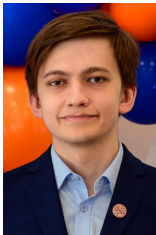


Гомотопическая классификация замкнутых ломанных



Эмиль
Алкин



Олег
Никитенко



Аркадий
Скопенков

Мы излагаем (в виде последовательности задач) базовые случаи некоторых фундаментальных идей и методов математики. Это делается на основе элементарного примера: замкнутые ломаные в подмножестве плоскости. Хотя эти идеи и методы являются частью топологии, они используются во многих других областях, включая информатику.

Пусть N — подмножество плоскости.

Неформально говоря, две замкнутые ломаные в N называются гомотопными, если одна может быть преобразована в другую «непрерывной деформацией» в N .

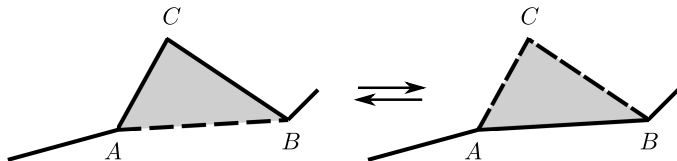
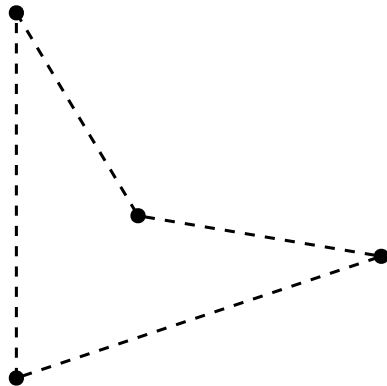
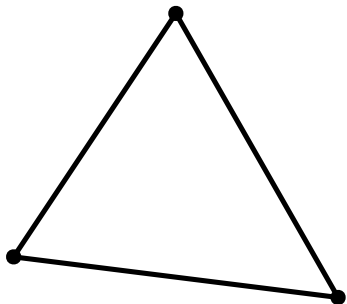
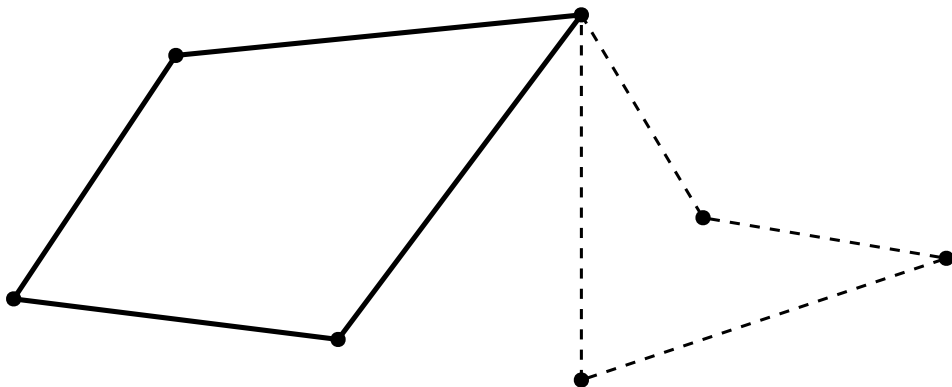


