

Линейные характеристики графов

М. Дидин, А. Суворов, И. Богданов, О. Бурсиан, К. Кохась

Часть I

У нас есть граф. Следующие три числа (но не только их) будем называть его линейными характеристиками:

- (a) число вершин — n ,
- (b) число рёбер — m ,
- (c) число независимости — α (максимальный размер независимого множества).

Интересно, а какие значения они могут принимать? Можно ли по тройке (n, m, α) понять, существует такой граф или нет? Это довольно известная задача, но у неё есть интересные вариации, в том числе, недавние результаты и даже открытые проблемы.

Одно из направлений — задать этот вопрос для некоторого семейства графов, например, для планарных, или дистанционных, или графов, не содержащих определённых подграфов. Эти задачи имеют много общего, например, с задачами о хроматическом числе плоскости, проблемой Борсука и даже с упаковкой сфер. Но лучше всего вы, скорее всего, знакомы с расстановкой не бьющих друг друга фигур на клетчатой доске.

Пусть имеется клетчатая доска и некоторая фигура X . Будем считать клетки доски вершинами графа, а всевозможные ходы фигуры X — рёбрами графа. Построенный граф назовём *шахматным*. Например, для доски 2×2 и короля это полный граф K_4 , а для доски 2×2 и ладьи — цикл на 4 вершинах C_4 .

Концепция лишнего ребра

Ребро называется *лишним*, если его удаление не изменяет число независимости графа. Граф, не содержащий лишних рёбер, называется α -*критическим*, а любой α -критический граф, получившийся из произвольного графа G с числом независимости α последовательным выбрасыванием лишних рёбер, называется *ядром* графа G . Связный α -критический граф назовём *турановским*.

Задача 1 Найдите какое-нибудь ядро шахматного графа для:

- 1) прямоугольной доски $m \times n$ и ладьи,
- 2) доски 3×3 и ферзя,
- 3) цилиндрической доски $m \times n$ (первый столбец склеен с последним) и короля.
- 4) Фигура гепард из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске 1000×1000 ? Найдите какое-нибудь ядро шахматного графа для гепарда и этой доски. (Региональный этап, 2018, 10.8.)
- 5) Нарисуйте на клетчатой плоскости какую-нибудь связную относительно хода короля доску, на которую невозможно поставить 4 короля, не бьющих друг друга, и которую нельзя покрыть тремя клетчатыми квадратами 2×2 . Найдите ядро соответствующего шахматного графа.

- 6) Вершины графа G — это точки плоскости (x, y) , $0 < x, y < 100$, где одно из чисел x, y целое, а второе — полуцелое. (Вершину графа можно интерпретировать как лежащую на клетчатой плоскости доминошку.) Ребро соединяет две вершины, если расстояние между вершинами равно 1 (при этом полуцелые координаты должны совпадать, а целые координаты отличаются на 1), либо если расстояние между вершинами равно $\sqrt{2}/2$. Найдите число независимости и какое-нибудь ядро этого графа.

Как показывают графы из задачи 1, стирание лишних рёбер в естественных конструкциях часто приводит к несвязному ядру, состоящему из нескольких клик. Поэтому возникает естественный вопрос: при каких n и α вообще существует хотя бы один турановский граф?

Задача 2

- 1) Для любого натурального α постройте турановский граф с $n = 2\alpha + 1$.
- 2*) Для турановского графа докажите неравенство $n \geq 2\alpha + 1$.

Указание. Возможно, вы не сможете сразу решить пункт 2. Но к нему можно вернуться в части II, используя более мощную технику.

Чтобы строить другие примеры, полезно уметь добавлять в граф вершины. *Клонирование вершины x* — добавление новой вершины, соединённой с x и всеми её соседями.

Задача 3

- 1) Докажите, что клонирование вершины не меняет число независимости α .
- 2) Докажите, что клонирование вершины α -критического графа оставляет его α -критическим.
- 3) Приведите пример турановского графа с заданными α и $n \geq 2\alpha + 1$.

Итак, у нас есть способ корректно добавлять вершины в граф, отслеживая их степень.

Задача 4 Какое наибольшее число вершин может иметь граф с числом независимости α , в котором

- 1) степень любой вершины не превышает k ?
- 2*) степень любой вершины не превышает k , и который не содержит клик на $k + 1$ вершине?

Задача 5 (Теорема Турана)

Пусть $k = \lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor$. Обозначим

$$T(n, \alpha) = k \cdot n - \frac{k(k+1)}{2} \alpha.$$

- 1) Докажите, что наименьшее число рёбер у графа на n вершинах с числом независимости α равно $T(n, \alpha)$.
- 2*) Докажите, что наименьшее число рёбер у СВЯЗНОГО графа на n вершинах с числом независимости α равно $T(n, \alpha) + \alpha - 1$.
- 3*) Докажите, что наименьшее число рёбер у графа на n вершинах с числом независимости α и p компонентами связности равно $T(n, \alpha) + \alpha - p$.
- 4*) Докажите, что наименьшее число рёбер у ТУРАНОВСКОГО графа на n вершинах с числом независимости α равно $T(n + \alpha - 1, \alpha) - \alpha + 1$.

Подсказки. Попробуйте в пункте 1) доказать оценку по индукции, сравнивая число рёбер в двух графах и на каждом шаге выбрасывая из них по вершине наибольшей степени. Чтобы решить пункты 2) и 3), полезно выбрасывать лишние рёбра, если они есть. Искать лишние рёбра поможет задача 6. Пункт 4) является довольно трудным, к его решению ведут идеи, развитые во второй и третьей части проекта.

Казалось бы, чем отличаются пункты 2) и 4)? Ситуация, когда запрет лишних рёбер усиливает какую-либо нижнюю оценку на число рёбер, поначалу кажется парадоксальной.

Задача 6 Докажите, что в турановском графе (при $n > 2$) нет висячих вершин, и точек сочленения (вершин, удаление которых увеличивает число компонент связности).

Задача 7 Докажите какую-нибудь оценку снизу для числа рёбер графа, верную для задачи 5.4 и неверную для задачи 5.2. Можете ограничиться случаем $\alpha = 2$, $n = 7$.

Новая характеристика и правильные преобразования графов

Мы знаем, что ядро графа G не определено однозначно. Максимальное возможное число компонент связности ядра будем называть *ядерным числом* графа G и обозначать $p(G)$ или просто p . Обновим список линейных характеристик.

- (а) число вершин — n ,
- (б) число рёбер — m ,
- (с) число независимости — α ,
- (д) ядерное число — p .

Удивительно, но добавление четвертой характеристики помогает делать нетривиальные оценки на первые три!

Чтобы доказывать оценки снизу на число рёбер в α -критическом графе (в первую очередь, в задаче 5.4) и строить примеры таких графов, нам потребуются различные преобразования графов — добавления/удаления вершин, сохраняющие нужные нам характеристики. Добавлять вершины мы уже умеем. Теперь попробуем научиться корректно удалять вершины из графа. Вершина x α -критического графа G называется *стабильной*, если ядерное число графа $G \setminus x$ равно ядерному числу G . (Через $G \setminus x$ обозначен граф, получающийся из графа G удалением вершины x и всех выходящих из нее рёбер.)

Задача 8 Пусть в турановском графе G с $\alpha > 1$ все вершины стабильны.

- 1) Пусть граф G не является регулярным. Как построить турановский граф с такими же n , α и меньшим числом рёбер?
- 2) Пусть граф G регулярный. Как построить нерегулярный турановский граф с такими же n , α и не большим числом рёбер?

Итак, решение задачи 8 позволяет преобразовывать графы со стабильными вершинами, сохраняя n , α , p и не увеличивая число рёбер m . Но что делать, если мы хотим удалить вершину графа, а она оказалась нестабильной? Назовём преобразование α -критического графа *правильным*, если при некотором $t \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие четыре условия.

- 1) Число независимости сохраняется.
- 2) Граф остаётся α -критическим.
- 3) Число вершин n и число компонент связности p становятся равны соответственно $n + t$ и $p + t$.
- 4) Число рёбер у преобразованного графа не больше $m + t$.

Например, преобразования из предыдущей задачи являются правильными с $t = 0$.

Задача 9 Придумайте правильное преобразование с $t = -1$, работающее для графа, состоящего из двух компонент связности G_1 и G_2 , каждая из которых содержит не менее трех вершин, где

- 1) G_1 и G_2 — клики (например, постройте два разных турановских графа с $n = 8$, $\alpha = 2$, $m = 15$ из клики на 4 вершинах и клики на 5 вершинах);
- 2) G_1 — турановский граф, G_2 — клика;
- 3) G_1 и G_2 — турановские графы.

Правильное преобразование с $t > 0$ мы назовём *расколом*.

Теорема 1 (Теорема о расколе). Пусть x — нестабильная вершина турановского графа G . Тогда к каждой компоненте связности ядра графа $G \setminus x$ можно добавить по вершине, чтобы получилось правильное преобразование графа G .

Теорема 2 (Основная теорема). Пусть G — произвольный α -критический граф. Тогда существует правильное преобразование, переводящее G в дизъюнктное объединение клик.

Определение. Ассоциированный граф Турана для α -критического графа G на n вершинах с числом независимости α и p компонентами связности — дизъюнктное объединение α клик, содержащих в совокупности ровно $n + \alpha - p$ вершин и по размеру отличающихся не более чем на 1.

Заметим, что основная теорема позволяет перевести любой турановский граф в его ассоциированный граф Турана правильным преобразованием. С другой стороны, многократно применённое преобразование из задачи 9 — это правильное преобразование, переводящее дизъюнктное объединение клик, содержащих не менее 3 вершин каждая, в турановский граф. Назовём турановский граф, полученный таким способом, *тривиальным*. Итак, оценка на число рёбер

$$m \geq T(n + \alpha - p, \alpha) - \alpha + p,$$

вытекающая из основной теоремы, точная. Например, она обращается в равенство на тривиальных графах, полученных серией преобразований из задачи 9 из дизъюнктного объединения клик, отличающихся по размеру не более чем на 1. Назовём α -критический граф с минимальным возможным при заданных n, p, α числом рёбер $m = T(n + \alpha - p, \alpha) - \alpha + p$ *бесплатным*.

Задача 10

- 1) Нарисуйте 4 различных тривиальных турановских графа с $n = 10, \alpha = 3, m = 16$.
- 2*) В каком случае серию преобразований из задачи 9.3 можно проводить в произвольном порядке?
- 3**) Придумайте удобную классификацию тривиальных турановских графов с заданными n и α .

Задача 11 Выведите основную теорему из теоремы о расколе.

Теорема 3 (О бесплатных графах). Пусть G — нетривиальный бесплатный граф. Тогда его ассоциированный граф Турана содержит компоненту связности из 3 вершин.

Задача 12 На плоскости отметили 4α точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $\alpha + 1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком.

- 1) Докажите, что всего проведено не менее 7α отрезков. (А. М. Райгородский, ММО 2010, 10.6)
- 2) Улучшите оценку до 7.5α отрезков.
- 3) Пусть количество точек равно n , а число отрезков равно m . Докажите оценку $m \geq 5n - 12\alpha$.

Указание. Можно использовать без доказательства основную теорему и теорему о расколе. Если оценка из п.3 показалась слишком простой, и возникло желание её существенно усилить (например, до 9α), будут выданы дополнительные задачи на эту тему. В них поможет теорема о бесплатных графах. На этом часть I закончена. Далее вы можете приступить на выбор либо к части II, либо к части III. Обе части приводят к доказательству теоремы о расколе, но содержат и другие результаты. Часть III также ведёт к доказательству теоремы о бесплатных графах.

Часть II

Лемма Холла и лишние рёбра

Лемма (Холл). *Есть n юношей и несколько девушек. Известно, что каких бы k юношей ни выбрать, суммарное количество знакомых им девушек не меньше k . Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых.*

Лемма Холла имеет несколько доказательств, мы выберем то, которое поможет в решении дальнейших задач проекта. Назовем множество из k юношей *критическим*, если совокупное количество знакомых им девушек в точности равно k .

Задача 13

- 1) Предположим, что критическое множество юношей не содержит меньших критических подмножеств. Докажите, что никакая свадьба юноши из этого множества не испортит для остальных условие леммы Холла.
- 2) Докажите, что если удалить критическое множество юношей вместе с их знакомыми девушками, то для оставшихся будет выполнено условие леммы Холла.
- 3) Докажите лемму Холла индукцией по числу вершин графа.

Пусть U — произвольное независимое множество в графе G . Обозначим через $N(U)$ множество соседей U (вершин, соседних хоть с какой-нибудь вершиной из U). Объединение $\bar{U} = U \cup N(U)$ будем называть *окрестностью* множества U .

Задача 14 Число независимости турановского графа G на n вершинах равно α , U — произвольное независимое множество вершин. Докажите, что:

- 1) если $n > 1$, то окрестность $\bar{U}$ содержит независимое множество мощности $|U|$, не совпадающее с U ,
- 2) если $|U| < \alpha$, то окрестность $\bar{U}$ содержит независимое множество, содержащее не менее $|U| + 1$ вершины,
- 3) если $n > 1$, то множество соседей множества U содержит не менее $|U|$ вершин,
- 4) если $n > 1$, то множество U входит в некоторое паросочетание,
- 5) если $n > 2$, то множество соседей U содержит не менее $|U| + 1$ вершины.
- 6) если $n > 2$ и x — произвольная вершина в множестве соседей $N(U)$, то множество U входит в некоторое паросочетание, не содержащее x .
- 7*) если $|N(U)| = |U| + 1$, то все вершины множества U имеют степень 2.
- 8*) если граф G не содержит вершин степени менее 3, то любое ребро можно дополнить до паросочетания размера $\alpha + 1$.

Указание. Как учесть, что рёбра, выходящие из U , не являются лишними? А рёбра, выходящие из $\bar{U}$ наружу?

Задача 15 Дан турановский граф G на n вершинах.

- 1) Пусть $n > 2$. Докажите неравенство $n \geq 2\alpha + 1$.
- 2) Пусть выполнено равенство $n = 2\alpha + 1$. Докажите, что G — нечётный цикл.
- 3*) Пусть выполнено равенство $n = 2\alpha + 2$, причём $\alpha \geq 2$. Докажите, что в графе G есть вершина степени 2.
- 4*) В некоторой группе из 12 человек среди каждых девяти найдутся пять попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся шесть попарно знакомых. (В.Л.Дольников, 1999, заключительный этап, 10.8). Как обобщается эта задача?

Задача 16

- 1) Пусть турановский граф с $n > 3$ содержит вершину степени 2. Придумайте правильное преобразование этого графа с $t = 1$, в результате которого образуется компонента связности, являющаяся треугольником.
- 2*) Пусть в турановском графе G выполнено равенство $n = 2\alpha + 2$. Докажите, что граф G — тривиальный.
- 3*) Опишите все турановские графы, в которых выполнено равенство $n = 2\alpha + 2$.
- 4**) Существует ли нетривиальный турановский граф с $n = 2\alpha + 3$?
- 5***) При $\alpha = 3k + 1, k \geq 1$ имеется серия 3-регулярных нетривиальных турановских графов с $n = 8k + 4$. С другой стороны, имеется оценка $n > 2\alpha + 2$ на число вершин в турановском графе, не содержащем вершин степени 2, при $\alpha > 1$. Можете ли вы сократить зазор между оценкой и примером?

