полезно в некоторых задачах данного блока.

Утверждение 3.18. Пусть ℓ — радикальная ось окружностей ω_1, ω_2 с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что $|\text{pow}_{\omega_1}(P) - \text{pow}_{\omega_2}(P)| = 2O_1O_2 \cdot \text{dist}(P, \ell)$.

Доказательство мы не приводим; вы можете самостоятельно его проделать, опустив перпендикуляр на линию центров и посчитав отрезки.

Перейдём непосредственно к теме блока. Начнём с однозвенных ломаных.

Задача 58. Хорда AB движется по фиксированной окружности ω с центром O . Внутри ω отмечена точка P . Докажите, что следующие утверждения равносильны:

- Прямая AB касается фиксированной коники, один из фокусов которой совпадает с P .
- Центр O_1 окружности (PAB) движется по окружности или прямой.
- Проекция P на AB движется по окружности или прямой.

Задача 59. Незамкнутая трёхзвенная ломаная вращается между описанной окружностью и вписанной коникой. Обозначим буквой ω описанную окружность треугольника, образованного звеньями ломаной.

- Предположим, что вписанная коника — это окружность. Докажите, что ω касается двух фиксированных окружностей.
- Докажите, что в общем случае ω принадлежит фиксированной связке.

Замечание. Данная задача обобщает пункты (а) и (б) задачи (20). Авторам проекта неизвестно, могут ли окружности из пункта (а) вырождаться в прямые.

Задача 60. Даны окружность Ω и коника с фокусами P и Q . Из произвольной точки $A \in \Omega$ проводятся касательные (если они существуют) к конике, повторно пересекающие Ω в точках B и C .

- Докажите, что точка, изогонально сопряжённая P относительно треугольника ABC , движется по окружности или прямой.
- Докажите, что педальная окружность точки P относительно треугольника ABC

принадлежит фиксированной связке.

(с*) Пусть M — точка Микеля четырёхугольника $BPQC$. Докажите, что существует фиксированная инверсия или осевая симметрия, переводящая A в M .

Замечание. Из пункта (с) следует, что точка M проективно зависит от A и движется по окружности или прямой, а все прямые AM проходят через фиксированную точку. Тем самым, данная задача обобщает задачу (41).

Задача 61. Незамкнутая трёхзвенная ломаная $ABCD$ вращается между двумя окружностями. Прямая ℓ — вторая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABC и BDC .

(a*) Докажите, что точка пересечения прямых ℓ и BC движется по прямой.

(b*) (Г. Забазнов) Докажите, что прямая ℓ касается фиксированной окружности или проходит через фиксированную точку.

Список литературы

- [1] А. В. Акопян, А. А. Заславский *Геометрические свойства кривых второго порядка* // М. МЦНМО: 2007
- [2] Д. Бродский *Движение точек* // Летняя конференция турнира городов, 2022
- [3] А. Л. Городенцев *Геометрия* // Москва, 2017
- [4] Е. Диомидов, А. Заславский, В. Калашников, П. Кожевников, Г. Челноков *Вокруг теоремы Понселе* // Летняя конференция турнира городов, 2014
- [5] А. Заславский, Д. Косов, М. Музафаров. *Траектории замечательных точек треугольника Понселе* // Квант, №2 (2003), стр. 22–25
- [6] В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев. *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*. М.: Факториал, 1997
- [7] В. Протасов *Два века теоремы Понселе* // Квант, №5–6 (2014), стр. 2–12
- [8] М. Сидоренко *Clawson Conjugates* // t.me/geometry_ukraine/893
- [9] А. Уткин *Изогональное сопряжение в четырехугольнике* // Квант, №2 (2019), стр. 37–42
- [10] И. Р. Шафаревич *Основные понятия алгебры* // М., 1985
- [11] mira74 *Ratio lemma* // <https://artofproblemsolving.com/community/q1h2357938p19166714>
- [12] TelvCohl's geometry blog // <https://artofproblemsolving.com/community/c284651>