

Линейные характеристики графов

М. Дидин, А. Суворов, И. Богданов, О. Бурсиан, К. Кохась

Часть I

У нас есть граф. Следующие три числа (но не только их) будем называть его линейными характеристиками:

- (a) число вершин — n ,
- (b) число рёбер — m ,
- (c) число независимости — α (максимальный размер независимого множества).

Интересно, а какие значения они могут принимать? Можно ли по тройке (n, m, α) понять, существует такой граф или нет? Это довольно известная задача, но у неё есть интересные вариации, в том числе, недавние результаты и даже открытые проблемы.

Одно из направлений — задать этот вопрос для некоторого семейства графов, например, для планарных, или дистанционных, или графов, не содержащих определённых подграфов. Эти задачи имеют много общего, например, с задачами о хроматическом числе плоскости, проблемой Борсука и даже с упаковкой сфер. Но лучше всего вы, скорее всего, знакомы с расстановкой не бьющих друг друга фигур на клетчатой доске.

Пусть имеется клетчатая доска и некоторая фигура X . Будем считать клетки доски вершинами графа, а всевозможные ходы фигуры X — рёбрами графа. Построенный граф назовём *шахматным*. Например, для доски 2×2 и короля это полный граф K_4 , а для доски 2×2 и ладьи — цикл на 4 вершинах C_4 .

Концепция лишнего ребра

Ребро называется *лишним*, если его удаление не изменяет число независимости графа. Граф, не содержащий лишних рёбер, называется α -критическим, а любой α -критический граф, получившийся из произвольного графа G с числом независимости α последовательным выбрасыванием лишних рёбер, называется *ядром* графа G . Связный α -критический граф назовём *турановским*.

Задача 1 Найдите какое-нибудь ядро шахматного графа для:

- 1) прямоугольной доски $m \times n$ и ладьи,
- 2) доски 3×3 и ферзя,
- 3) цилиндрической доски $m \times n$ (первый столбец склеен с последним) и короля.
- 4) Фигура гепард из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске 1000×1000 ? Найдите какое-нибудь ядро шахматного графа для гепарда и этой доски. (Региональный этап, 2018, 10.8.)
- 5) Нарисуйте на клетчатой плоскости какую-нибудь связную относительно хода короля доску, на которую невозможно поставить 4 короля, не бьющих друг друга, и которую нельзя покрыть тремя клетчатыми квадратами 2×2 . Найдите ядро соответствующего шахматного графа.

- 6) Вершины графа G — это точки плоскости (x, y) , $0 < x, y < 100$, где одно из чисел x, y целое, а второе — полуцелое. (Вершину графа можно интерпретировать как лежащую на клетчатой плоскости доминошку.) Ребро соединяет две вершины, если расстояние между вершинами равно 1 (при этом полуцелые координаты должны совпадать, а целые координаты отличаются на 1), либо если расстояние между вершинами равно $\sqrt{2}/2$. Найдите число независимости и какое-нибудь ядро этого графа.

Как показывают графы задачи 1, стирание лишних рёбер в естественных конструкциях часто приводит к несвязному ядру, состоящему из нескольких клик. Поэтому возникает естественный вопрос: при каких n и α вообще существует хотя бы один турановский граф?

Задача 2

- 1) Для любого натурального α постройте турановский граф с $n = 2\alpha + 1$.
- 2*) Для турановского графа докажите неравенство $n \geq 2\alpha + 1$.

Указание. Возможно, вы не сможете сразу решить пункт 2. Но к нему можно вернуться в части II, используя более мощную технику.

Чтобы строить другие примеры, полезно уметь добавлять в граф вершины. *Клонирование вершины x* — добавление новой вершины, соединённой с x и всеми её соседями.

Задача 3

- 1) Докажите, что клонирование вершины не меняет число независимости α .
- 2) Докажите, что клонирование вершины α -критического графа оставляет его α -критическим.
- 3) Приведите пример турановского графа с заданными α и $n \geq 2\alpha + 1$.