Назовём *ключевым числом* $\kappa(G)$ графа G минимальную возможную степень вершины, которую можно добавить к G , сохранив число независимости. Операция клонирования вершины (задача 3) показывает, что если в графе G есть вершина степени d , то $\kappa(G) \leq d + 1$.

Задача 17 В этой задаче всюду слово «подграф» означает «индуцированный подграф».

- 1) Пусть G_0 — подграф турановского графа G . Докажите, что количество рёбер, соединяющих G_0 с остальной частью графа, не меньше $\kappa(G_0)$.
- 2*) Пусть $k > 1$, а $G_1, G_2, \dots, G_k$ — набор непересекающихся подграфов турановского графа G . Докажите, что количество рёбер, соединяющих $G_1, G_2, \dots, G_k$ между собой и с остальной частью графа, больше чем

$$\kappa(G_1) - 1 + \kappa(G_2) - 1 + \dots + \kappa(G_k) - 1.$$

- 3*) Выведите из предыдущего пункта теорему о расколе.
- 4*) Пусть G_0 — подграф турановского графа G , такой, что количество рёбер, соединяющих G_0 с остальной частью графа, равно $\kappa(G_0)$. Придумайте правильное преобразование графа с $t = 1$. Одна из частей может стать гиперграфом (см. часть III).
- 5*) Пусть $G_1, G_2, \dots, G_k$ — набор непересекающихся подграфов турановского графа G , причём граф $G \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k)$ содержит не менее двух вершин. Известно, что количество рёбер, соединяющих $G_1, G_2, \dots, G_k$ между собой и с остальной частью графа, равно $1 + \kappa(G_1) - 1 + \kappa(G_2) - 1 + \dots + \kappa(G_k) - 1$. Придумайте правильное преобразование графа с $t = 1$. Одна из частей может стать гиперграфом.
- 6*) Обобщите результаты предыдущих пунктов на гиперграфы.

Часть III

Гиперграфы

Для расширения возможностей правильных преобразований, мы обобщаем понятие графа до гиперграфа, допуская рёбра, содержащие любое непустое множество вершин. Формально говоря, гиперграф — это пара (V, E) , где V — произвольное множество (множество вершин), E — произвольное множество непустых подмножеств V (множество ребер). Обычный граф становится частным случаем, когда каждое ребро содержит ровно две вершины.

Определение. *Степень вершины* в гиперграфе — это количество ребер, содержащих эту вершину. Граф называется *регулярным*, если все его вершины имеют одинаковую степень. *Независимое множество* в гиперграфе — это множество вершин, не содержащее ни одного ребра целиком. *Число независимости* $\alpha(G)$ — максимальный размер независимого множества. Любое независимое множество из $\alpha(G)$ вершин называется *максимальным независимым множеством*. Если две вершины x и y принадлежат ребру A , мы говорим, что *из x можно пройти в y по ребру A* . Двигаясь по ребрам от одной вершины к другой, мы получаем *путь*. Гиперграф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем или, по другому, если его вершины нельзя разбить на множества (*компоненты связности*) так, что каждое ребро целиком лежит в одном из множеств.

Определения α -критического графа, турановского графа, правильного преобразования остаются в силе, с учетом изменившегося смысла входящих в них терминов. Правильное преобразование с параметром t назовем *точным* если количество ребер в преобразованном графе равно $m + t$ (а не меньше либо равно, как требуется в общем определении).

Оказывается, что теорема о расколе и основная теорема работают и для гиперграфов. Одно из доказательств теоремы о расколе, которое вы можете получить из задачи 16 части II, никак не использует тот факт, что в каждом ребре ровно две вершины и, таким образом, без изменений переносится на гиперграфы. Пошаговое доказательство теоремы о расколе, которое вы можете получить из решения этой части, требует изменения числа вершин в ребре на промежуточных этапах преобразований (например, при правильном преобразовании цикла на 5 вершинах в 2 треугольника), тем самым используя гиперграфы даже в случае, когда их не было в исходной формулировке. Поскольку понятие гиперграфа поначалу непривычно, мы начнём эту часть с нескольких лёгких упражнений.

Задача 18

- 1) Пусть одно из рёбер вложено в другое. Докажите, что большее ребро является лишним.
- 2) Докажите, что все *петли* (т. е. одноэлементные ребра) в α -критическом гиперграфе представляют собой отдельные компоненты связности.
- 3) Докажите, что для любой неизолированной вершины α -критического гиперграфа найдется максимальное независимое множество, не содержащее эту вершину.

Очевидно, что добавление к графу вершины с петлей (или удаление такой вершины) есть точное преобразование.

Задача 19

- 1) Найдите минимальное возможное число рёбер в гиперграфе на n вершинах с числом независимости α .
- 2) Найдите максимальное возможное число рёбер в α -критическом гиперграфе на n вершинах с числом независимости α .

Правильные преобразования гиперграфов

Определение. Пусть U — ребро гиперграфа G , не являющееся лишним. *Ключом* ребра U называется максимальное независимое множество в гиперграфе $G \setminus U$ (так обозначается граф, полученный из G удалением ребра U , т.е. это ребро просто «вычеркивается» из списка ребер графа). Операция замены ребра на пересечение всех его ключей называется *расширением ребра*, если она изменяет граф.

Как нетрудно понять, если $\tilde{U}$ — расширение ребра U , то $U \subset \tilde{U}$.

Задача 20 В этой задаче мы изучаем, что происходит, если мы расширяем в графе какое-то нелишнее ребро.

- 1) Докажите, что операция расширения ребра сохраняет число независимости.
- 2) Докажите, что операция расширения ребра сохраняет свойство α -критичности гиперграфа.
- 3) С помощью расширения рёбер превратите произвольный нечётный цикл с клоном одной вершины в 3-регулярный турановский гиперграф.
- 4) Укажите условие, при котором расширение ребра уменьшает число компонент связности α -критического гиперграфа.
- 5) Пусть α -критический гиперграф, содержащий не менее 3 вершин, содержит вершину x степени 1. Придумайте правильное преобразование этого гиперграфа с $t = 1$, отличное от добавления одной вершины с петлёй.

Определение. Множество вершин S гиперграфа G называется *ключевым*, если выполняются следующие два свойства.

- (а) S пересекается с каждым максимальным независимым множеством.
- (б) Никакое собственное подмножество S не обладает свойством (а).

Ключевое число $\kappa(G)$ — это наименьший размер ключевого множества в гиперграфе G .

Заметим, что все вершины любого ключевого множества принадлежат одной компоненте связности гиперграфа.

Задача 21

- 1) В α -критический гиперграф добавили новую вершину, соединив её рёбрами из 2 вершин со всеми вершинами некоторого ключевого множества. Докажите, что число независимости не изменилось, и гиперграф остался α -критическим.
- 2) К турановскому графу G добавили новую вершину x и несколько содержащих ее ребер мощности не меньше 2, так что число независимости не изменилось. Докажите, что степень вершины x не меньше $\kappa(G)$.
- 3) Обобщите клонирование вершины на гиперграфы так, чтобы эта операция сохраняла число независимости, α -критичность и число компонент связности.

Определение. Операция замены ребра α -критического гиперграфа на вложенное в него ребро с удалением возникающих лишних рёбер называется *сжатием ребра*, если она не меняет число компонент связности.

В силу утверждения задачи 18.3 сжатие ребра сохраняет число независимости и поэтому является правильным преобразованием. Теперь мы изучим правильные преобразования, увеличивающие количество нетривиальных компонент связности (компонент, не являющихся изолированной вершиной с петлёй) в α -критическом гиперграфе.

Гиперграфы и теорема о расколе

Определение. Множество вершин U α -критического гиперграфа G называется *нестабильным*, если выполняются следующие два свойства.

- (а) При добавлении ребра U увеличивается ядерное число $p(G)$.
- (б) Если $|U| = 1$, то увеличение $p(G)$ составляет более 1.

Согласно задаче 18.3 при добавлении неустойчивого ребра U число независимости не меняется.

Определение. *Расколом* α -критического гиперграфа G называется преобразование, при котором последовательно производятся следующие действия.

- 1) Добавление нового ребра U .
- 2) Переход к ядру полученного гиперграфа, имеющему больше нетривиальных компонент связности, чем G .
- 3) Для каждой новой компоненты связности C_i , не содержащей U , добавление вершины степени $\kappa(C_i)$ (ключевое число компоненты) любым способом, сохраняющим число независимости.

Замечание. Если множество U состоит из одной вершины, то в результате обязательно появляется компонента с петлёй на U . Если такая компонента оказывается единственной новой компонентой, то вершина считается стабильной, а гиперграф может как сохраниться, так и измениться, но мы не будем считать этот случай расколом (см. задачу 8).

Теорема 4 (Теорема о расколе по ребру). *Раскол является правильным преобразованием гиперграфа.*

Определение. Пусть V — некоторое неустойчивое множество вершин турановского гиперграфа G . Гиперграф G будем называть *V -элементарным гиперграфом*, если каждое ребро, становящееся лишним при добавлении V , содержит V и ровно одну дополнительную вершину.

Задача 22 В турановском гиперграфе G есть неустойчивое множество U . Докажите, что серией последовательных расширений и сжатий рёбер можно превратить G в V -элементарный гиперграф с некоторым $V \supseteq U$.

Указание. Сначала попробуйте это сделать для пятиугольника или другого нечётного цикла, начав с множества U из одной вершины. Для нечётных циклов, содержащих 7 и более вершин, можете получить варианты с разным размером множества V .

Задача 23 Пусть турановский гиперграф G является V -элементарным. Пусть W — множество вершин x , таких, что $V \cup \{x\}$ — ребро графа G . Пусть G' — гиперграф, полученный из G заменой всех рёбер, содержащих V , на ребро V .

- 1) Докажите, что множество W ключевое в гиперграфе G' .
- 2) Докажите, что множество V содержит более одной вершины.
- 3) Докажите, что переход от G к G' с добавлением новой вершины, соединённой двухвершинными рёбрами со всеми вершинами W , является правильным преобразованием.
- 4) Завершите доказательство теоремы о расколе.

Наша следующая цель — теорема о бесплатных графах и ее обобщение на гиперграфы.

Определение. Мы назовём *сочленением* пару вершин x, y турановского гиперграфа, разбивающую этот гиперграф на две части G_1, G_2 . То есть, любой путь из G_1 в G_2 по рёбрам гиперграфа проходит через x или y .

Задача 24 Пусть турановский гиперграф G содержит сочленение (x, y) .

- 1) Докажите, что в гиперграфе G нет ребра $\{x, y\}$.
- 2) Докажите, что множество $\{x, y\}$ нестабильное.
- 3) Придумайте правильное преобразование такого гиперграфа с $t = 1$.

Определение. Мы назовём *трёхсвязным* турановский гиперграф, не содержащий ни одного сочленения.

Задача 25

- 1) Докажите, что расширение ребра переводит трёхсвязный гиперграф в трёхсвязный.
- 2) Пусть трёхсвязный турановский гиперграф G является V -элементарным. Докажите, что одна из частей, полученных после раскола по ребру V , также трёхсвязная, причём не является кликой.
- 3) Обобщите понятие тривиального турановского графа до тривиального турановского гиперграфа.
- 4) Покажите, что тривиальный турановский гиперграф, отличный от клики, не является трёхсвязным.
- 5) Докажите, что нетривиальный турановский гиперграф можно правильным преобразованием с $t > 0$ превратить в α -критический гиперграф, одна из компонент связности которого является трёхсвязным гиперграфом, отличным от клики.

Итак, единственный шаг доказательства теоремы о расколе, который может приводить к потере трёхсвязности, — сжатие ребра. Если гиперграф был бесплатным, на этом шаге количество рёбер не изменилось. Теперь доказательство теоремы о бесплатных гиперграфах, фактически, разбивается на две содержательные части.

Задача 26

- 1*) Предположим, что тривиальный гиперграф G можно превратить в трёхсвязный гиперграф, отличный от клики, с помощью расширения одного из рёбер. Докажите, что ассоциированный граф Турана содержит компоненту связности из 3 вершин.
- 2*) Пусть G — регулярный турановский гиперграф, все вершины которого стабильны. Пусть его вершина a имеет двух независимых соседей b и c . Докажите, что удаление b вместе с возникающими лишними рёбрами и последующее клонирование a ведёт либо к уменьшению количества рёбер, либо к образованию нетривиального гиперграфа.
- 3) Завершите доказательство теоремы о бесплатных гиперграфах.

Часть IV

Примеры и графы с запретом клик

В этом разделе нас интересуют методы построения серийных примеров турановских графов с небольшим числом рёбер и/или без клик на k вершинах. Для этих целей можно использовать задачу 9.3. Также нам пригодится следующее её обобщение для гиперграфов.

Пусть турановский гиперграф G_1 содержит ребро U , а турановский гиперграф G_2 содержит вершину w , не являющуюся единственной. Пусть гиперграф G состоит из двух компонент связности G_1 и G_2 , будем обозначать это так: $G = G_1 \sqcup G_2$. В гиперграфе G проведем следующие преобразования. Рассмотрим произвольное ребро компоненты G_2 , содержащее вершину w , и заменим в нём w на одну или несколько вершин из множества U . Эту операцию проведем с каждым ребром, содержащим w , после чего сотрем ребро U и вершину w . Пусть в полученном гиперграфе каждая вершина множества U вошла хотя бы одно из новых рёбер. Назовём такое преобразование *рекомбинацией гиперграфов G_1 и G_2 по ребру U и вершине w* .

Назовём ребро U гиперграфа G *свободным*, если найдётся максимальное независимое множество в G , не содержащее ни одной вершины U . Легко видеть, что при $n > 2$ любое ребро из 2 вершин свободное.

Задача 27 Пусть $G = G_1 \sqcup G_2$, где G_1 и G_2 — турановские гиперграфы, причем G_1 содержит ребро U , а турановский гиперграф G_2 содержит вершину w , не являющуюся единственной.

- 1) Докажите, что число независимости гиперграфа, полученного рекомбинацией по ребру U и вершине w , равно $\alpha(G)$.
- 2) Докажите, что ни одно ребро компоненты G_1 не стало лишним после рекомбинации.
- 3) Предположим, что при рекомбинации в каждом ребре вершина w заменена на всё множество U . Докажите, что ни одно ребро компоненты G_2 не стало лишним.
- 4) Предположим, что ребро U свободное в G_1 . Докажите, что ни одно ребро из G_2 не стало лишним.
- 5) Предположим, что все рёбра в G_1 и в G_2 свободные. Докажите, что после рекомбинации все рёбра в полученном графе свободные.
- 6) Приведите пример рекомбинации двух турановских гиперграфов, при которой каждая вершина ребра U в гиперграфе G_1 имела степень более 1, но хотя бы одно из рёбер в G_2 всё-таки стало лишним.