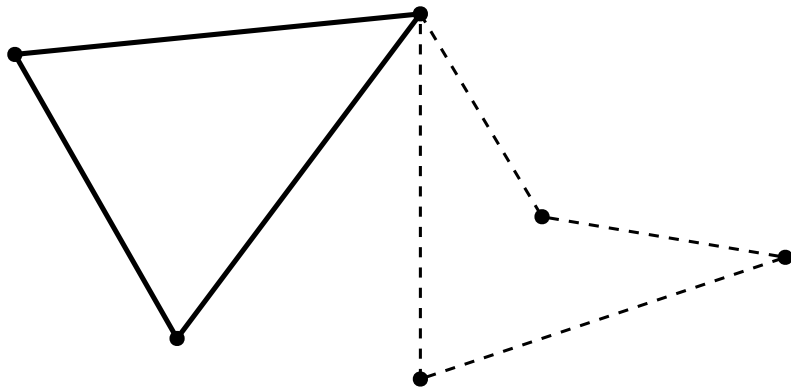
Рис.: Элементарное сокращение

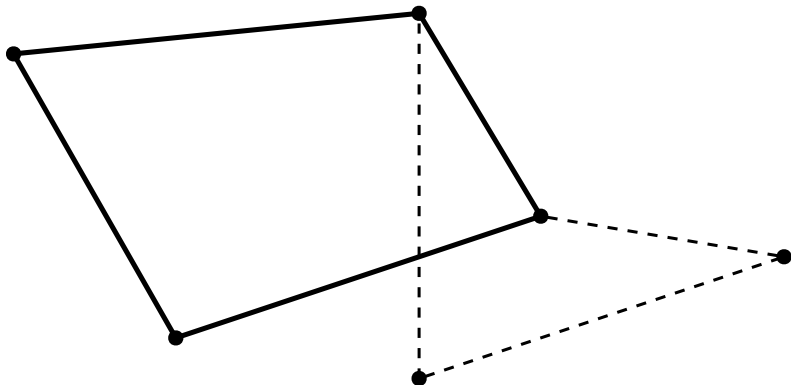
Элементарным сокращением в N замкнутой ломаной в N называется удаление такой ее вершины B , что для соседних с B вершин A, C (которые не обязательно различны) выпуклая оболочка вершин A, B, C содержится в N .

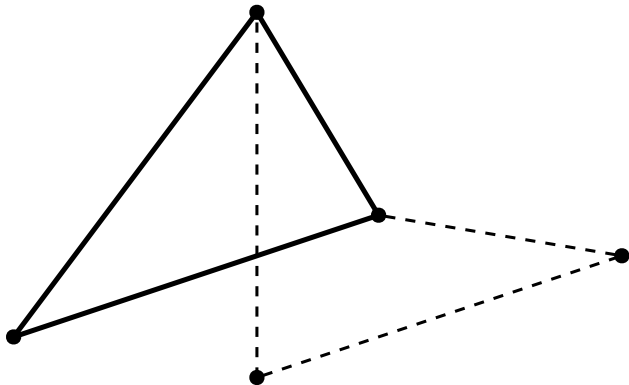
Гомотопия в N — конечная последовательность замкнутых ломаных, для любых двух последовательных ломаных которой одна получена из другой элементарным сокращением в N . Две замкнутые ломаные **гомотопны в N** , если существует гомотопия в N , первая и последняя ломаные в которой совпадают с заданными.

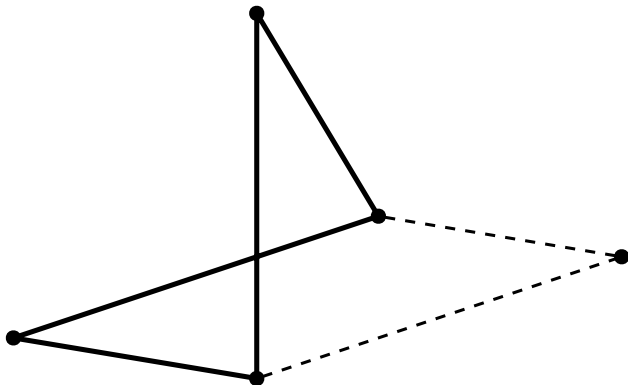


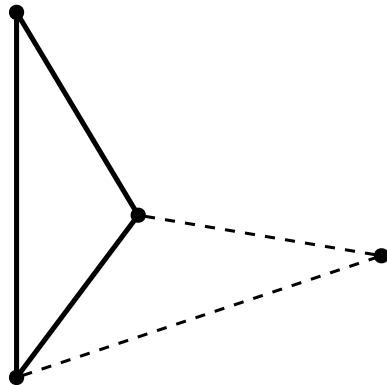


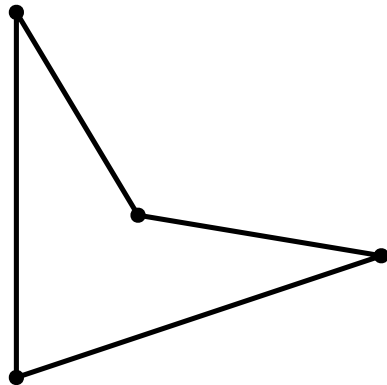












Замкнутой ориентированной **ломаной** называется ориентированная циклическая последовательность точек плоскости (не обязательно различных). Далее слово «ориентированная» пропускается.

Задача 1.1.b

Любые две однотоочечные замкнутые ломаные на плоскости без точки гомотопны.