Итак, у нас есть способ корректно добавлять вершины в граф, отслеживая их степень.

Задача 4 Какое наибольшее число вершин может иметь граф с числом независимости α , в котором

- 1) степень любой вершины не превышает k ?
- 2*) степень любой вершины не превышает k , и который не содержит клик на $k + 1$ вершине?

Задача 5 (Теорема Турана)

Пусть $k = \lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor$. Обозначим

$$T(n, \alpha) = k \cdot n - \frac{k(k+1)}{2} \alpha.$$

- 1) Докажите, что наименьшее число рёбер у графа на n вершинах с числом независимости α равно $T(n, \alpha)$.
- 2*) Докажите, что наименьшее число рёбер у СВЯЗНОГО графа на n вершинах с числом независимости α равно $T(n, \alpha) + \alpha - 1$
- 3*) Докажите, что наименьшее число рёбер у графа на n вершинах с числом независимости α и p компонентами связности равно $T(n, \alpha) + \alpha - p$
- 4*) Докажите, что наименьшее число рёбер у ТУРАНОВСКОГО графа на n вершинах с числом независимости α равно $T(n + \alpha - 1, \alpha) - \alpha + 1$.

Подсказки. Попробуйте в пункте 1) доказать оценку по индукции, сравнивая число рёбер в двух графах и на каждом шаге выбрасывая из них по вершине наибольшей степени. Чтобы решить пункты 2) и 3), полезно выбрасывать лишние рёбра, если они есть. Искать лишние рёбра поможет задача 6. Пункт 4) является довольно трудным, к его решению ведут идеи, развитые во второй и третьей части проекта.

Казалось бы, чем отличаются пункты 2) и 4)? Ситуация, когда запрет лишних рёбер усиливает какую-либо нижнюю оценку на число рёбер, поначалу кажется парадоксальной.

Задача 6 Докажите, что в турановском графе нет висячих вершин, и точек сочленения (вершин, удаление которых увеличивает число компонент связности).

Задача 7 Докажите какую-нибудь оценку снизу для числа рёбер графа, верную для задачи 5.4 и неверную для задачи 5.2. Можете ограничиться случаем $\alpha = 2$, $n = 7$.

Новая характеристика и правильные преобразования графов

Мы знаем, что ядро графа G не определено однозначно. Максимальное возможное число компонент связности ядра будем называть *ядерным числом* графа G и обозначать $p(G)$ или просто p . Обновим список линейных характеристик.

- (а) число вершин — n ,
- (б) число рёбер — m ,
- (с) число независимости — α ,
- (d) ядерное число — p .

Удивительно, но добавление четвертой характеристики помогает делать нетривиальные оценки на первые три!

Чтобы доказывать оценки снизу на число рёбер в α -критическом графе (в первую очередь, в задаче 5.4) и строить примеры таких графов, нам потребуются различные преобразования графов — добавления/удаления вершин, сохраняющие нужные нам характеристики. Добавлять вершины мы уже умеем. Теперь попробуем научиться корректно удалять вершины из графа. Вершина x α -критического графа G называется *стабильной*, если ядерное число графа $G \setminus x$ равно ядерному числу G . (Через $G \setminus x$ обозначен граф, получающийся из графа G удалением вершины x и всех выходящих из нее рёбер.)

Задача 8 Пусть в турановском графе G с $\alpha > 1$ все вершины стабильны.

- 1) Пусть граф G не является регулярным. Как построить турановский граф с такими же n , α и меньшим числом рёбер?
- 2) Пусть граф G регулярный. Как построить нерегулярный турановский граф с такими же n , α и не большим числом рёбер?

Итак, решение задачи 8 позволяет преобразовывать графы со стабильными вершинами, сохраняя n , α , p и не увеличивая число рёбер m . Но что делать, если мы хотим удалить вершину графа, а она оказалась нестабильной? Назовём преобразование α -критического графа *правильным*, если при некотором $t \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие четыре условия.