Задача 28

- 1) Постройте пример трёхсвязного 3-регулярного турановского графа с $n = 12, \alpha = 4$.
- 2) Для всех натуральных k постройте примеры трёхсвязных 3-регулярных турановских графов с $\alpha = 3k + 1, n = 8k + 4$.
- 3) Постройте примеры трёхсвязных бесплатных турановских графов при $\alpha \geq 4, n \in [\frac{8\alpha+4}{3}, 3\alpha]$.
- 4) Для всех $\alpha \geq 1, n \geq 3\alpha + 1$ постройте примеры трёхсвязных турановских графов, в которых число рёбер на 1 больше минимального возможного при данных n, α .
- 5***) Пусть дано $\alpha > 2$. При каких $n \in [2\alpha + 3, 3\alpha]$ существует бесплатный трёхсвязный турановский граф с данными n, α ?
- 6***) Правда ли что все бесплатные трёхсвязные турановские графы с $\alpha > 1$ можно получить рекомбинацией трёхсвязных 3-регулярных турановских гиперграфов из задачи 20.3, а также клик на 3 и 4 вершинах?

Итак, попытки усилить основную теорему для всех турановских графов упираются в многопараметрические серии бесплатных графов. Поэтому далее мы будем изучать результаты для отдельных классов турановских графов.

Задача 29

- 1) Для $\alpha = 2, 3, 4$ постройте примеры турановских графов с максимальной степенью вершины 3 и числом вершин $n = 3\alpha$. Постройте бесконечную серию бесплатных турановских 3-регулярных графов.
- 2) Для $\alpha = 2, 3$ постройте примеры турановских графов с максимальной степенью вершины 4 и числом вершин $n = 4\alpha$. Постройте бесконечную серию бесплатных турановских 4-регулярных графов.
- 3*) Для $\alpha = 2$ постройте примеры турановских графов с максимальной степенью вершины 5 и числом вершин $n = 10$. Докажите, что бесплатных турановских 5-регулярных графов при $\alpha > 1$ не существует.
- 4) Докажите, что при $k > 2$ и $\alpha > 1$ других примеров турановских графов с максимальной степенью вершины k и числом вершин $n = k\alpha$ нет.
- 5) Докажите, что бесплатных турановских k -регулярных графов с $k \geq 6$ не существует.
- 6***) Улучшите оценку из основной теоремы на величину порядка α для турановских графов с максимальной степенью вершины не более k при каком-нибудь $k \geq 6$.

Ещё один важный класс графов с запретами — графы с запретом определённого подграфа. Проще всего изучать графы с запретом клик на k вершинах. Многие оценки для графов с запретами обобщаются для гиперграфов. В гиперграфе *клика* — это подграф на k вершинах, любые две из которых входят в ребро на 2 вершинах. Говоря о гиперграфах с запретом клик, мы подразумеваем, что петли тоже запрещены. К сожалению, при $k = 2$, т. е. для гиперграфов без петель и рёбер из двух вершин, точная оценка на $m(n, \alpha)$ неизвестна. А для $k \geq 3$ мы приводим в задачах ниже сложные (и не очень) оценки для графов и гиперграфов без клик на k вершинах. Запрет клик возникает как один из многих запретов в задачах про более узкие классы графов, например, в задаче 12 про дистанционные графы. Но все оценки для α -критических графов из p компонент связности с запретом определённых подграфов линейные, то есть, имеют вид $m \geq an - b\alpha - cp$. Часто удобно рассматривать случай турановского графа ($p = 1$), в силу линейности эквивалентный общему случаю.

Задача 30 Переформулируйте основную теорему для α -критического графа с p компонентами связности как бесконечную серию линейных оценок вида $m \geq an - b\alpha - cp$. Как связано значение a , при котором оценка для графа G наиболее сильная, с размерами клик в ассоциированном графе Турана?

Чтобы запрет клики на k вершинах хорошо стыковался с расколом и рекомбинацией, удобно обобщить задачу. Пусть в графе есть n_1 красных вершин и n_2 синих вершин. При этом, запрещены только клики на k синих вершинах и любые петли. Цвет вершин не влияет на независимые множества и число независимости α . Требуется оценить снизу число рёбер $m(n_1, n_2, \alpha)$. Получится линейная оценка вида

$$m \geq a_1 n_1 + a_2 n_2 - b\alpha - cp.$$

Добавление красных вершин позволяет проводить расколы, даже если полученные при расколе вершины входят в запрещённый подграф. Часто удобно наряду с красными вершинами использовать и красные рёбра — рёбра, которым позволено входить в запрещённые клики. Чтобы рекомбинация минимизировала разность левой и правой части, она должна уничтожать красную вершину и красное ребро и не создавать новых красных объектов. Такая рекомбинация позволяет строить бесконечные серии графов с запретами, на которых линейные оценки вида $m \geq a_1 n_1 + a_2 n_2 - b\alpha - cp$ обращаются в равенство.

Очевидно, что без дополнительных условий на связность запрет клик на k вершинах проявляется при $n \geq (k-1)\alpha + 1$, когда оптимальный пример из теоремы Турана содержит запрещённую клику.

Задача 31

- 1) Для всех $k \geq 3$, $\alpha > 1$, $n \in [2\alpha + 1, k\alpha - 1]$ постройте бесплатный турановский граф, не содержащий клик на k вершинах, с данными n, α .
- 2) Для всех $k \geq 4$, $\alpha > 1$, $n \geq k\alpha$ докажите, что не существует бесплатного турановского гиперграфа, не содержащего клик на k вершинах, с данными n, α .
- 3) Для $\alpha > 1$, $n \geq 3\alpha + 1$ докажите, что не существует бесплатного турановского гиперграфа без треугольников с данными n, α .
- 4*) Докажите, что не существует бесплатного графа без треугольников с $n = 3\alpha$. Постройте какой-нибудь бесплатный гиперграф без треугольников с $n = 3\alpha$.

Если число синих вершин в графе превосходит оценку из задачи 31 ($n \geq k\alpha$), возникают более сильные, чем в основной теореме, оценки на число рёбер. Такие оценки имеют вид $m \geq an - b\alpha - c$ для обычных графов и $a_1n_1 + a_2n_2 - b\alpha - c$ для графов с n_1 красными и n_2 синими вершинами. Тут мы ограничимся оценками, близкими к основной теореме (там будет общая серия случаев равенства с $n = k\alpha - 1$).

Задача 32 Для турановских графов рассмотрим оценку

$$m \geq kn_1 + (k+1)n_2 - \frac{k^2 + k + 2}{2}\alpha - (k-2).$$

- 1) Постройте серию примеров, на которых указанная оценка обращается в равенство. Докажите, что они могут содержать не более двух красных вершин.
- 2*) Докажите оценку при $k = 3$.
- 3) Докажите, что если все вершины синие и их степени не превышают k , то оценка при $k \geq 4$ следует из теоремы о бесплатных графах.
- 4) Докажите оценку при всех $k \geq 4$.
- 5) При $k = 4$ и $k = 5$ приведите примеры с $\alpha = 2$, $n = 2k$, когда оценка обращается в равенство.
- 6) Докажите оценку при всех $k \geq 4$ для турановских гиперграфов без петель и клик на k вершинах, попарно соединённых рёбрами на 2 вершинах. При $k = 3$ постройте контрпример.

Задача 33 Для турановских графов рассмотрим оценку

$$m \geq kn_1 + (k+2)n_2 - \frac{k^2 + 3k + 2}{2}\alpha - (k-3).$$

- 1) Постройте серию примеров, на которых указанная оценка обращается в равенство.
- 2) При $k = 6$ постройте пример графа с $\alpha = 2$, $n = 12$, для которого оценка точная.
- 3*) Разберите случай $k+1$ -регулярного графа.
- 4*) Разберите случай, когда имеются вершины степени k и $k+1$.
- 5*) Разберите случай k -регулярного графа.
- 6*) Докажите оценку при всех $k \geq 6$.
- 7*) Обобщается ли оценка при всех $k \geq 6$ для турановских гиперграфов без петель и клик на k вершинах, попарно соединённых рёбрами на 2 вершинах?

Пункты 3–5 будут зачтены, если они будут частью чётко сформулированного индукционного перехода, а доказаны по модулю предположения индукции. Подсказка: можно удалить синюю вершину степени $k+1$, если в результате этого появится нестабильная вершина. Ухудшение оценки на 1 можно компенсировать, если детально изучить случай, когда этот раскол является точным, либо использовать теорему о бесплатных графах. Полезно также преобразование из задачи 8, если оно не ведёт к образованию клики на k вершинах. Если синяя вершина v входит в несколько клик на $k-1$ вершине, полезно изучить пересечение всех этих клик. Для этого поможет переход к дополнительному графу в множестве соседей v .

Задача 34

- 1***) Для турановских графов без клик на 4 вершинах докажите оценку $m \geq 7n - 19\alpha - 2$.
- 2***) Верна ли эта оценка для турановских гиперграфов без петель и клик на 4 вершинах?
- 3) Найдите стоимость красной вершины из условия, что обобщение оценки из п.1 корректно взаимодействует с любым расколом и правильно подобранной рекомбинацией. Постройте 6 различных красно-синих турановских графов с $\alpha \leq 2$, на которых оценка из п.1 обращается в равенство.
- 4) При произвольных $\alpha > 3$, $n \in [4\alpha + 1, 4.5\alpha - 1]$ постройте пример турановского графа без клик на 4 вершинах, когда $m = 7n - 19\alpha - 2$.
- 5) Постройте многопараметрические серии турановских графов и гиперграфов без клик на 4 вершинах с условием $m = 7n - 19\alpha - 2$.

РЕШЕНИЯ

Задача 1 Будем считать, что вершины шахматного графа находятся в центрах соответствующих клеток.

1. Пусть $m < n$. На шахматном языке выбор независимого множества — это расстановка небьющих ладей. Детские воспоминания подсказывают нам, что на такой доске удастся разместить максимум m небьющих ладей, поскольку в каждой из m горизонталей помещается не более одной ладьи. Это количество не изменится, даже если мы «подломим» ладьи, запретив им бить клетки в своих вертикалях. Это значит, что каждое вертикальное ребро в нашем графе, и даже все они, вместе взятые, — лишние! Последовательно убирая из нашего графа вертикальные ребра (очевидно, что при этом неубранные вертикальные ребра по-прежнему остаются лишними), мы получим граф, состоящий из m клик K_n (каждая клика — компонента связности). Очевидно, что в клике K_n лишних ребер нет. Итак, в этом случае ядро — это граф, состоящий из m копий графа K_n .

2. На доску 3×3 помещается максимум 2 ферзя, причем обязательно один из них находится в угловой клетке, а другой — в центральном кресте (объединение средней горизонтали и средней вертикали). Ограничив способности ферзей — с каждой угловой клетки разрешим ферзю бить только угловые, а с каждой «крестовой» — только крестовые клетки, мы получим граф, состоящий из двух клик — K_4 и K_5 .

3. Для начала заметим, что наибольшее число не бьющих друг друга королей на такой доске равно $\lceil \frac{m}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ — разрежем доску на горизонтальные полосы-кольца ширины 2 (при нечетном m одна крайняя полоса имеет ширину 1), в каждую полосу помещаются лишь $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ королей. Воодушевившись этим примером, мы видим, что ребра графа, пересекающие наши разрезы, являются лишними *независимо друг от друга* (это значит, что при убирании любого множества этих ребер остальные по-прежнему остаются лишними). Уберем все эти лишние ребра. Граф распадется на компоненты вида «двойной цикл» (см. рис. 1, при нечетном m крайней полосе соответствует обычный цикл C_n).

Если n четно, то все ребра двойного цикла лишние (но теперь уже не независимо). Убрав 40 % ребер, мы легко сведем граф к объединению 4-клик (см. рис. 2). Если же $n = 2k + 1$ нечетно, то двойной цикл является турановским графом. В этом можно убедиться как непосредственно, проверив, что удаление каждого ребра увеличивает число независимости, так и косвенно: двойной цикл получается из простого цикла C_{2k+1} (тоже турановский граф) последовательным дублированием вершин.

4. На доску 1000×1000 влезает $100 \cdot 1000$ гепардов, если полностью заполнить каждый десятый вертикальный ряд клеток. Больше количество гепардов не поместится, поскольку в любом квадрате 10×10 может быть не более 10 гепардов: на каждой обобщенной диагонали не более одного. Разбив доску 1000×1000 на квадраты 10×10 , а те, в свою очередь, на 10 обобщенных диагоналей каждый, позволим теперь гепардам, куда бы их ни поставили, бить только клетки своих обобщенных диагоналей. Мы построили ядро нашего графа, оно состоит из 100 000 клик K_{10} .

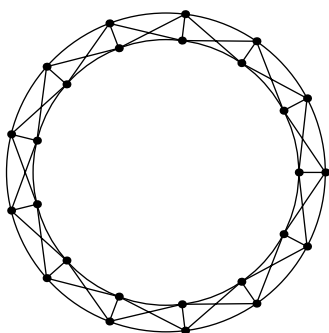


Рис. 1. Полоска на цилиндре.

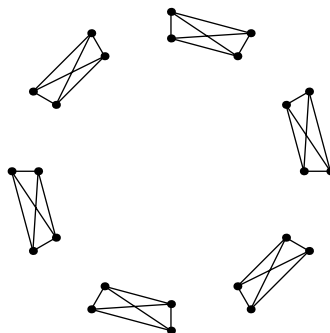


Рис. 2. Редукция к 4-клика.

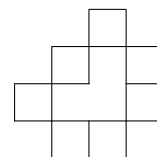


Рис. 3. Семь клеток.

5. Подойдет вот такое ожерелье из 7 клеток (рис. 3). Любой квадрат 2×2 накрывает в нем не более двух клеток. Ядро графа — это сам этот граф C_7 .

6. Вершина — это центр лежащей на клетчатой доске 100×100 доминошки. Как нетрудно видеть, две доминошки соединены ребром, если они накрывают общую клетку. Значит, независимое множество в нашем графе можно интерпретировать как набор непересекающихся доминошек, а максимальное независимое множество — как разбиение доски на домино. Поэтому число независимости равно $100^2/2$.

Покрасим доску в шахматном порядке. Если убрать все ребра, лежащие в черных клетках, то при построении независимого множества мы как бы разрешаем двум доминошкам иметь общую черную клетку. Но каждая белая клетка остается накрытой не более чем одной доминошкой, поэтому у полученного графа такое же число независимости, как у исходного. Иначе говоря, все ребра, лежащие в черных клетках, лишние. Осталось заметить, что мы получили граф, который в каждой белой клетке имеет компоненту связности K_4 (ну и по краям доски встречаются K_2 и K_3). В таком графе нет лишних ребер, значит, это ядро.

Задача 2 1. Подойдет цикл $C_{2\alpha+1}$. 2. См. решение задачи 15.1.

Задача 3 Обозначим клон вершины a через a' , исходный граф через G , а новый граф через G' .

1. При клонировании вершины число независимости не может уменьшиться, поскольку независимые множества графа G содержатся также и в графе G' .

Пусть E — независимое множество в графе G' . Если $a' \notin E$, то это же самое множество E имеется и в графе G . Если $a' \in E$, то $a \notin E$ и, заменив в множестве E вершину a' на a , мы получим в графе G независимое множество той же мощности, что и E . Поэтому число независимости графа G' не может быть больше числа независимости графа G .

2. Допустим, что в графе G' обнаружилось лишнее ребро. После его удаления в графе G' можно отыскать независимое множество E , содержащее $\alpha(G) + 1$ вершину. Это множество не может целиком лежать в графе G , поскольку оно слишком большое. Значит, оно должно содержать вершину a' и тогда оно автоматически не содержит вершину a . Заменив в этом множестве вершину a' на вершину a , получим независимое множество размера $\alpha(G) + 1$ в графе G , что невозможно. Значит, граф G' не содержит лишних ребер.