Замкнутой ориентированной **ломаной** называется ориентированная циклическая последовательность точек плоскости (не обязательно различных). Далее слово «ориентированная» пропускается.

Задача 1.1.b

Любые две однотоочечные замкнутые ломаные на плоскости без точки гомотопны.

Решение

Пусть даны точки A и B . Возьмем точку C , не лежащую ни на одной из прямых, соединяющих A и B с выколотой точкой. Тогда нужная гомотопия — A, AC, C, CB, B .

Задача 1.1.а

Любые две замкнутые ломаные на плоскости гомотопны.

Задача 1.2

Существуют негомотопные замкнутые ломаные на плоскости без точки.

Попробуйте догадаться до инварианта, различающего ломаные на рисунке!

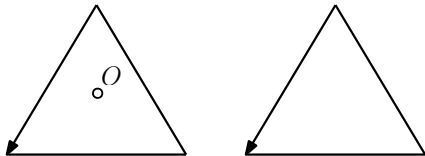
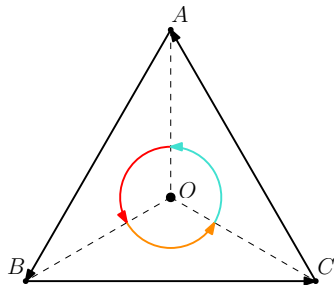


Рис.: Две замкнутые ломаные на плоскости без точки O

Числом оборотов $w(l, O)$ замкнутой ломаной $l = A_1 \dots A_m$ вокруг не лежащей на ней точки O называется количество оборотов при вращении вектора, начало которого находится в точке O , а конец обходит l в заданном порядке вершин. Строго говоря,

$$2\pi \cdot w(l, O) := \\ = \angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{m-1} O A_m + \angle A_m O A_1.$$



$$w(ABC, O) = \\ \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = \\ +1.$$

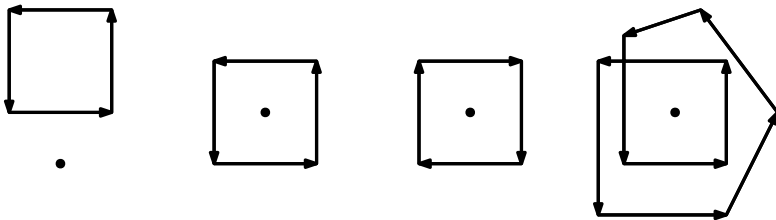


Рис.: Числа оборотов равны 0, +1, -1, +2

Задача 4.1.а

Замкнутые ломаные с разным числом оборотов вокруг O не гомотопны.

На этом и следующем слайдах рассматриваются замкнутые ломаные и их гомотопность на плоскости без точки O .

Задача 4.1.b

Замкнутая ломаная l гомотопна одноточечной ломаной тогда и только тогда, когда $w(l, O) = 0$.

На этом и следующем слайдах рассматриваются замкнутые ломаные и их гомотопность на плоскости без точки O .

Задача 4.1.b

Замкнутая ломаная l гомотопна одноточечной ломаной тогда и только тогда, когда $w(l, O) = 0$.

Задача 4.1.c

Возьмем контур $\partial\Delta$ треугольника Δ , содержащего внутри себя точку O .

Любая замкнутая ломаная l гомотопна $|w(l, O)|$ -кратному обходу контура $\partial\Delta$

- против часовой стрелки при $w(l, O) \geq 0$,
- по часовой стрелке при $w(l, O) \leq 0$.

Луч на плоскости называется лучом общего положения относительно ломаной l , если он не проходит через ее вершины.

Задача 4.3.b*

Количество звеньев замкнутой ломаной l , пересекающих луч общего положения относительно l , имеет ту же четность, что и $w(l, O)$.

Задача 1.3

Четыре замкнутые ломанные на рисунке, попарно не гомотопны на плоскости без двух точек.

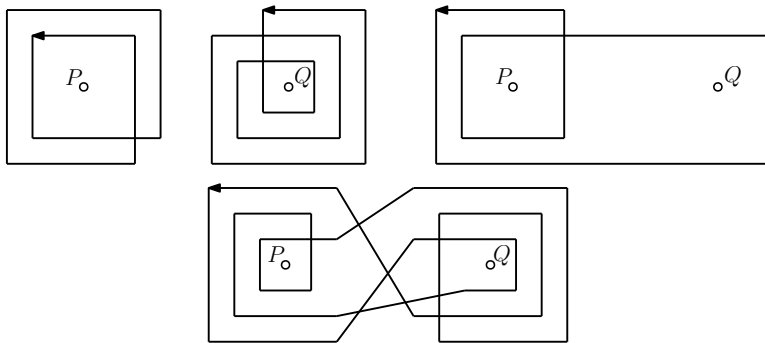


Рис.: Замкнутые ломанные на плоскости без двух точек P, Q

Возможно ли подвесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью) на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, так, чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?