- 1) Число независимости сохраняется.
- 2) Граф остаётся α -критическим.
- 3) Число вершин n и число компонент связности p становятся равны соответственно $n + t$ и $p + t$.
- 4) Число рёбер у преобразованного графа не больше $m + t$.

Например, преобразования из предыдущей задачи являются правильными с $t = 0$.

Задача 9 Придумайте правильное преобразование с $t = -1$, работающее для графа, состоящего из двух компонент связности G_1 и G_2 , каждая из которых содержит не менее трех вершин, где

- 1) G_1 и G_2 — клики (например, постройте два разных турановских графа с $n = 8$, $\alpha = 2$, $m = 15$ из клики на 4 вершинах и клики на 5 вершинах);
- 2) G_1 — турановский граф, G_2 — клика;
- 3) G_1 и G_2 — турановские графы.

Правильное преобразование с $t > 0$ мы назовём *расколом*.

Теорема 1 (Теорема о расколе). Пусть x — нестабильная вершина турановского графа G . Тогда к каждой компоненте связности ядра графа $G \setminus x$ можно добавить по вершине, чтобы получилось правильное преобразование графа G .

Теорема 2 (Основная теорема). Пусть G — произвольный α -критический граф. Тогда существует правильное преобразование, переводящее G в дизъюнктное объединение клик.

Определение. Ассоциированный граф Турана для α -критического графа G на n вершинах с числом независимости α и p компонентами связности — дизъюнктное объединение α клик, содержащих в совокупности ровно $n + \alpha - p$ вершин и по размеру отличающихся не более чем на 1.

Заметим, что основная теорема позволяет перевести любой турановский граф в его ассоциированный граф Турана правильным преобразованием. С другой стороны, многократно применённое преобразование из задачи 9 — это правильное преобразование, переводящее дизъюнктное объединение клик, содержащих не менее 3 вершин каждая, в турановский граф. Назовём турановский граф, полученный таким способом, *тривиальным*. Итак, оценка на число рёбер

$$m \geq T(n + \alpha - p, \alpha) - \alpha + p,$$

вытекающая из основной теоремы, точная. Например, она обращается в равенство на тривиальных графах, полученных серией преобразований из задачи 9 из дизъюнктного объединения клик, отличающихся по размеру не более чем на 1. Назовём α -критический граф с минимально возможным при заданных n, p, α числом рёбер $m = T(n + \alpha - p, \alpha) - \alpha + p$ *бесплатным*.

Задача 10

- 1) Нарисуйте 4 различных тривиальных турановских графа с $n = 10, \alpha = 3, m = 16$.
- 2*) В каком случае серию преобразований из задачи 9.3 можно проводить в произвольном порядке?
- 3**) Придумайте удобную классификацию тривиальных турановских графов с заданными n и α .

Задача 11 Выведите основную теорему из теоремы о расколе.

Теорема 3 (О бесплатных графах). Пусть G — нетривиальный бесплатный граф. Тогда его ассоциированный граф Турана содержит компоненту связности из 3 вершин.

Задача 12 На плоскости отметили 4α точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $\alpha + 1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком.

- 1) Докажите, что всего проведено не менее 7α отрезков. (А. М. Райгородский, ММО 2010, 10.6)
- 2) Улучшите оценку до 7.5α отрезков.
- 3) Пусть количество точек равно n , а число отрезков равно m . Докажите оценку $m \geq 5n - 12\alpha$.

Указание. Можно использовать без доказательства основную теорему и теорему о расколе. Если оценка из п.3 показалась слишком простой, и возникло желание её существенно усилить (например, до 9α), будут выданы дополнительные задачи на эту тему. В них поможет теорема о бесплатных графах. На этом часть I закончена. Далее вы можете приступить на выбор либо к части II, либо к части III. Обе части приводят к доказательству теоремы о расколе, но содержат и другие результаты. Часть III также ведёт к доказательству теоремы о бесплатных графах.