3. Нечетный цикл — это турановский граф, где $n = 2\alpha + 1$. Чтобы увеличить n , не меняя α , выполним нужное количество раз операцию клонирования вершины.

Задача 4 1. Ответ: наибольшее число вершин равно $(k + 1) \cdot \alpha$.

Пример. Граф, представляющий собой объединение α клик K_{k+1} .

Оценка. Пусть E — максимальное независимое множество (состоящее из α вершин). В силу максимальной каждая вершина графа либо лежит в E , либо соседняя с какой-то вершиной из E . Но у каждой вершины из E (и вообще у каждой вершины) не более k соседей. Поэтому вершин вне E не больше $k\alpha$, а всего вершин не больше $(k + 1) \cdot \alpha$.

2. Ответ: наибольшее число вершин равно $k\alpha$ при $k > 2$, $\lceil \frac{5}{2}\alpha \rceil$ при $k = 2$ и, наконец, 2α при $k = 1$.

Пример. При $k > 2$ рассмотрим граф, представляющий собой объединение α клик K_k . При $k = 2$ подходит граф состоящий из $\lceil \frac{\alpha}{2} \rceil$ циклов C_5 и, если α нечетно, еще одной компоненты K_2 . При $k = 1$ это α компонент K_2 .

Оценка. Мы применим «тяжелую артиллерию» — теорему Брукса. Она утверждает, что если в связном графе G степени вершин не превосходят k , то вершины графа можно покрасить в k цветов правильным образом, кроме случаев, когда $G = K_{k+1}$ (при всех k) или когда G есть нечетный цикл (при $k = 2$) — в этих исключительных случаях требуется $k + 1$ цвет.

Пусть $k > 2$ и в графе больше $k\alpha$ ребер. Поскольку наш граф не содержит клик, он не относится к исключительным случаям теоремы Брукса, и значит, имеет раскраску в k цветов.

Тогда найдется не меньше $\alpha + 1$ вершины одинакового цвета, что невозможно, поскольку вершины одного цвета образуют независимое множество.

Пусть $k = 2$. Тогда компоненты связности — это изолированные вершины, пути или циклы (четные или нечетные). Для каждого из этих графов выполнено соотношение $n \leq \frac{5}{2}\alpha$. Равенство достигается для 5-цикла (напомним, что 3-циклы запрещены условием).

При $k = 1$ требуемая оценка $n \leq 2\alpha$ очевидна.

Задача 5 1, 2, 3. Мы считаем, что $n \geq \alpha + 1$ (в пункте 1 можно считать, что $n \geq \alpha$). Также мы считаем, что $p \leq \alpha$, иначе требуемых графов нет вовсе.

Приведём примеры графов, на которых достигается требуемое количество рёбер.

Заметим сначала, что $T(n+1, \alpha) - T(n, \alpha) = \lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor$; это очевидно, если $n+1$ не делится на α , иначе же имеем $n+1 = (k+1)\alpha$ и

$$T(n+1, \alpha) = (k+1)(n+1) - \frac{(k+1)(k+2)}{2} \cdot \alpha = (k+1)\alpha \cdot \frac{k}{2} = k(n+1) - \frac{k(k+1)}{2} \cdot \alpha = T(n, \alpha) + k.$$

Для примера в задаче 5.1 разобьём наши вершины на α групп так, чтобы размеры любых двух отличались не более чем на 1, и на каждой группе организуем клику. Ясно, что число независимости полученного графа равно α ; осталось посчитать количество рёбер в нём. Для этого выясним, как оно растёт с ростом n . При $n = k\alpha$ число рёбер равно $\frac{k(k-1)}{2}\alpha = T(n, \alpha)$; после этого с увеличением $n < (k+1)\alpha$ на единицу одна из k -клик становится $(k+1)$ -кликкой, то есть добавляется k рёбер. Из соотношения выше следует, что граф имеет нужное число рёбер при каждом n .

Чтобы получить пример в пункте 3, достаточно одну из клик соединить с $k-p$ другими (одним ребром с каждой). При $p = 1$ получается пример для пункта 2.

Оценку докажем сразу для пункта 3 (оценки для остальных пунктов — её частные случаи). Предполагая противное, выберем наименьшее n , для которого есть контрпример, а для этого n — наибольшее p (разумеется, $p \leq \alpha$). Пусть G — контрпример с наименьшим числом рёбер для этих значений n и p . Если $n \leq 2\alpha$, то $T(n, \alpha) + \alpha - p = n - p$, и в графе заведомо имеется такое количество рёбер, ибо в нём всего p компонент; противоречие. Значит, $n > 2\alpha$.

Если в G есть лишнее ребро, удалим его; получим граф с n вершинами, в котором не более p компонент связности. Если их p , мы получили контрпример с меньшим числом рёбер. Если же их стало $p+1$, то в полученном графе меньше, чем $T(n, \alpha) + \alpha - (p+1)$ рёбер, что противоречит выбору p .

Значит, граф G является α -критическим. Выберем в нём вершину V наибольшей степени d . Заметим, что $d \geq \ell := \lfloor \frac{n-1}{\alpha} \rfloor$, иначе по задаче 4.1 в графе будет не более $\ell\alpha \leq n-1 < n$ вершин, что не так. Любая компонента связности графа G — турановский граф, так что по задаче 6 (см. ниже) вершина v — не точка сочленения. Значит, в графе $G \setminus v$ ровно $n-1$ вершина и p компонент связности, а потому (из выбора n) в нём хотя бы $T(n-1, \alpha) + \alpha - p$ рёбер. Значит, количество рёбер в G оценивается как

$$m \geq d + T(n-1, \alpha) + \alpha - p \geq \ell + T(n-1, \alpha) + \alpha - p = T(n, \alpha) + \alpha - p.$$

Финальное противоречие.

Задача 6. Допустим, что турановский граф G содержит точку сочленения v . Пусть при удалении вершины v граф G распадается на компоненты связности $L_1, \dots, L_k$, будем называть их *лепестками*. Очевидно, что

$$\alpha(G) \geq \alpha(L_1) + \dots + \alpha(L_k). \quad (1)$$

Выберем в графе G максимальное независимое множество E , содержащее вершину v (оно существует в силу турановости). Тогда хотя бы один из лепестков L_i содержит $\alpha(L_i)$ точек из

множества E — иначе не сложится неравенство (1) — и эти точки образуют в лепестке L_i максимальное независимое множество, не смежное с v . Отсюда следует, что в графе G все рёбра, ведущие из v в лепесток L_i , лишние. Действительно, в любом независимом множестве E' , получающемся при удалении такого ребра из графа G , можно заменить часть $E' \cap L_i$ на $E \cap L_i$, в результате чего мы получим независимое множество мощности $|E'|$ в графе G . Таким образом, $|E'| \leq \alpha(G)$. Иначе говоря, при удалении такого ребра в графе G не может появиться независимое множество мощности больше $\alpha(G)$.

Граф G не содержит вершин степени 1, так как сосед висячей вершины — это точка сочленения.

Задача 7. При $\alpha = 2, n = 7$ теорема Турана даёт оценку $m \geq T(n, \alpha) = 9$. Задача 5.2 позволяет усилить эту оценку до $m \geq 10$. Пример связного графа с $\alpha = 2, n = 7, m = 10$ состоит из клик на 3 и 4 вершинах, соединённых лишним ребром. Наша цель — доказать для турановского графа с $\alpha = 2, n = 7$ оценку $m \geq 11$.

Лемма 1. Пусть в графе есть вершина v , любые два соседа которой соединены ребром. Тогда все рёбра, соединяющие клику, состоящую из v и её соседей, с остальной частью графа, лишние.

Доказательство. Предположим противное. Пусть ребро uw , где вершина u граничит с v , а w — нет, не является лишним. Сотрём это ребро, получив независимое множество на $\alpha + 1$ вершине, содержащее u и w . Заменяя в этом множестве u на v , получим независимое множество на $\alpha + 1$ вершине в исходном графе, противоречие. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть в турановском графе с $\alpha = 2, n = 7$ есть вершина v степени 2. Тогда в нём не менее 12 рёбер.

Доказательство. Очевидно, что 4 вершины, независимые с v , образуют клику. По лемме 1, из каждой вершины этой клики выходит хотя бы одно ребро к соседям v . Тогда в графе имеются следующие рёбра: 2 ребра выходят из v , 6 рёбер содержатся в клике, 4 ребра проведены между кликой и соседями v . Итого 12 рёбер. Лемма 2 доказана.

Вернёмся к задаче. В турановском графе с $\alpha > 1$ нет изолированных и висячих вершин. Случай наличия вершины степени 2 уже разобран. Если все вершины имеют степень хотя бы 3, то $m \geq \frac{3n}{2} = 10.5$, следовательно, $m \geq 11$.

Задача 8. 1, 2. Выберем вершину u , у которой есть сосед v меньшей степени (в случае регулярного графа просто любую), удалим её, после этого удалим лишние рёбра (поскольку вершина u была стабильна, граф не распадётся) и клонируем вершину v . Тогда число рёбер уменьшится (в случае регулярного не увеличится), а число независимости не изменится.

Также в случае регулярного нужно убедиться, что он не станет снова регулярным. Описанная конструкция даёт регулярный граф, если у выбранных вершин u и v были одинаковые окрестности (см. определение перед задачей 14). Попробуем выбрать другую пару вершин. Заметим, что между любыми двумя вершинами в графе G есть путь, и если бы у любых двух соседних вершин окрестности были одинаковыми, то вообще у всех вершин окрестности были бы одинаковые. Значит, в этом случае любая вершина соединена либо со всеми, либо ни с кем. А значит, это клика.

Задача 9. Достаточно доказать пункт 3.

Опишем требуемую операцию для двух турановских графов G_1 и G_2 . Выберем в графе G_1 любое ребро uv , а в G_2 любую вершину w , и удалим их. Рёбра, которые в графе G_2 вели в вершину w , перенаправим в вершины u и v как угодно, но не все в одну (см. рис. 4). Полученный граф обозначим через G . Проверим, что получилось правильное преобразование с параметром $t = -1$. Достаточно убедиться, что число независимости не изменилось и что не появилось лишних рёбер (т. е. граф G турановский), поскольку в этом случае очевидно, что число рёбер и число компонент связности уменьшились на 1, поскольку вершина w не была точкой сочленения.

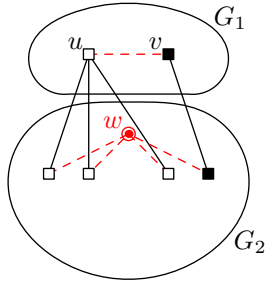


Рис. 4. Склеиваем два графа.

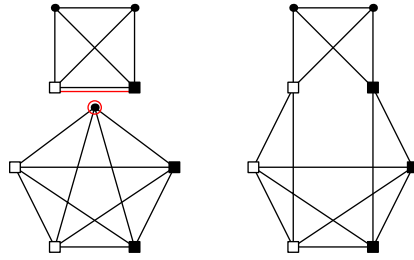


Рис. 5. Первый способ.

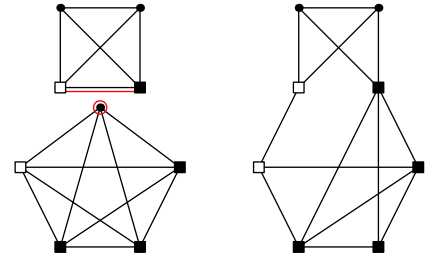


Рис. 6. Второй способ.

Для графа G выполняется неравенство $\alpha(G) \geq \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$. Действительно, поскольку ребро xy не было лишним в графе G_1 , в графе $G_1 \setminus xy$ можно найти независимое множество E_1 мощности $\alpha(G_1) + 1$, содержащее обе вершины x и y , а в графе G_2 , в силу его турановости, можно выбрать максимальное независимое множество E_2 , содержащее вершину w . Тогда множество $E_1 \cup E_2 \setminus \{w\}$ — независимое множество в графе G мощности $\alpha(G_1) + \alpha(G_2)$.

С другой стороны, неравенство $\alpha(G) \leq \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$ тоже верно. Действительно, пусть E — максимальное независимое множество в графе G . Если оно не содержит сразу обе вершины u и v , оно разбивается на части $E_1 = E \cap G_1$ и $E_2 = E \cap G_2$, являющиеся независимыми множествами в графах G_1 и G_2 соответственно. Если же $\{u, v\} \subset E$, то множества

$$E_1 = E \cap G_1 \setminus \{u\} \quad \text{и} \quad E_2 = (E \cap G_2) \cup \{w\} \quad (2)$$

суть независимые множества в графах G_1 и G_2 , имеющие суммарно $|E|$ элементов. В обоих случаях

$$\alpha(G) = |E| = |E_1| + |E_2| \leq \alpha(G_1) + \alpha(G_2).$$

Сопоставляя доказанные неравенства, делаем вывод, что $\alpha(G) = \alpha(G_1 \cup G_2)$, т. е. число независимости не изменилось.

Осталось доказать, что в G нет лишних рёбер, то есть построить для любого ребра xy графа G независимое множество в $G \setminus xy$ мощности $\alpha(G) + 1$. Опишем вкратце, как это делается.

Ребро xy соответствует ребру в одном из графов G_1 и G_2 (назовём его G_i), после выкидывания которого в этом графе образуется независимое множество U из $\alpha(G_i) + 1$ вершины. Это множество переносится в граф G (при этом, если оно содержит w , то в графе G выделяем обе вершины u и v). После этого остаётся дополнить его до независимого множества из $\alpha(G) + 1$ вершины множеством из G_{3-i} . Это делается при помощи одного из следующих множеств:

- в графе G_2 — независимого множества из $\alpha(G_2) + 1$ вершин графа $G_2 \setminus wt$, где t — сосед w ; а также независимого множества из $\alpha(G_2)$ вершин, не содержащего w ;
- в графе G_1 — независимого множества из $\alpha(G_1) + 1$ вершин графа $G_1 \setminus uv$, а также независимого множества V из $\alpha(G_1)$ вершин графа G_1 , не содержащего ни u , ни v . Множество V существует, иначе в любом максимальном независимом множестве графа G_1 содержится или u , или v , а тогда легко понять, что все другие рёбра из u и v — лишние.

Для построения двух примеров турановских графов из пункта 1 достаточно по разному распределять между вершинами u и v соседей вершины w , см. рис. 5, 6.

Задача 10. 1. Применяя операцию из задачи 9, сначала объединим две 4-клики (рис. 7), после чего разными способами добавим еще одну 4-клику (рис. 8–11). Результаты являются турановскими графами по свойствам операции.

Задача 11. Пользуемся методом спуска. Если граф не имеет нестабильных вершин, применим к нему задачу 8 и перейдём к меньшему графу. Иначе произведём раскол и просуммируем доказываемое неравенство для всех получившихся частей.

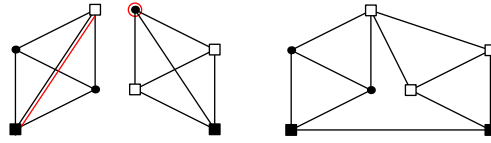


Рис. 7. Строим веретено Мозера.