Возможно ли подвесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью) на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, так, чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?

Более строго, существуют ли две точки P, Q и замкнутая ломаная в $\mathbb{R}^2 - P - Q$, гомотопная односточечной ломаной в $\mathbb{R}^2 - P$ и в $\mathbb{R}^2 - Q$, но не в $\mathbb{R}^2 - P - Q$?

Возможно ли подвесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью) на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, так, чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?

Более строго, существуют ли две точки P, Q и замкнутая ломаная в $\mathbb{R}^2 - P - Q$, гомотопная одноточечной ломаной в $\mathbb{R}^2 - P$ и в $\mathbb{R}^2 - Q$, но не в $\mathbb{R}^2 - P - Q$?

Ответ — да! (см. рисунок)

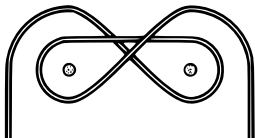


Рис.: Вербка на двух гвоздях

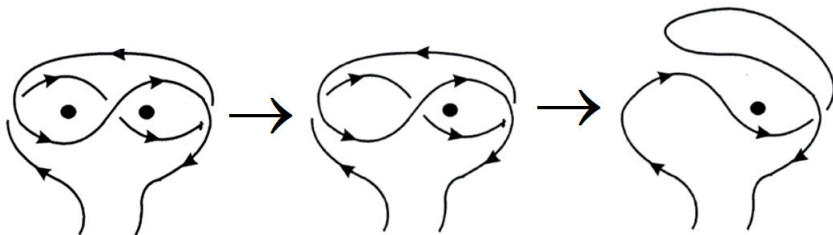


Рис.: После вынимания любого из гвоздей веревка падает

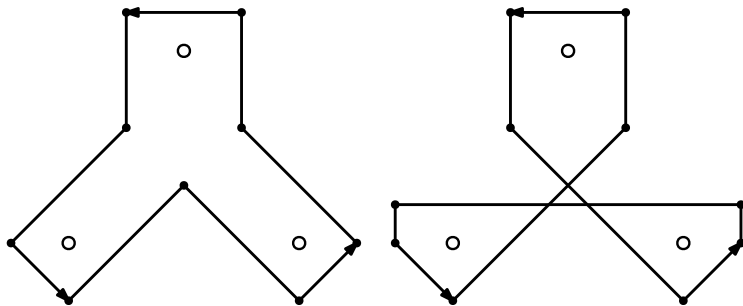


Рис.: Две замкнутые ломаные на плоскости без трех точек

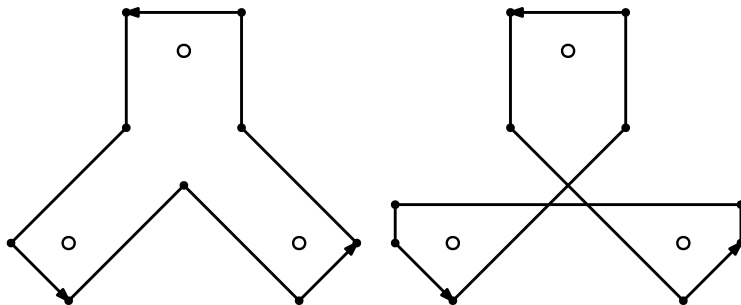


Рис.: Две замкнутые ломаные на плоскости без трех точек

Задача 1.5*

Замкнутые ломаные на рисунке не гомотопны на плоскости без трех точек.

Изучая настоящий текст, читатель освоит полезные и важные идеи и методы. Они полезны и важны, поскольку дают следующий яркий результат, формулировка которого доступна неспециалисту.

Теорема 1.6

Для любого n существует алгоритм распознавания гомотопности замкнутых ломаных на плоскости без n точек.

Эта теорема является конечной точкой основных результатов по гомотопической классификации на плоскости без точки и на плоскости без n точек.