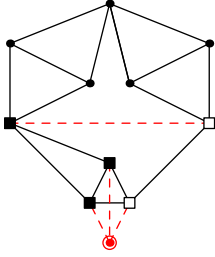


Рис. 8. При удалении вершин степени 4 остаются компоненты из 2 и 5 вершин.

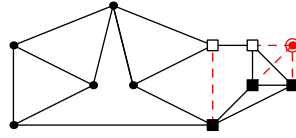


Рис. 9. При удалении вершин степени 4 остаются компоненты из 3 и 4 вершин.

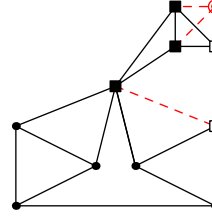


Рис. 10. Есть вершина степени 5.

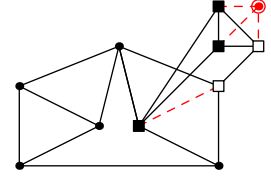


Рис. 11. Вершины степени 4 соединены.

Задача 12. Достаточно доказать пункт 3. Докажем индукцией по числу вершин n , что если $n \leq 4\alpha$, то

$$f = m - 5n + 12\alpha \geq 0.$$

Достаточно доказать это неравенство для связных графов, так как для несвязных оно получается суммированием по компонентам.

База индукции $n = \alpha$ (меньшие значения n невозможны) тривиальна. Докажем переход.

Пусть A — вершина наименьшей степени x . Если $x \leq 2$, то выбросим из графа вершину A вместе со всеми соседями. Число независимости уменьшится как минимум на 1, число вершин уменьшится на $x + 1$, а число рёбер уменьшится хотя бы на $\frac{x(x+1)}{2}$ (потому что суммарная степень удалённых вершин не меньше числителя этой дроби, а каждое удалённое ребро даёт в неё вклад не более 2). В итоге f уменьшится как минимум на

$$\frac{x(x+1)}{2} - 5(x+1) + 12 = \frac{1}{2}(x^2 - 9x + 14), \quad (3)$$

а при $x = 0, 1, 2$ эта величина неотрицательна. При этом для полученного графа $f \geq 0$ по предположению индукции, а значит, $f \geq 0$ и для исходного.

Значит, далее мы можем считать, что наименьшая степень вершины в графе не меньше 3. Разберем несколько случаев.

1) Если в графе есть вершина степени 5 или больше, то выбросим её. В результате исчезнет одна вершина и не менее 5 рёбер. Величина f при этом не увеличится и мы опять применим предположение индукции.

2) Если граф 3- или 4-регулярный. Для 4-регулярного графа имеем $m = 2n$, и поскольку $n \leq 4\alpha$, получаем

$$f = 2n - 5n + 12\alpha = 12\alpha - 3n \geq 0.$$

Для 3-регулярного графа имеем $2m = 3n$ и $n \leq 3\alpha$, в результате имеем аналогичную оценку.

3) Остался случай, когда все вершины имеют степени 3 или 4. В этом случае модифицируем рассуждения из начала решения, чтобы при подсчете числа выброшенных рёбер, как в формуле (3) при $x = 3$, оказалось бы, что выброшено не $\frac{x(x+1)}{2} = 6$, а как минимум 8 рёбер. Возьмем в качестве вершины A вершину степени 3, у которой есть сосед степени 4. Удалим из графа вершину A и её соседей B, C и D . Сумма степеней удаленных вершин не меньше 13. Наружу, т. е. в граф $G \setminus \{A, B, C, D\}$, ведет не меньше трех 3 рёбер, так как иначе вершины A, B, C и D соединены хотя бы $\frac{13-2}{2} = 6$ рёбрами, и тогда это клика на 4 вершинах, которой в дистанционном

графе быть не может. А значит, суммарно удалено не менее $13 + 3 = 16$ полуребер, т.е. хотя бы 8 рёбер. Этого достаточно.

Задача 13. 1-2. Пусть в критическом множестве m юношей, и один из них, Петруха, женился на Гюльчатай. Остальных юношей из критического множества будем называть друзьями Петрухи, юношей не из критического множества — массовой, а всех девушек, знакомых Петрухе и его друзьям, — гаремом. Для доказательства обоих утверждений задачи достаточно проверить, что:

— любые ℓ друзей Петрухи (где $1 \leq \ell \leq m - 1$) суммарно знакомы с ℓ девушками, не считая Гюльчатай, — это так, поскольку по условию нет меньших критических множеств и, значит, эти друзья в сумме знакомы как минимум с $\ell + 1$ девушкой (среди которых может быть и Гюльчатай).

— любые ℓ юношей из массовой (где $1 \leq \ell \leq n - m$) знакомы как минимум с ℓ девушками не из гарема, — это так, поскольку Петруха с друзьями и эти ℓ юношей в сумме знакомы с $m + \ell$ или более девушками, m из которых (в том числе, Гюльчатай) находятся в гареме.

3. Утверждение сразу следует из предыдущих пунктов. Для доказательства индукционного перехода следует при необходимости «рассорить» некоторых юношей и некоторых девушек (чтобы они перестали считать себя знакомыми), чтобы появилось критическое множество. И удалить Петруху с Гюльчатай.

Задача 14. 1. Пусть $u \in U$ — произвольная вершина. В турановском графе G существует максимальное независимое множество E , не содержащее u . Тогда пересечение $E \cap \bar{U}$ содержит не менее $|U|$ вершин (это и есть требуемое нам множество) — если бы это было не так, то, заменив в множестве E его часть $E \cap \bar{U}$ на U , мы получили бы более крупное независимое множество, что невозможно.

2. Пусть $u \in U$ — произвольная вершина, v — соседняя с ней. Поскольку ребро uv не лишнее, в графе $G \setminus uv$ существует независимое множество E , содержащее $\alpha + 1$ вершину. Тогда пересечение $E \cap \bar{U}$ содержит не менее $|U| + 1$ вершины (как нам и требуется) — если бы это было не так, то, заменив в множестве E его часть $E \cap \bar{U}$ на U , мы получили бы независимое множество в графе G , содержащее не менее $\alpha + 1$ вершины.

3. Допустим, что это не так. Рассмотрим турановский граф с наименьшим независимым множеством U , для которого $|N(U)| \leq |U| - 1$. Очевидно, что $|U| > 1$. Пусть $u \in U$ — произвольная вершина, v — соседняя с ней. Пусть E — максимальное независимое множество, содержащее v . Ясно, что $u \notin E$. Положим $\ell = |E \cap U|$, $r = |E \cap N(U)|$. В силу минимальности U вершины из множества $E \cap U$ имеют не меньше ℓ соседей из $N(U)$ и эти соседи не принадлежат множеству E . Следовательно, $\ell + r \leq |N(U)| \leq |U| - 1$. Тогда, заменив в множестве E его часть $E \cap \bar{U}$ на U , мы получим независимое множество в графе G , содержащее не менее $\alpha + 1$ вершины. Противоречие.

4. Следует из леммы Холла, условие которой обеспечивает пункт 3: вершины множества U — юноши, вершины множества $N(U)$ — девушки.

5. Допустим, что это не так. Рассмотрим турановский граф с наименьшим независимым множеством U , для которого $|N(U)| = |U|$ (по пункту 4 меньшее число элементов множества $N(U)$ иметь не может). Тогда по пункту 5 вершины множества $\bar{U}$ разбиваются на пары некоторым паросочетанием, и значит, больше $|U|$ независимых вершин подграф $\bar{U}$ иметь не может. Это значит, что все ребра, уходящие из $\bar{U}$ в оставшуюся часть графа G , лишние. Противоречие.

6. По утверждению пункта 5 любое подмножество $A \subset U$ имеет не меньше $|A| + 1$ соседей в $N(U)$. Тогда условия леммы Холла для множества U выполнены «с запасом»: оно удовлетворяет условиям леммы Холла, даже если мы исключим из множества $N(U)$ вершину x . Тогда лемма Холла сразу дает нам требуемое утверждение.

7. Достаточно доказать, что в U не может быть вершин степени хотя бы 3.

От противного, пусть некоторая вершина $u \in U$ имеет 3 соседа a, b, c . По утверждению пункта 6, можно построить паросочетание, в которое входят все вершины из множества U , но не входит

вершина c . Можно считать, что ребра ua и vb , где v — некоторая вершина из U , принадлежат этому паросочетанию. Мы получим из исходного предположения противоречие, если докажем, что ребро ub — лишнее.

Допустим, что это не так, и нашлось независимое множество E , содержащее $\alpha(G) + 1$ вершину, причем $u, b \in E$. Тогда множество $N(U) \cap E$ заведомо не содержит вершину c , а все остальным вершины этого множества выбранное паросочетание инъективно сопоставляет вершинам из U . Заменив в множестве E вершины из $N(U) \cap E$ на парные им вершины из U , получим независимое множество в графе G из $\alpha(G) + 1$ вершин, что невозможно.

8. Зафиксируем произвольное ребро xy и рассмотрим максимальное независимое множество U , не содержащее этого ребра (оно существует благодаря турановости). Тогда автоматически $x, y \in N(U)$. По утверждению пункта 5 каждое непустое подмножество $B \subset E$ имеет не меньше $|B| + 1$ соседних вершин. Если при этом $|N(B)| = |B| + 1$, то по утверждению пункта 7 в множестве B найдется вершина степени 2. Значит, нам остается рассмотреть случай, когда для множества U условия леммы Холла выполнены с избытком 2, т. е. каждое непустое подмножество $B \subset E$ имеет не меньше $|B| + 2$ соседних вершин. Тогда по лемме Холла заключаем, что вершины множества $\bar{U} \setminus \{x, y\}$ разбиваются на пары паросочетанием из α ребер. Добавляя к этому паросочетанию ребро xy , получаем требуемое.

Задача 15. 1. Это следует из задачи 14.5.

2. Это следует из задачи 14.7. Каждая вершина входит в максимальное независимое множество и потому имеет степень 2. Значит, наш турановский (связный!) граф является циклом.

3. Предположим противное. Тогда по задаче 14.7 для любого независимого множества U имеем $|N(U)| \geq |U| + 2$. Докажем, что степени всех вершин равны 3. Пусть это не так, и у вершины u есть соседи a, b, c, d . Выберем максимальное независимое множество U , содержащее вершину u . Действуя как в решении 14.8, найдём паросочетание из α рёбер, не содержащее вершин a и b ; тогда оно содержит рёбра uc и vd при некоторой $v \in U$. Но тогда ребро ud является лишним, ибо в любом независимом множестве в $G \setminus ud$, содержащем u и d , можно «спустить» вершины из $N(U)$ в U , получив независимое множество той же мощности в G .

Итак, граф G 3-регулярен. По задаче 14.8, в нём есть паросочетание из $\alpha + 1$ ребра; окрасим эти рёбра в синий цвет. После выбрасывания синих рёбер граф распадается на циклы; если среди них есть нечётные, то их не меньше двух, и число независимости уже графа, образованного этими циклами, не больше α , то есть все синие рёбра лишние. Значит, все циклы чётные. Окрасим рёбра каждого из них попеременно в красный и зелёный цвета, получим правильную 3-раскраску рёбер графа (и каждый цвет образует совершенное паросочетание).

Выберем любое ребро E — скажем, красное. Поскольку оно не лишнее, после его удаления можно найти независимое множество U мощности $\alpha + 1$. Пусть U' — множество всех оставшихся вершин графа. Из U в U' выходят по $\alpha + 1$ синих и зелёных рёбер и $\alpha - 1$ красное, поскольку из вершин бывшего ребра E (лежащих в U) никаких красных ребер теперь не выходит. Значит, на множестве U' есть ровно одно ребро, и оно красное. Сопоставим его ребру E и обозначим через E' .

Рассмотрим теперь любую вершину u и пусть R, G, B — соответственно красное, зелёное и синее рёбра из неё, R', G' и B' — сопоставленные им рёбра, а U_r, U_g, U_b — независимые множества, получаемые после выкидывания R, G и B соответственно. Тогда все вершины разбиваются на 8 множеств U_{ijk} , $i, j, k \in \{0, 1\}$, где $i = 1$ означает, что вершины лежат в U_r , индексы j и k играют такие же роли для остальных цветов. В частности, $u \in U_{111}$. Также обозначим через U_{1**} объединение всех U_{ijk} с $i = 1$, аналогично вводятся другие подобные обозначения. В этих обозначениях можно описать и уже знакомые нам множества, например, $U_{1**} = U_r$ и т. п.

Поскольку $|U_{1**}| = |U_{*1*}| = |U_{0**}| = |U_{*0*}| = \alpha + 1$, получаем, что $|U_{11*}| = |U_{00*}|$. При этом все рёбра, кроме рёбер R, G, R' и G' , соединяют U_{11*} с U_{00*} или U_{10*} с U_{01*} . Значит, множество $U = U_{11*} \setminus u$ независимое, и $N(U) \subset U_{00*}$, то есть $|N(U)| \leq |U| + 1$. Это противоречит задачам

14.5 и 14.7, если U непусто. Значит, $U_{11*} = \{u\}$, то есть $U_{111} = \{u\}$ и $U_{110} = \emptyset$. Аналогично, $U_{101} = U_{011} = \emptyset$.

Выбросим теперь рёбра R, G, B, R', G', B' из нашего графа. Теперь каждое из оставшихся рёбер должно соединять часть U_{ijk} с $U_{1-i,1-j,1-k}$; однако, поскольку $U_{110} = U_{101} = U_{011} = \emptyset$, а единственная вершина из U_{111} не соединена с U_{000} , в полученном графе рёбер нет. Значит, их было всего 6, а вершин — 4, и $\alpha = 1$. Противоречие.

4. Предположим противное. Соединим ребром *незнакомых* человек. Тогда нам известно, что $n = 12$, $\alpha = 5$, то есть $n = 2\alpha + 2$. Собственно, это наблюдение и даёт нам обобщённую задачу:

В группе из $2\alpha + 2$ человек среди любых $2\alpha - 1$ человек найдутся α попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся $\alpha + 1$ попарно знакомых.

Чтобы прийти к противоречию, нам надо выбросить 3 вершины так, чтобы у полученного графа число независимости уменьшилось.

Выкинем рёбра так, чтобы остался α -критический граф. Пусть он несвязен. Тогда в нём есть компонента связности с числом вершин n' и числом независимости α' такими, что $n' \leq 2\alpha' + 1$ — то есть либо компонента на не более чем 2 вершинах, либо нечётный цикл (по пунктам 1–2). В любом случае из этой компоненты можно выкинуть не более трёх вершин, уменьшив число независимости.

В противном случае остался турановский граф, в котором по пункту 3 есть вершина u степени 2. Выкинув её вместе с её соседями, мы уменьшим число независимости (ибо к любому независимому множеству в оставшемся графе можно добавить u).

Задача 16. 1. Пусть a — вершина степени 2 в графе G , b и c — её соседи, W — множество соседей b и c , кроме a , см. рис. 12. Если вершины b и c соединены ребром, то по лемме из задачи 7 все рёбра, ведущие из треугольника abc наружу, лишние, что невозможно.

Теперь выкинем все рёбра, идущие из вершин b и c в W , соединим b и c , а также добавим вершину v , соединённую со всеми вершинами из W (получив компоненту, которую мы обозначим G'), см. рис. 13. По сути, мы совершили преобразование, обратное в преобразованию из задачи 9.3. Проверка того, что оно правильное, осуществляется похожим образом.

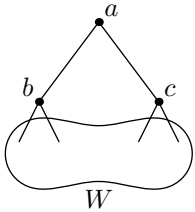


Рис. 12. Было.

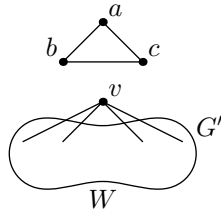


Рис. 13. Стало.

Именно, надо проверить, что $\alpha(G') = \alpha - 1$ и что граф G' α -критический. Если максимальное независимое множество в графе G' не содержит вершину v , то в графе G к нему можно добавить ещё и вершину a , а если содержит, то вершину v можно заменить на b и c . А результате получаем оценку $\alpha(G') \leq \alpha - 1$. С другой стороны, максимальное независимое множество в графе G , содержащее вершину a , немедленно даёт оценку $\alpha(G') \geq \alpha - 1$.

Если из G' выкинуть ребро xu , можно выкинуть из G то же ребро (с заменой v на b или c , если необходимо), найти независимое множество из $\alpha + 1$ вершины и получить из него независимое множество в графе $G' \setminus xu$ — либо просто выкидыванием вершины a, b или c , либо заменой вершин b и c (если они обе присутствуют) на v . Проверка закончена.

Для дальнейшего стоит ещё заметить, что наше преобразование не просто правильное с параметром $t = 1$, а точное, то есть число рёбер увеличивается ровно на 1. Для этого нужно показать, что в множестве W не было вершины, соединённой с b , и с c . Действительно, пусть такая вершина w нашлась. Тогда при выкидывании ребра wb должно появиться независимое множество

U из $\alpha + 1$ вершины, содержащее w и b (и, значит, не содержащее a и c). Но тогда множество $U \cup \{a\} \setminus \{b\}$ — независимое уже в G , и в нём $\alpha + 1$ вершина. Противоречие.

2. Индукция по α . При $\alpha = 1$ граф — клика на 4 вершинах, и утверждение верно.

Пусть $\alpha > 1$. Тогда по задаче 15.3 в нашем графе G есть вершина степени 2 и можно совершить раскол из пункта 1 (это преобразование, обратное к преобразованию из задачи 9.3), получив треугольник и меньший граф G' . При этом G' — турановский граф, у которого число независимости на 1, а число вершин — на 2 меньше, чем у G , то есть по предположению индукции он тривиален. Но G получается из G' и треугольника операцией из 9.3, значит, он тоже тривиален, что и требовалось.

3. Ответ. Все эти графы имеют такой вид: 4 вершины a, b, c, d , попарно соединённые не пересекающимися (по внутренним вершинам) нечётными путями. Например, два самых маленьких примера — это клика на 4 вершинах и граф, полученный из неё заменой ребра на путь из 3 рёбер (с двумя новыми вершинами).

Докажем индукцией по α , что все наши графы имеют вид, указанный в ответе. Из решения предыдущего пункта следует, что они все получаются из клики на 4 вершинах последовательным «вклеиванием» (операцией из 9.3) треугольников (при этом из треугольника удаляется ребро, а из нашего графа — вершина). Поэтому достаточно показать, что при таких операциях из графов в ответе получаются такие же.

Это нетрудно сделать. Если из нашего графа берётся вершина степени 2, то просто нечётный путь, в котором она лежит, удлиняется на 2 вершины. Если же она степени 3, то степень 3 получает одна из вершин треугольника, и опять же получается наш граф, в котором один путь удлинился на 2 вершины.

Задача 17. **6.** Ниже написаны решения пунктов 1–5 для графов. Доказательства аналогичных утверждений про гиперграфы получаются несложной переделкой; в тех местах, где рассуждения нуждаются в переделке, мы делаем сноски, в которых описывается соответствующее изменение. При первом прочтении эти сноски можно игнорировать.

Заметим сразу, что число $\kappa(G)$ равно наименьшей мощности множества вершин U , которое пересекается со всеми максимальными независимыми множествами в G . (Для гиперграфов это так по определению, а доказательство этого несложного утверждения для графов можно усмотреть в задаче 21.)

1. Пусть $\kappa = \kappa(G_0)$, G' — индуцированный подграф на всех вершинах, не лежащих в G_0 , $\alpha = \alpha(G_0)$ и $\beta = \alpha(G')$. Ясно, что $\alpha(G) \leq \alpha + \beta$. Более того, если бы в этом неравенстве достигалось равенство, то число независимости графа G сохранилось бы при выбрасывании всех рёбер между G_0 и G' , то есть наш граф не был бы турановским. Итак, $\alpha(G) < \alpha + \beta$.

Пусть V — множество вершин в G_0 , из которых¹ ведут рёбра в G' . Покажем, что $|V| \geq \kappa(G_0)$; отсюда будет следовать требуемое. Предположим противное. Тогда в G_0 найдётся независимое множество мощности α , не пересекающееся с V . Это множество в объединении с максимальным независимым множеством в G' образует независимое множество в G мощности $\alpha + \beta$. Противоречие.

2. Предположим противное. Выберем в графе G наименьшее $k > 1$, для которого существует контрпример, и выберем соответствующие индуцированные подграфы $G_1, G_2, \dots, G_k$; пусть G_0 — индуцированный подграф на всех вершинах, не входящих ни в одно из множеств G_i (он может оказаться пустым). Обозначим через F множество рёбер, не лежащих ни в одном из подграфов $G_0, G_1, \dots, G_k$. Обозначим $\alpha_i = \alpha(G_i)$, $\kappa_i = \kappa(G_i)$. По нашему предположению,

$$|F| \leq \sum_{i=1}^k (\kappa_i - 1). \quad (4)$$

¹Для гиперграфов здесь нужно выбирать множество вершин из G_0 наименьшей мощности, пересекающее все рёбра, пересекающиеся как с G_0 , так и с G' ; см. решение 21.2.

Наша цель — построить в G независимое множество мощности $\sum_{i=0}^k \alpha_i$. Как и в предыдущем пункте, это будет означать, что все рёбра в F — лишние, то есть G не турановский.

Для этого достаточно в каждом ребре из F окрасить по вершине так, чтобы в G_0 окрашенных вершин не было, а в каждом G_i ($i = 1, 2, \dots, k$) было окрашено не более $\kappa_i - 1$ вершин. Действительно, если это сделать, то в G_0 можно выбрать независимое множество из α_0 вершин, а в каждом G_i — независимое множество из α_i вершин, ни одна из которых не окрашена. Поскольку в каждом ребре из F окрашенная вершина останется невыбранной, объединение всех этих множеств будет независимым во всём графе.

Чтобы окрасить нужные вершины, воспользуемся леммой Холла, построив следующий вспомогательный двудольный граф H . Одной его долей будет множество F ; в другую для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ поместим $\kappa_i - 1$ вершин $v_{i1}, \dots, v_{i, \kappa_i - 1}$. Если ребро $e \in F$ содержит вершину из G_i , соединим e в графе H со всеми вершинами вида v_{ij} (здесь не требуется, чтобы ребро e содержало хотя бы одну из этих вершин v_{ij} , — достаточно того, что в G_i существует вершина, которую ребро e содержит). Мы собираемся найти в этом графе паросочетание, покрывающее всю долю F . Тогда, если в этом паросочетании ребро $e \in F$ сопоставлено вершине v_{ij} , можно в этом ребре окрасить вершину из G_i ; получится требуемая окраска вершин. Значит, достаточно проверить условие леммы Холла для графа H .

Пусть E' — непустое подмножество в F ; без ограничения общности можно считать, что вершины рёбер из E' лежат ровно в подграфах $G_{\ell+1}, G_{\ell+2}, \dots, G_k$ и, возможно, в G_0 при некотором ℓ , где $0 \leq \ell < k$. Предположим, что условие леммы Холла не выполнено для этого множества, то есть

$$|E'| > \sum_{i=\ell+1}^k (\kappa_i - 1).$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (4), заключаем, что $\ell \geq 1$. Тогда подграфы $G_1, \dots, G_\ell$ соединены друг с другом и с $G \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_\ell)$ только рёбрами из $F \setminus E'$, причём

$$|F \setminus E'| = |F| - |E'| < \sum_{i=1}^k (\kappa_i - 1) - \sum_{i=\ell+1}^k (\kappa_i - 1) = \sum_{i=1}^{\ell} (\kappa_i - 1).$$

Если $\ell > 1$, мы получаем противоречие с выбором k . Если же $\ell = 1$, получаем противоречие с предыдущим пунктом задачи.

Итак, мы получили, что условие леммы Холла выполнено, то есть требуемая окраска возможна.

3. Теорему о расколе удобно доказывать, если обобщить утверждение предыдущего пункта следующим образом.

Пусть $G_1, G_2, \dots, G_k$ ($k > 1$) — не обязательно индуцированные подграфы на попарно непересекающихся множествах вершин, G_0 — индуцированный подграф на всех оставшихся вершинах (G_0 может быть пуст). Тогда количество рёбер, не содержащихся ни в одном из G_i ($i = 0, \dots, k$), строго больше чем $\sum_{i=1}^k (\kappa(G_i) - 1)$.

Доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство пункта 2. Просто теперь, если в F есть ребро с концами в одном G_i , то в графе H оно будет иметь степень $\kappa_i - 1$.

Перейдём к теореме.

Теорема о расколе. *Пусть x — нестабильная вершина турановского графа G . Тогда к каждой компоненте связности ядра графа $G \setminus x$ можно добавить по вершине, чтобы получилось правильное преобразование графа G .*

Доказательство. Пусть x — нестабильная вершина, а $G_1, G_2, \dots, G_k$ — компоненты связности ядра графа $G \setminus x$; они удовлетворяют условиям утверждения выше. Значит, если мы выкинем

вершину x из графа G , а затем удалим все ненужные рёбра (чтобы получить несвязное объединение графов G_i), мы выбросим не менее $1 - k + \sum_{i=1}^k \kappa(G_i)$ рёбер. Графы G_i — турановские, и по задаче 21.1, если к каждому из них добавить вершину, соединённую с его ключевым множеством, то получится турановский граф. Сделав это с каждой компонентой нашего несвязного объединения, мы получим α -критический граф, увеличив (по сравнению с исходным графом) число вершин на $t = k - 1$, число компонент также на t . Число же рёбер увеличится не более чем на

$$k - 1 - \sum_{i=1}^k \kappa(G_i) + \sum_{i=1}^k \kappa(G_i) = t.$$

Значит, мы совершили правильное преобразование.

4. Мы пользуемся терминологией из решения пункта 1.

Пусть E — множество рёбер, пересекающих как G_0 , так и G' . Для ребра $e \in E$ обозначим $e_0 = e \cap G_0$ и $e' = e \cap G'$. Согласно решению пункта 1, все $\kappa = \kappa(G_0)$ вершин вида e_0 различны². Пусть V — множество всех вершин³ вида e' , см. рис. 14.

Выкинем из графа G все рёбра множества E . Добавим к G_0 вершину u и рёбра вида $e_0 \cup \{u\}$ (получив граф G_{00}), а к G' добавим (гипер)ребро V (получив граф G''), см. рис. 15.

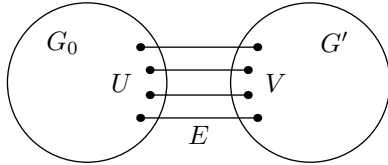


Рис. 14. Было.

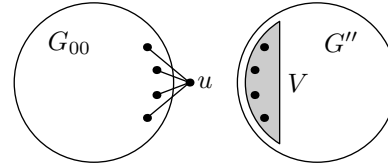


Рис. 15. Стало.

Пусть α и β — числа независимости графов G_0 и G' . Тогда, как мы уже видели в решениях предыдущих пунктов, $\alpha(G) < \alpha + \beta$; значит, как мы видели в решении пункта 1, множество U всех вершин вида e_0 должно быть ключевым⁴ для G_0 . Тогда можно выбрать в G_0 независимое множество мощности α , содержащее лишь одну вершину из U . Выкинув её и добавив к этому множеству максимальное независимое множество в G' , получим независимое множество в G . Поэтому $\alpha(G) = \alpha + \beta - 1$.

Если взять любые максимальные независимые множества W_0 и W' в графах G_0 и G' соответственно, они не будут образовывать независимого множества в G , то есть их объединение будет содержать некоторое ребро $e \in E$. Но при выкидывании любого ребра $e \in E$ это свойство нарушится — значит, существует W_0 , содержащее лишь одно наперёд заданное множество вида e_0 . Чтобы свойство выше выполнялось, любое множество вида W' должно содержать соответствующее множество e' . Итак, любое множество W' содержит всё V , и потому $\alpha(G'') = \beta - 1$.

Из тех же соображений получаем, что граф G_{00} не может содержать независимого множества из $\alpha + 1$ вершины, откуда $\alpha(G_{00}) = \alpha$.

Теперь для проверки того, что мы совершили правильное преобразование, достаточно проверить, что получился α -критический граф. Если выкинуть из G_{00} одно из рёбер графа G_0 , то уже в этом графе найдётся большее независимое множество. Если выкинуть из G_{00} ребро вида $f = e_0 \cup \{u\}$, то можно выкинуть из G ребро e ; тогда в G найдётся независимое множество мощности $\alpha + \beta$, пересекающее G_0 по множеству мощности α , и его можно дополнить вершиной u до независимого множества графа $G_{00} \setminus f$.

²В случае гиперграфов — все эти множества вершин попарно не пересекаются.

³Или объединение всех множеств вида e' .

⁴А для гиперграфов — существует ключевое множество U в графе G , пересекающееся с каждым множеством вида e_0 по одной вершине — своей для каждого e_0 .

Если выкинуть из G' ребро V , то мы уже знаем, что число независимости увеличится на 1. Если же выкинуть ребро f графа G' , то в графе $G' \setminus f$ найдётся независимое множество, пересекающее G' по β вершинам, а G_0 по α вершинам. Второе свойство говорит о том, что это множество не может содержать V , то есть его пересечение с G' будет независимым и в G'' .

5. Как и в пункте 2, обозначим через G_0 граф, индуцированный на множестве вершин, не входящих в G_i , и введём обозначения $\alpha_i = \alpha(G_i)$, $\kappa_i = \kappa(G_i)$. Пусть E — множество всех рёбер, не содержащихся ни в одном из G_i ($i = 0, 1, \dots, k$). Обозначим через G' граф, индуцированный на множестве вершин всех графов $G_1, G_2, \dots, G_k$, а через F — множество всех рёбер из E , соединяющих G_0 и G' , см. рис. 16.

Если выкинуть ребро $f \in F$, то в множестве E останется $\sum_{i=1}^k (\kappa_i - 1)$ рёбер. По доказанному в пункте 2, в полученном графе можно выбрать независимое множество X_f из $\sum_{i=0}^k \alpha_i$ вершин. Ясно, что множество X_f содержит ровно α_i вершин из G_i , и большего независимого множества выбрать нельзя. Поскольку граф G был турановским, это означает, что $\alpha := \alpha(G) = -1 + \sum_{i=0}^k \alpha_i$. Заметим сразу, что из доказанного в пункте 2 следует, что любое ребро $f' \in F$, отличное от f , содержит вершину $x \notin X_f$, не лежащую в G_0 .