Для доказательства Теоремы 1.6 при $n > 1$ необходима теория, изложенная после промежуточного финиша.

Решая задачи проекта, Вы увидите, как эта классификация связана с комбинаторикой слов. Естественно появится групповая структура, хотя и на несколько ином множестве. Это проливает свет на связь представленной классификации с комбинаторной теорией групп. Благодаря этой связи топологические методы могут быть использованы в теории групп. Это отправная точка геометрической теории групп.

Возьмем

- замкнутую ломаную l на плоскости без двух точек P, Q ;
- непересекающиеся лучи PP' и QQ' общего положения относительно ломаной l .

Будем двигаться по l и выписывать букву a (b) при каждом пересечении луча PP' (QQ'). Полученное ориентированное циклическое слово называется циклическим словом Пуанкаре по модулю 2.

Задача 5.1.b *

Четность числа оборотов ломаной l вокруг точки P (точки Q) равна четности количества букв a (букв b) в циклическом слове Пуанкаре по модулю 2 (для любых лучей PP' , QQ').

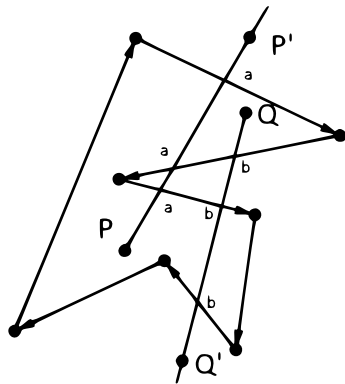


Рис.: Циклическое слово Пуанкаре по модулю 2: $abaabb$

Пусть на окружности дано четное число красных точек и четное число синих точек, причем все эти точки попарно различны. Разобьем красные точки на пары, и синие точки на пары. Соединим точки в каждой красной/синей паре красной/синей хордой. Множества красных точек и синих точек называются зацепленными по модулю 2, если количество пар пересекающихся красной и синей хорд нечетно.

Задача 5.2

Зацепленность по модулю 2 не зависит от выбора разбиений на пары.

Задача 5.3

Зацепленность по модулю 2 букв a и b в циклическом слове Пуанкаре по модулю 2 не меняется при

- (a) изменении лучей PP' и QQ' ;
- (b) замене замкнутой ломаной I на гомотопную ей.

По желанию можете сдавать программистские задачи, например, программу распознавания зацепленности букв a и b в циклическом слове Пуанкаре по модулю 2.

Приходите консультироваться и сдавать задачи 3-го в 14.40 в холле 1 или 2 корпуса! Там будут также разобраны еще некоторые пункты.

Спасибо за внимание!

Утверждение 5.4

Пусть даны две замкнутые ломаные, гомотопные на плоскости без двух точек P, Q . Возьмем непересекающиеся лучи общего положения PP' и QQ' относительно каждой из этих ломаных. Тогда эти ломаные могут быть соединены гомотопией, относительно каждой из ломаных которой лучи PP' и QQ' являются лучами общего положения.

Доказательство. Рассмотрим некоторую гомотопию между заданными ломаными l_1, l_2 . Если ни одна из вершин ломаных гомотопии не лежит в объединении U лучей PP' и QQ' , то утверждение доказано. Иначе обозначим через $A_3 \in U$ такую вершину. Докажем, что существует точка $A'_3 \notin U$, такая, что (*) для любого «треугольника сокращения» $A_1A_2A_3$, треугольник $A_1A_2A'_3$ не содержит ни P , ни Q .

Используем следующее утверждение.

Пусть треугольник ABC не содержит точку O . Тогда существует $\epsilon > 0$ такое, что для любой точки B' , удаленной от B не более, чем на ϵ , треугольник $AB'C$ не содержит точку O .

Применим его к каждому «треугольнику сокращения», в котором $B = A_3$, и к $O = P$ и $O = Q$. Возьмем $\epsilon_1 > 0$, меньшее всех полученных ϵ 'в. Любая точка A'_3 , удаленная от A_3 не более чем на ϵ_1 , имеет свойство (*). В ϵ_1 -окрестности точки A_3 существует точка, не лежащая в U . Она и будет искомой.

В каждой ломаной гомотопии, содержащей A_3 , заменим каждую вершину A_3 на A'_3 . По свойству (*) получим гомотопию между l_1 и l_2 . Так мы уменьшим количество вершин в ломаных гомотопии, лежащих в U . Будем повторять это преобразование, пока существует вершина одной из ломаных гомотопии, лежащая в U . В итоге получим нужную гомотопию между l_1 и l_2 .