Пусть V — множество вершин в G_0 , содержащихся хотя бы в одном ребре из F ; рассмотрим $v \in V$ и ребро $f \in F$, содержащее v . Предположим, что в G_0 есть максимальное независимое множество U , не содержащее v . Тогда в множестве X_f можно заменить часть $X_f \cap G_0$ на U , и множество останется независимым — оно не содержит ни одного ребра $f' \in F$, отличного от f . Более того, ребра f оно тоже не содержит, а значит, оно окажется независимым и в G , что невозможно, ибо в нём $\alpha + 1$ вершина. Значит, любое максимальное независимое множество в G_0 содержит всё множество V .

Теперь можно описать требуемое преобразование. Удалим из G все рёбра, соединяющие G' и G_0 ; добавим к G_0 гиперребро V . К графу G' добавим вершину v , и для любого $f \in F$ добавим ребро $f \setminus V \cup \{v\}$, см. рис. 16. Как и ранее, обозначим полученные компоненты связности через G_{00} и G'' . Из сказанного выше легко вытекает, что $\alpha(G_{00}) = \alpha_0 - 1$ и $\alpha(G'') = \alpha(G')$ (для доказательства второго достаточно заметить, что любое максимальное независимое множество в G' содержит $f \cap G'$ для некоторого $f \in F$). Осталось понять, что оба гиперграфа G'' и G_{00} являются α -критическими.

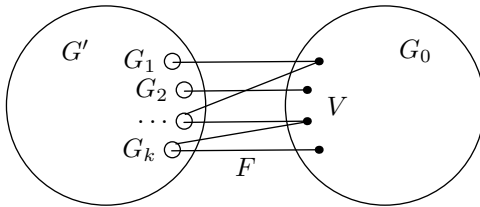


Рис. 16. Было.

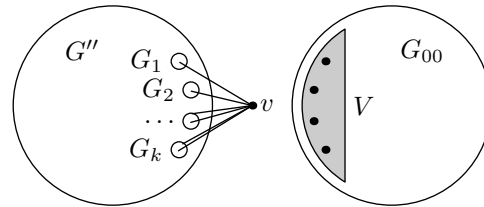


Рис. 17. Стало.

Если из G_{00} выкинуть гиперребро V , то, как мы знаем, число независимости увеличится на 1 (с $\alpha_0 - 1$ до α_0). Если выкинуть другое ребро e , то в $G \setminus e$ найдётся независимое множество U мощности $\alpha + 1$; если оно содержит $\alpha_0 + 1$ вершин из G_0 , то, выкинув из него вершину из V , получим требуемое независимое множество в $G_{00} \setminus e$. Иначе в U должно быть α_i вершин из каждого G_i ; при этом оно не может содержать V , ибо тогда оно не могло содержать $\alpha - \alpha_0$ вершин из G' ; значит, $U \cap G_0$ — требуемое независимое множество в $G_{00} \setminus e$.

Если выкинуть из G'' ребро e , не содержащее v , то в графе $G \setminus e$ найдётся независимое множество U из α вершин. Если оно содержит $\alpha - \alpha_0 + 1$ вершин из G' , то оно же будет независимым в G'' . Иначе, как мы доказали, оно обязано содержать V , а потому при добавлении к $U \cap G'$ вершины v оно останется независимым. В любом случае число независимости G'' увеличится.

Если же выкинуть из G'' ребро $f \setminus V \cup \{v\}$ при некотором $f \in F$, то, опять же, в $G \setminus f$ есть независимое множество из α вершин, по α_i вершин из каждого G_i . Оно обязано содержать V и потому в G'' без нашего ребра оно, с добавлением v , тоже будет независимым.

Задача 18. 1. Предположим противное, пусть $A \subset B$ и ребро B оказалось лишним, т. е. после удаления ребра B число независимости α увеличилось. Заметим, что если некоторое ребро гиперграфа является лишним, то после его удаления все максимальные независимые множества будут содержать все его вершины. Отсюда получим, что после удаления ребра B все вершины ребра A принадлежат любому максимальному независимому множеству E в новом графе. Но это противоречит независимости множества E .

2. Если вершина v не является изолированной, то существует некоторое отличное от петли ребро B , которое содержит v . Если бы ребро B оказалось нелишним, при его удалении увеличилось бы число независимости за счет того, что появилось бы независимое множество, содержащее все вершины из B . Но вершина v с петлей не может принадлежать никакому независимому множеству по определению независимости. Следовательно, B — лишнее.

3. Рассмотрим произвольную неизолированную вершину v . Она принадлежит некоторому ребру A , которое не является петлей. Поскольку ребро A — не лишнее, то после его удаления все максимальные независимые множества будут иметь размер $\alpha + 1$. Выберем одно из них, оно содержит все вершины ребра A . Значит, если мы удалим из этого независимого множества вершину v , мы найдем максимальное независимое множество размера α в нашем исходном графе G , как и хотели.

Задача 19. 1. Ответ: $n - \alpha$ ребер.

Пример. Гиперграф, состоящий из α изолированных вершин и $n - \alpha$ вершин, имеющих петлю.

Оценка. Так как мы минимизируем число ребер, можно считать, что граф α -критический. Заметим, что если в α -критическом гиперграфе заменить ребро на любое его одноэлементное подмножество (т. е. на петлю), то число независимости не изменится. Действительно, число независимости не уменьшится, поскольку по задаче 18.3 в исходном гиперграфе имеются максимальные независимые множества из α элементов, не содержащие той вершины, на которую мы накидываем петлю. А с другой стороны, и увеличиться оно не сможет, поскольку эта замена дает более жесткое ограничение на существование независимых множеств. Последовательно выполняя такие замены и удаляя возникающие лишние ребра, мы сведем любой гиперграф к гиперграфу, описанному в примере.

2. Ответ: $C_n^{\alpha+1}$ ребер (при $n = \alpha$ считаем это выражение равным 0).

Оценка. Поскольку гиперграф не содержит лишних ребер, при удалении любого ребра E появляется независимое множество из $\alpha + 1$ вершины, содержащее ребро E и не содержащее целиком никаких других ребер. Следовательно, количество ребер не больше чем число всевозможных $(\alpha + 1)$ -элементных подмножеств множества вершин гиперграфа, т. е. не больше $C_n^{\alpha+1}$.

Пример. Возьмем гиперграф на n вершинах, в котором ребрами являются все $(\alpha + 1)$ -элементные подмножества множества вершин.

Задача 20. 1. Ясно, что при замене произвольного ребра E на более крупное множество число независимости гиперграфа может разве лишь увеличиться. Однако при выполнении операции расширения (когда ребро E нелишнее) оно останется прежним. Действительно, если после выполнения расширения в графе нашлось независимое множество A из $\alpha + 1$ вершин, то $E \subset A \subsetneq \tilde{E}$. Это значит, что A — ключ ребра E . Но тогда $\tilde{E} \subset A$, что противоречит предыдущему включению.

2. Пусть $\tilde{G}$ — гиперграф, полученный после расширения ребра. Если из него выкинуть расширенное ребро $\tilde{E}$, получится гиперграф $G \setminus E$, у которого число независимости равно $\alpha + 1$.

Если же из него выкинуть другое ребро E' , то получится гиперграф $G \setminus E'$, в котором ребро E расширено, то есть его число независимости не меньше, чем у $G \setminus E'$, то есть не меньше $\alpha + 1$.

3. Пусть $v_1 v_2 \dots v_{2k+1}$ — нечётный цикл; клонируем его вершину v_2 , получив вершину u . После выкидывания ребра $v_1 v_2$ единственным независимым множеством мощности $k + 1$ будет множество $E_1 = \{v_1, v_2, v_4, \dots, v_{2k}\}$. То есть при расширении ребра $v_1 v_2$ получится гиперребро E_1 . После этого при удалении ребра uv_3 единственным независимым множеством мощности $k + 1$ будет множество $E_3 = \{u, v_3, v_5, \dots, v_{2k+1}\}$. Заменяя ребро uv_3 на E_3 , получаем требуемый 3-регулярный гиперграф. Он выглядит как *чётный* цикл $v_1 u v_2 v_3 \dots v_{2k+1}$, в который добавлены два гиперребра — каждое содержит половину всех вершин, идущих через одну.

4. Ответ: это произойдёт, если в гиперграфе есть изолированная вершина без петли (ребра, содержащего лишь одну эту вершину).

Напомним, что для любого турановского гиперграфа более чем из одной вершины любая его вершина не лежит в некотором максимальном независимом множестве. Поэтому в компоненте связности, не содержащей ребра e , ни одна из вершин не может входить сразу во все максимальные независимые множества гиперграфа $G \setminus e$, кроме случая, когда компонента — это изолированная вершина без петли. Если такой изолированной вершины в гиперграфе нет, то для любого ребра e все его ключи будут содержаться в компоненте связности, содержащей e , а если есть, то эта вершина будет присутствовать во всех ключах ребра e , то есть она присоединится к компоненте связности ребра e при его расширении.

5. Пусть вершина x содержится лишь в ребре E гиперграфа G (мы считаем, что E содержит ещё вершину, кроме x). Выкинем эту вторую вершину из ребра E , получив ребро E' , а также добавим к графу новую вершину y и новое ребро xy ; обозначим полученный гиперграф через G' .

Заметим, что в любом независимом множестве в G , не содержащем x , можно заменить одну из вершин ребра E на x (или просто добавить x иначе). Отсюда вытекает, что $\alpha(G') \geq \alpha(G)$. С другой стороны, если взять в G' максимальное независимое множество и заменить в нём, если надо, y на x , то получится независимое множество в G . Поэтому $\alpha(G') = \alpha(G)$.

Если из гиперграфа G' выкинуть любое ребро F гиперграфа G , то в нём появится независимое множество мощности $\alpha + 1$; проделав с ним операцию замены на x , мы получим независимое множество в $G' \setminus F$, так что ребро F нелишнее в G' . Если выбросить ребро xy , число независимости увеличится очевидным образом. Наконец, максимальное независимое множество в $G \setminus E$ (мощности $\alpha + 1$) также является независимым в $G' \setminus E'$.

Замечание. Граф из этого пункта является V -элементарным для $V = E'$. Поэтому приведённое преобразование — частный случай преобразования из задачи 23.3.

Задача 21. **1.** Пусть гиперграф G' получен добавлением к гиперграфу G вершины u , соединённой рёбрами с вершинами ключевого множества V . Ясно, что число независимости α не уменьшилось. С другой стороны, если в G' есть независимое множество мощности $\alpha + 1$, оно получено добавлением к максимальному независимому множеству X гиперграфа G вершины u ; этого не может быть, ибо $X \cap V$ содержит некоторую вершину x , а в новом графе есть ребро $\{x, u\}$.

Осталось показать, что G' α -критический. Если из него убрать одно из рёбер графа G , то уже в G без этого ребра было независимое множество мощности $\alpha + 1$, и оно же останется независимым в новом графе. Пусть мы убираем из G' ребро uv при $v \in V$. В силу минимальности ключевого множества, в G существует независимое множество X такое, что $X \cap V = \{v\}$. Тогда $X \cup \{u\}$ — независимое множество мощности $\alpha + 1$ в $G' \setminus uv$.

2. Докажем более сильное утверждение: *Если в гиперграфе G выбрать множество вершин V такое, что каждое ребро, содержащее x , пересекается с V , то $|V| \geq \kappa(G)$.* Из него немедленно следует требуемое, ибо набрать такое множество V можно, выбрав из каждого ребра, содержащего x , по вершине.

Предположим, что нашлось такое множество V мощности, меньшей $\kappa(G)$. Тогда в G найдётся максимальное независимое множество U , не пересекающееся с V . Тогда в каждом ребре, содержащем x , найдётся вершина, отличная от x и не лежащая в U . Это означает, что множество $U \cup \{x\}$ окажется независимым в новом гиперграфе, то есть при добавлении x число независимости увеличилось.

3. Пусть u — некоторая вершина G . Добавим к G новую вершину x' ; для каждого ребра E , содержащего x , добавим ребро $E \cup \{x'\} \setminus \{x\}$, а также добавим ребро $\{x, x'\}$. Доказательство того, что эта конструкция работает, аналогично решению задачи 3.

Задача 22. Пусть при добавлении ребра U и перехода к ядру графа некоторые рёбра становятся лишними. Очевидно, что любой ключ таких рёбер содержит все вершины множества U . Назовём их U -лишними. Назовём симметризацией неустойчивого множества U расширение всех U -лишних рёбер. Заметим, что к U -лишним рёбрам при расширении добавляются все вершины множества U . Ясно, что все U -лишние рёбра так и останутся U -лишними, а ядро графа, полученного при добавлении U и стирании лишних рёбер, определено однозначно.

Теперь запустим серию правильных преобразований, в ходе которой размер рассматриваемого неустойчивого множества U нестрого возрастает, а при фиксированном $|U|$ сумма степеней вершин в графе строго убывает. На каждом шаге мы выбираем U -лишнее ребро W , содержащее хотя бы две вершины, не лежащих в U . Назовём одну из них x . Если множество $U' = U \cup \{x\}$ неустойчиво, симметризуем U' и заменим U на U' . Если же множество $U' = U \cup \{x\}$ устойчиво, сжимаем ребро W до U' . Из-за наличия полуинварианта, процесс конечен и ведёт к образованию V -элементарного графа.

Задача 23 **1.** Пусть при добавлении ребра V гиперграф распадается на части G_0 (содержит V) и другие (назовём их объединение G_1). Поскольку число независимости не изменилось, любой ключ ребра V содержит хотя бы одну вершину из W . С другой стороны, поскольку каждое из рёбер, содержащих V , в исходном графе не лишнее, для любой вершины w множества W в новом графе найдётся ключ ребра v , содержащий из множества W единственную вершину w . Поскольку исходный гиперграф связный, хотя бы одна из вершин w множества W лежит в G_1 . Поскольку часть ключа V , содержащего w и не содержащего других вершин W , лежащую в G_1 , нельзя заменить на независимое множество в G_1 такого же размера, W содержит ключевое множество в G_1 . Поскольку при удалении любого V -лишнего ребра это свойство нарушится, W является ключевым множеством в G_1 . Отсюда, в частности следует, что $W \subset G_1$ и что G_1 связно.

2. Если V состоит из одной вершины, то G_0 состоит из одной вершины с петлёй. Но поскольку множество V неустойчиво, граф G_1 несвязный, что противоречит пункту 1.

3. Поскольку W — ключевое множество в G_1 , новые рёбра не будут лишними. Пусть ребро $U \subset G$ стало лишним в G' с новой вершиной x . Пусть X — ключ ребра U в G . Если X не содержит V целиком, то X — ключ ребра U в G' . Иначе выбросим из X какую-нибудь вершину V и добавим x , получив ключ ребра U в G' . В обоих случаях, противоречие.

4. Пусть U — неустойчивое множество в графе G , а ядро графа $G \cup U$ состоит из компонент G_0 (содержащей U), $G_1, G_2, \dots, G_t$. После симметризации U , ядро графа $G \cup U$ определено однозначно. Заметим, что в процессе из задачи 22 все U -лишние рёбра остаются U -лишними, а новых U -лишних рёбер не образуется. Тогда в процессе из задачи 23 будет отделена одна из исходных компонент ядра (НУО, G_1). Ребро V будет содержать U . При $t > 1$ множество U по-прежнему будет неустойчивым, а компоненты ядра останутся теми же, за исключением G_1 . Процесс из задач 22, 23 будет продолжаться до тех пор, пока множество U не станет устойчивым.