Утверждение

Существуют отмеченные ломаные, гомотопные в плоскости без двух точек, не являющиеся отмеченно гомотопными в плоскости без двух точек.

На доске нарисованы две замкнутые ломаные l_1 и l_2 .

Очевидно, что они гомотопны в плоскости без точек P и Q .

Предположим, что l_1 и l_2 отмеченно гомотопны в плоскости без точек P и Q . Проведем лучи PP' и QQ' общего положения относительно ломаных l_1 и l_2 . По определению отмеченной гомотопности существует отмеченная гомотопия. Тогда по доказанному утверждению существует отмеченная гомотопия, в которой каждая ломаная общего положения относительно лучей PP' и QQ' .

Лемма

При отмеченной гомотопии, каждая ломаная которой общего положения относительно лучей PP' и QQ' , экононое слово Пуанкаре отмеченной замкнутой ломаной не меняется.

Отмеченным замкнутым ломаными l_1 и l_2 соответствуют слова Пуанкаре ab и ba . Эти слова экономны и не равны. Следовательно, эти ломаные не отмеченно гомотопны.

Выберем вершину A ломаной l . Обозначим через $\bar{l}$ (не циклическую) последовательность точек, начинающуюся с A соответствующую ломаной l . Обозначим через $\bar{d} = B_1 B_2 B_3$ (не циклическую) последовательность вершин треугольника Δ , ориентированную так, что числа $w(\bar{d}, O)$ и $w(l, O)$ имеют одинаковый знак. Можно считать, что O не лежит на прямой AB_1 . Обозначим

$$n := |w(l, O)|, \quad \bar{d}^{-1} := B_3 B_2 B_1, \quad \bar{d}^{-n} := \underbrace{\bar{d}^{-1} \dots \bar{d}^{-1}}_n \quad \text{и} \quad x := \bar{l} A B_1 \bar{d}^{-n} A.$$

Нужная гомотопия от $\bar{l}$ к n -кратному обходу $\bar{d}^n$ контура $\partial\Delta$ строится так:

$$\begin{aligned} \bar{l} &\rightarrow \bar{l} A \rightarrow \bar{l} A B_1 \rightarrow \bar{l} A B_1 B_1 \rightarrow \bar{l} A B_1 B_3 B_3 B_1 \rightarrow \\ &\bar{l} A B_1 B_3 B_2 B_2 B_3 B_1 \rightarrow \bar{l} A B_1 B_3 B_2 B_1 B_1 B_2 B_3 B_1 \rightarrow \\ &\dots \rightarrow \bar{l} A B_1 \bar{d}^{-n} \bar{d}^n B_1 \rightarrow \bar{l} A B_1 \bar{d}^{-n} A \bar{d}^n B_1 = x \bar{d}^n B_1 \Rightarrow A \bar{d}^n B_1 \rightarrow \bar{d}^n B_1 \rightarrow \bar{d}^n. \end{aligned}$$

Здесь все элементарные сокращения ' $\rightarrow$ ' возможны (так как точка O не лежит на отрезке AB_1 и $O \notin \partial\Delta$), а гомотопия ' $\Rightarrow$ ' строится так. Поскольку $w(x, O) = 0$, ломаная x гомотопна одноточечной ломаной. Более того, существует гомотопия между x и одноточечной ломаной A у каждой промежуточной ломаной которой есть вершина A . Припишем к каждой ломаной в этой гомотопии последовательность $\overline{d}^n B_1$. Получим гомотопию ' $\Rightarrow$ '.

Напомним, что

- I — замкнутая ломаная на плоскости без точек P, Q ,
- PP' и QQ' — непересекающиеся лучи общего положения относительно I .

Загадка 7.1

Существует ли ломаная I , такая что $w(I, P) = w(I, Q) = 0$, ломаная I не зацеплена, но I не гомотопна одноточечной ломаной?

Напомним, что

- I — замкнутая ломаная на плоскости без точек P, Q ,
- PP' и QQ' — непересекающиеся лучи общего положения относительно I .

Загадка 7.1

Существует ли ломаная I , такая что $w(I, P) = w(I, Q) = 0$, ломаная I не зацеплена, но I не гомотопна одноточечной ломаной?

Ответ: да!

Рассмотрим множество всех (конечных) циклических слов (включая пустое слово) из букв a, b . Для такого слова элементарное сокращение — замена любого из подслов aa, bb пустым подсловом. Такое слово называется экономным, если в нем нет ни одного из подслов aa и bb .

Задача 7.2

Циклическое слово из букв a, b посредством элементарных сокращений дает единственное экономное слово.

Пусть, напротив, существует циклическое слово A , из которого элементарными сокращениями можно получить два разных экономных слова E_1 и E_2 .

Фразу «слово Y получено некоторым элементарным сокращением слова X » сокращаем до $X \rightarrow Y$, а фразу «слово Y получено несколькими элементарными сокращениями слова X » сокращаем до $X \Rightarrow Y$.

Пока существует слово B , из которого элементарными сокращениями можно получить два разных экономных слова, и $A \rightarrow B$, будем заменять A на B . Этот процесс конечен, так как с каждой заменой длина слова A уменьшается на 2. После этого для $i = 1, 2$ обозначим через B_i слово, такое что $A \rightarrow B_i$ и $B_i \Rightarrow E_i$. Тогда $B_1 \neq B_2$. Поэтому пары букв в A , сокращением которых получаются B_1 и B_2 , не пересекаются. Значит, если сократить обе пары последовательно, то получится такое слово C , что $B_1 \rightarrow C$ и $B_2 \rightarrow C$.

Так как из B элементарными сокращениями можно получить только одно экономное слово, то $D \Rightarrow E_1$. Тогда $B_2 \Rightarrow E_1$. Противоречие.

Экономная форма циклического слова w из букв a, b — это экономное слово, полученное из w элементарными сокращениями. Обозначим через $E_{2,2,c}$ множество экономных слов. Обозначим через $e_2(I) \in E_{2,2,c}$ экономную форму циклического слова Пуанкаре по модулю 2 ломаной I .

Задача 7.3

Слово $e_2(I)$ не изменяется при

- (a) изменении лучей PP' и QQ' ;
- (b) замене замкнутой ломаной I на гомотопную.

Задача 7.4

Существует ломаная I , такая что слово $e_2(I)$ пусто, но I не гомотопна одноточечной ломаной.

Пусть A, B, C, D — точки на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. **Знаком** точки пересечения ориентированных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на плоскости назовем $+1$, если обход ABC происходит по часовой стрелке, и -1 в противном случае.

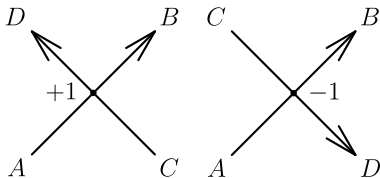


Рис.: Знак точки пересечения

Задача 8.1*

Возьмем замкнутую ломаную m на плоскости без точки O и луч общего положения OR относительно m . Тогда $w(m, O)$ равно сумме по звеньям x ломаной m знаков точек пересечения звена x и луча OR .

Загадка 8.2.а

Определите циклическое слово Пуанкаре из букв a, b, a^{-1}, b^{-1} .

Рассмотрим множество всех (конечных) циклических слов (включая пустое слово) из букв a, a^{-1}, b, b^{-1} . Для такого слова элементарное сокращение — замена любого из подслов $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ пустым подсловом. Такое слово называется экономным, если у него нет ни одного из подслов $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$.

Задача 8.3

Циклическое слово из букв a, b, a^{-1}, b^{-1} посредством элементарных сокращений дает единственное экономное слово.

Экономная форма циклического слова w из букв a, b, a^{-1}, b^{-1} — это экономное слово, полученное из w элементарными сокращениями.

Обозначим через $e(l)$ экономную форму циклического слова Пуанкаре ломаной l .

Задача 8.4

Слово $e(l)$ не изменяется при

- (а) изменении лучей PP' и QQ' ;
- (б) замене замкнутой ломаной l на гомотопную.

Задача 8.5

Если $e(l) = e(m)$ для замкнутых ломаных l и m , то l и m гомотопны.

Обозначим выколотые точки через $P_1, P_2, \dots, P_n$. Выберем точку X , не лежащую на одной прямой ни с какими двумя из них.

Будем двигаться по ломаной и выписывать букву p_i (букву p_i^{-1}) при каждом пересечении звена ломаной с лучом $P_i P'_i$, если знак точки их пересечения равен $+1$ (-1). Полученное ориентированное циклическое слово называется циклическим словом Пуанкаре.