Чтобы доказать теорему о расколе для гиперграфов при $|U| > 1$, достаточно сжать итоговое ребро V до U . Чтобы доказать теорему о расколе для гиперграфов при $|U| = 1$, достаточно добавить вершину с петлёй. Чтобы доказать теорему о расколе для графов (по вершине x), заметим, что все компоненты, кроме компоненты, содержащей x , по построению являются графами.

В оставшейся части можно выбросить x , после чего она превратится в турановский граф с ключевым числом, не превосходящим степень x . После этого, добавим вершину, соединённую простыми рёбрами с вершинами ключевого множества наименьшего размера.

Задача 24. Обозначим через H_1 одну из компонент связности гиперграфа $G \setminus \{x, y\}$, а через H_2 — объединение всех остальных. Через H_i^x, H_i^y, H_i^{xy} будем обозначать индуцированные подгиперграфы на множестве $H_i \cup \{x\}$, $H_i \cup \{y\}$ и $H_i \cup \{x, y\}$, соответственно. То, что $\{x, y\}$ — сочленение, означает, что каждое ребро лежит в одном из гиперграфов H_i^{xy} . Обозначим $\alpha_i = \alpha(H_i)$.

1. Предположим, что в G есть ребро xy (и, значит, нет других рёбер, содержащих x и y одновременно). тогда в G есть максимальное независимое множество, не содержащее x и y ; значит, $\alpha(G) = \alpha_1 + \alpha_2$.

Пусть e — ребро в H_1^x , содержащее x (оно есть!). В графе $G \setminus e$ есть независимое множество мощности $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$; оно обязано содержать x (и, значит, не содержать y), и содержать по α_i вершин из H_i . В пересечении с H_2^x оно даёт независимое множество размера $\alpha_2 + 1$. Аналогично, в графе H_1^x найдётся независимое множество мощности $\alpha_1 + 1$. Объединяя их, получим независимое множество в G мощности $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$, что невозможно. Значит, ребра xy в G нет.

З а м е ч а н и е. Похожими методами можно доказать более общее утверждение: *В турановском гиперграфе никакая клика (из рёбер мощности 2) не является сочленением.*

2. Из стандартных соображений следует, что $\alpha(G) \leq \alpha_1 + \alpha_2 + 1$, иначе можно удалить все рёбра между $H_1, H_2, \{x\}$ и $\{y\}$. Предположим, что $\alpha(G) = \alpha_1 + \alpha_2 + 1$. Тогда можно провести рассуждение, аналогичное предыдущему пункту. Выкинув из G ребро, содержащееся в H_1^{xy} и содержащее x , получаем независимое множество мощности $\alpha_1 + \alpha_2 + 2$, необходимо содержащее x, y , а также независимые множества в H_i мощностей α_i . Значит, в H_2^{xy} есть независимое множество мощности $\alpha_2 + 2$, содержащее x и y . Объединяя его с аналогичным множеством в H_1^{xy} , получаем слишком большое независимое множество в G .

Итак, $\alpha(G) = \alpha + \beta$. Скажем, что вершина x (y) *полезна для H_i* , если $\alpha(H_i^{x(y)}) > \alpha(H_i)$. Если вершина x полезна для обоих H_i , то, объединяя соответствующие независимые множества, опять получаем слишком большое независимое множество в G . Значит, каждая вершина полезна максимум для одного из H_i . С другой стороны, если, скажем, x бесполезна для H_1 , а y — для H_2 , то можно удалить все рёбра между H_1^x и H_2^y без увеличения числа независимости, что тоже невозможно. Получается, что единственный оставшийся вариант — когда x и y полезны для какого-то H_j (скажем, для H_1) и бесполезны для другого (H_2).

Пусть H_2' — граф, полученный из H_2 добавлением ребра $e = \{x, y\}$. Тогда по доказанному $\alpha(H_2') = \alpha_2$, то есть после добавления e к G становятся бесполезными все рёбра, соединяющие H_2^{xy} с H_1 . Итак, $\{x, y\}$ нестабильно.

3. Проводя рассуждения аналогичные предыдущему пункту, получаем, что $\alpha(H_i^{xy}) \geq \alpha_i + 1$, иначе можно было удалить все рёбра между H_i^{xy} и H_2 . Значит, $\alpha(H_2^{xy}) = \alpha_2 + 1$. Покажем, что и $\alpha(H_1^{xy}) = \alpha_1 + 1$. Если это не так, то это число равно $\alpha_1 + 2$, и в H_1^{xy} есть независимое множество вида $U \cup \{x, y\}$, $|U| = \alpha_1$, $U \subset H_1$. Но при выкидывании из G любого ребра f , лежащего в H_1^{xy} и содержащего x , в $G \setminus f$ найдётся независимое множество, содержащее x , мощности $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$. Оно содержит не более α_1 вершин из H_1 . Заменяя эти вершины на U , получим независимое множество в G не меньшей мощности, что невозможно. Итак, $\alpha(H_i^{xy}) = \alpha_i + 1$.

Теперь видно, как построить наше преобразование. Пусть F — множество рёбер, соединяющих H_1 с H_2^{xy} . Выкинем все эти рёбра, добавим ребро $e = \{x, y\}$ к H_2^{xy} , а к H_1 добавим вершину v и все рёбра вида $f \setminus \{x, y\} \cup \{v\}$ для $f \in F$. Обозначим новые компоненты через H_1' и H_2' очевидным образом.

Из сказанного выше легко следует, что $\alpha(H_i') = \alpha_i$ (если бы в H_1' нашлось большее независимое множество, заменив в нём v на $\{x, y\}$, мы получили бы, что $\alpha(H_1^{xy}) = \alpha_1 + 2$). Осталось проверить, что графы H_i' являются α -критическими; это легко следует из доказанного выше.

Задача 27. 1. Гиперграф, полученный в результате рекомбинации, обозначим через G' . Для гиперграфа G' выполняется неравенство $\alpha(G') \geq \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$. Действительно, пусть E_1 — ключ ребра U в гиперграфе G_1 . В гиперграфе G_2 , в силу его турановости, можно выбрать максимальное независимое множество E_2 , содержащее вершину w . Тогда множество $E_1 \cup E_2 \setminus \{w\}$ — независимое множество в гиперграфе G' мощности $\alpha(G_1) + \alpha(G_2)$.

С другой стороны, неравенство $\alpha(G') \leq \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$ тоже верно. Действительно, пусть E — максимальное независимое множество в гиперграфе G' . Если оно не содержит сразу все вершины множества U , то оно разбивается на части $E_1 = E \cap G_1$ и $E_2 = E \cap G_2$, являющиеся независимыми множествами в гиперграфах G_1 и G_2 соответственно. Если же $U \subset E$, то в части E_1 может быть $\alpha_1 + 1$ вершина, но часть E_2 может быть дополнена вершиной w до независимого множества в G_2 . Следовательно, E_2 содержит не более $\alpha_2 - 1$ вершины, и всего в E не более $\alpha_1 + \alpha_2$ вершин.

2, 3, 4. Докажем, что произвольное новое ребро V' , полученное из ребра V гиперграфа G_2 , не лишнее. То есть, построим независимое множество в гиперграфе $G \setminus V'$ мощности $\alpha(G) + 1$. Это можно сделать так. Пусть E_1 — ключ ребра U в гиперграфе G_1 . Пусть E_2 — ключ ребра V в гиперграфе G_2 . Тогда нам подходит множество $E_1 \cup E_2 \setminus w$.

Докажем теперь, что в G_1 нет лишних рёбер, то есть для любого ребра $V \neq U$ гиперграфа G_1 построим независимое множество в гиперграфе $G \setminus V$ мощности $\alpha(G) + 1$. Пусть E_1 — ключ ребра V в гиперграфе G_1 . Пусть x — вершина ребра U , не входящая в E_1 . По условию, в гиперграфе G_2 было ребро W , которое мы растянули на вершину x (и, возможно, на какие-то еще). Пусть E_2 — ключ ребра W в гиперграфе G_2 . Тогда нам подходит множество $E_1 \cup E_2 \setminus w$. Пункт 2 доказан.

Докажем теперь, что при выполнении условий 3-го или 4-го пункта гиперграф G_2 не содержит лишних рёбер, то есть для любого ребра V в гиперграфе G_2 , не содержащего вершину w , построим независимое множество в гиперграфе $G \setminus V$ мощности $\alpha(G) + 1$.

Пусть E_2 — ключ ребра V в гиперграфе G_2 . В пункте 3 возьмём за E_1 любое максимальное независимое множество в G_1 . В пункте 4 возьмём за E_1 максимальное независимое множество в G_1 , не пересекающее U (такое найдётся, если U свободно).

Итак, мы уже доказали, что при выполнении одного из условий 3, 4 рекомбинация является правильным преобразованием.

5. Теперь нужно доказать, что если в G_1, G_2 все рёбра свободные, то и в G все рёбра свободные. Пусть E_1 — максимальное независимое множество в $G_1 \setminus U$. Пусть V — произвольное ребро G_2 , содержащее w , а E_2 — максимальное независимое множество в $G_2 \setminus V$. Тогда множество $E_1 \cup E_2$ — максимальное независимое множество в G , не содержащее ребра, полученного из V . Аналогично действуем для рёбер из G_2 , не содержащих w , ключ которых не также содержит w . Если же ребро V из G_2 не содержит w , а его ключ E_2 содержит w , дополним E_2/w ключом ребра U в G_1 . Осталось разобрать случай ребра $V \neq U$ из G_1 . Ключ E_1 ребра V не содержит некоторую вершину $x \in U$. По условию, в графе G_2 было ребро W , которое мы растянули на вершину x (и, возможно, ещё что-то). Пусть E_2 — ключ ребра W в гиперграфе G_2 . Тогда нам подходит множество $E_1 \cup E_2 \setminus w$. Пункт 5 доказан.

6. Для построения двух примеров турановских гиперграфов достаточно взять гиперграф, содержащий одно ребро $A_1B_1C_1$ и клонировать одну из его вершин (A_1), получив гиперграф G_1 . Тогда вершины B_1, C_1 образуют ключевое множество. В качестве G_2 возьмём клику $A_2B_2C_2D_2$. Проведём рекомбинацию по ребру $A_1B_1C_1$ и вершине D_2 , проведя рёбра D_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 . Ребро B_2C_2 стало лишним, поскольку оно совпадает со своим ключом в G_2 и «блокирует» ключевое множество B_1, C_1 в гиперграфе G_1 , см. рис. 18.

Задача 28. Итак, у нас уже есть серия бесплатных гиперграфов из задачи 20.3. Их ассоциированный граф Турана состоит из нескольких клик на 3 вершинах и клики на 4 вершинах. Несложно убедиться, что их нельзя расколоть ни по одной вершине, следовательно, они не получают рекомбинацией. Несложно убедиться также, что все их рёбра свободны. Значит, можно

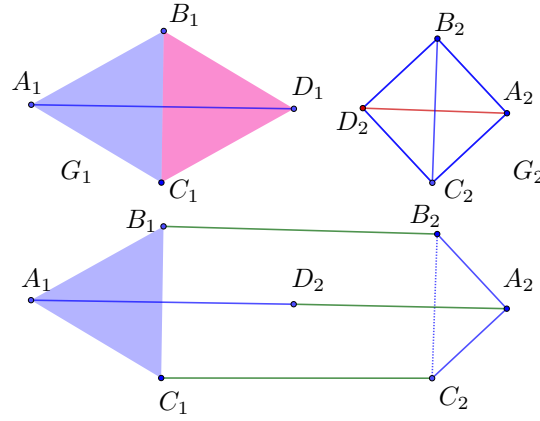


Рис. 18. Рекомбинация.

запустить произвольную рекомбинацию, получив необозримую серию бесплатных гиперграфов. Следующий шаг — превращение этой серии в серию бесплатных графов.

Избыточность ребра U мы определим как $|U| - 2$. *Избыточность* гиперграфа — суммарная избыточность его рёбер. В частности, гиперграф без петель с избыточностью 0 является графом. Назовём рекомбинацию гиперграфов G_1 и G_2 по свободному ребру U и вершине w *минимальной*, если каждая вершина U входит ровно в одно новое ребро. Заметим, что минимальная рекомбинация возможна тогда и только тогда, когда степень вершины w не превосходит $|U|$. Очевидно, что минимальная рекомбинация не меняет степени вершин.

Лемма. Пусть степень вершины w равна d . Тогда минимальная рекомбинация компонент связности G_1, G_2 турановского гиперграфа уменьшает его избыточность на $d - 2$.

Доказательство. Суммарная избыточность изменяющихся при рекомбинации рёбер G_2 увеличится на $|U| - d$, а суммарная избыточность рёбер G_1 уменьшится на $|U| - 2$ за счёт исчезновения U . Следовательно, избыточность гиперграфа уменьшится на $d - 2$, ч.т.д.

Заметим, что 3-регулярные примеры из задачи 20.3 имеют $n = 2\alpha + 2$ вершины, их избыточность равна $x = 2\alpha - 2$. Клика на 4 вершинах тоже входит в эту серию. Дизъюнктное объединение p таких частей даёт $n = 2\alpha + 2p$ и $x = 2\alpha - 2p$. Чтобы после $p - 1$ шага минимальной рекомбинации получился граф, требуется условие $x = p - 1$, следовательно, $2\alpha = 3p - 1$. При $p = 2k + 1$ получим $\alpha = 3k + 1$ и $n = 8k + 4$. Для построения подойдёт любая последовательность минимальных рекомбинаций, например, такая, как на рисунке 19.

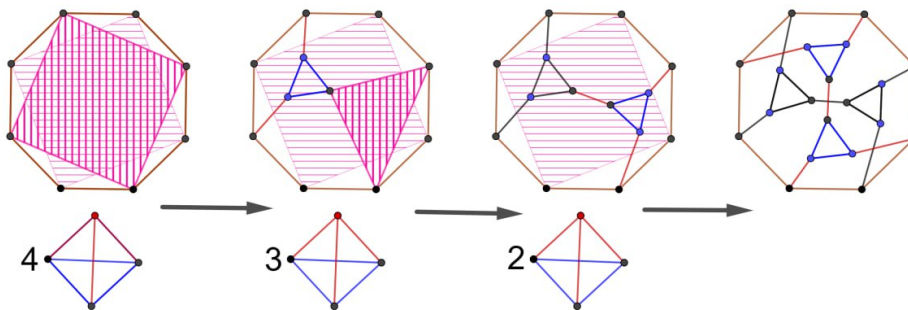


Рис. 19. Рекомбинация.

Чтобы построить примеры бесплатных графов с $n > \frac{8\alpha+4}{3}$, можно на некоторых шагах рекомбинации дополнительно расширять рёбра, увеличивая избыточность гиперграфа. Такие гиперграфы уже не будут 3-регулярными. Максимальное значение n при фиксированном α в этой серии равно $n = 3\alpha$ и достигается при рекомбинации 3-регулярного примера с $\alpha = 2, n = 6, m = 8$

и $\alpha - 2$ клик на 4 вершинах. Заметим, что ассоциированный граф Турана для всех построенных примеров состоит из клик на 3 и 4 вершинах.

Следующий «почти очевидный» шаг — обосновать трёхсвязность построенных графов и гиперграфов. Продолжение следует.