Экономные циклические слова и экономная форма циклического слова из букв $p_1, \dots, p_n, p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$ определяются аналогично случаю $n = 2$.

Утверждение

Следующее отображение является взаимно однозначным соответствием между множеством гомотопических классов замкнутых ломаных на плоскости без n точек и множеством $E_{n,c}$ экономных циклических слов из букв $p_1, \dots, p_n, p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$. Отображение переводит замкнутую ломаную l (точнее, ее гомотопический класс) в экономную форму $e(l)$ ее циклического слова Пуанкаре.

Аналогично случаю $n = 2$, циклическое слово $e(l)$ не меняется при замене ломаной l на гомотопную. Поэтому отображение из утверждения корректно определено на множестве гомотопических классов.

Аналогично случаю $n = 2$, это отображение сюръективно.

Остается доказать его инъективность. Для каждого экономного циклического слова α из букв $p_1, \dots, p_n, p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$ построим ломаную $k(\alpha)$ и докажем, что l гомотопна $k(e(l))$.

Отметим на плоскости точки S_1 и T_1 так, чтобы S_1, T_1 и X не лежали на одной прямой, внутри треугольника $S_1 T_1 X$ из выколотых лежала только точка P_1 , и $w(XS_1 T_1, P_1) = +1$. Аналогично определим точки S_i и T_i для каждого $i = 1, \dots, n$. Есть только одна ломаная $k(\alpha)$, соответствующая α , звенья которой — стороны треугольников $S_i T_i X$ и никакие два соседних ребра не направлены в противоположные стороны.

Отмеченной замкнутой ориентированной ломаной $A_1 \dots A_m$ называется последовательность (упорядоченный набор) $(A_1, \dots, A_m)$ точек плоскости (не обязательно различных). Точка A_1 называется отмеченной точкой.

Произведением отмеченных замкнутых ломаных $l_1 = XM_1 \dots M_m$ и $l_2 = XN_1 \dots N_n$ с общей отмеченной точкой называется замкнутая ломаная $l_1 l_2 := XM_1 \dots M_m XN_1 \dots N_n$.

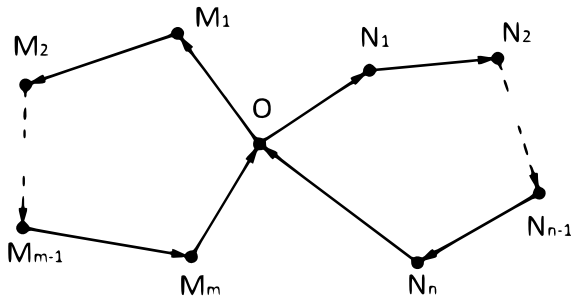


Рис.: Произведение отмеченных замкнутых ломаных $l_1 = OM_1 \dots M_m$ и $l_2 = ON_1 \dots N_n$

Задача 9.2

Умножение замкнутых ломаных с общей отмеченной точкой X

- (a) ассоциативно, но не имеет единичного элемента;
- (b) (загадка) не порождает корректно определенного произведения на классах гомотопности.

Отмеченные замкнутые ломаные с общей отмеченной точкой называются отмеченно гомотопными, если они «гомотопны с сохранением отмеченной точки».

Задача 9.4

- (a) Умножение классов отмеченной гомотопности замкнутых ломаных, корректно определено, ассоциативно и имеет единичный элемент.
- (b) Для этого умножения каждый класс имеет обратный.

Слово Пуанкаре замкнутой отмеченной ломаной x определяется аналогично циклическому слову Пуанкаре, только движение вдоль x начинается и заканчивается в отмеченной точке.

Рассмотрим множество всех (конечных) слов из букв a, b, a^{-1}, b^{-1} . Для такого слова элементарное сокращение — это замена любого из подслов $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ пустым подсловом.

Два таких слова называются *эквивалентными*, если их можно соединить последовательностью слов, в которой одно из любых двух последовательных слов может быть получено из другого с помощью элементарного сокращения. Обозначим через F_2 множество классов эквивалентности.

Утверждение 9.6

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов отмеченной гомотопности отмеченных замкнутых ломаных на плоскости без двух точек и F_2 . Это взаимно однозначное соответствие отображает отмеченную замкнутую ломаную в класс эквивалентности ее слова Пуанкаре. Это взаимно однозначное соответствие является изоморфизмом групп.