

Диофантовы уравнения

Проект подготовили и представляют:

Е. Веретенников, И. Климанова, П. Козлов, А. Мирошников.

Аннотация

В этом проекте мы познакомим вас с некоторыми замечательными задачами из теории диофантовых уравнений. Он состоит из нескольких разделов, и мы рекомендуем решать задачи в том порядке, в котором они представлены.

Мы предполагаем, что вы уже знакомы со структурой решений классического уравнения Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$. Более интересный вопрос о структуре решений уравнения $x^2 - Dy^2 = n$ рассматривается в разделе 1. Теория цепных дробей помогает описать эти решения при малых по модулю значениях n . Вдобавок мы предложим малоизвестный метод, который позволяет за конечное количество итераций свести уравнение $x^2 - Dy^2 = n$ к другому уравнению $t^2 - Du^2 = m$ с m малым по модулю.

Раздел 2 посвящен некоторым специальным случаям уравнений $x^4 - Dy^2 = 1$ и $x^2 - Dy^4 = 1$. В процессе решения задач из этого раздела понадобится изучить структуру решений некоторых конкретных уравнений $x^2 - Dy^2 = n$ с n малым по модулю. Понимание этой структуры будет также полезно для многих других задач.

В разделе 3 мы установим связь между давним вопросом о существовании диофантовых четвёрок и количеством классов решений уравнения $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$.

1 Уравнения вида $x^2 - Dy^2 = n$

Пусть α — иррациональное число. Представим α в виде бесконечной цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots]$. Цепная дробь, образованная из $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ путем удаления всех членов после определенного выбранного места, называется *подходящей* для α . Подходящая цепная дробь $[a_0, \dots, a_k]$ может быть записана в виде обычной дроби со взаимно простыми числителем p_k и знаменателем q_k . Также обозначим бесконечную цепную дробь $[a_k, a_{k+1}, \dots]$ через α_k .

Свойства подходящих дробей:

а) $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$, $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$;

б) $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}$, $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k$;

в) p_{2k}/q_{2k} — возрастающая последовательность, p_{2k-1}/q_{2k-1} — убывающая последовательность;

г) $\alpha = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}$.

Задача 1.1. а) Докажите равенства:

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}, p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k.$$

б) Докажите неравенства:

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} < |q_k \alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

в) Докажите, что последовательность $\{|q_k\alpha - p_k|\}_{k=0}^{\infty}$ является строго убывающей.

Задача 1.2. Докажите, что одна из двух последовательных подходящих дробей к α удовлетворяет неравенству:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}.$$

Задача 1.3. Докажите, что одна из трёх подряд идущих цепных дробей к α удовлетворяет неравенству:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}.$$

Задача 1.4. Натуральное k и целые p, q таковы, что $q > 0$ и

$$|q\alpha - p| < |q_k\alpha - p_k|.$$

а) Докажите, что существуют u, v такие, что

$$p_k u + p_{k+1} v = p, \quad q_k u + q_{k+1} v = q.$$

б) Докажите, что $q \geq q_{k+1}$.

При помощи предыдущей задачи можно показать, что подходящие дроби являются в определённом смысле «наилучшими» приближениями к α .

Задача 1.5. Если a/b — рациональная дробь такая, что

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2},$$

то она является подходящей дробью к α .

Далее везде считаем, что D — бесквадратное натуральное число.

Задача 1.6. Известно, что при некотором целом n таком, что $|n| < \sqrt{D}$, уравнение $x^2 - Dy^2 = n$ имеет положительное решение (x_0, y_0) в целых числах. Докажите, что дробь x_0/y_0 является подходящей к $\sqrt{D}$, если

- а) n положительное;
- б) n отрицательное.

Определение. Назовём иррациональное число, являющееся корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, *квадратичной иррациональностью*.

Бесконечная цепная дробь называется *периодической*, если она представляется в виде $[a_0; a_1, \dots, a_l, \overline{b_1, \dots, b_m}]$. Если же она представляется в виде $[\overline{b_1, \dots, b_m}]$, назовём её *чисто периодической*. Наименьшее натуральное число m , удовлетворяющее этому соотношению, называется *периодом* разложения.

Задача 1.7. а) Пусть α — квадратичная иррациональность, а числа a, b, c, d рациональны, причём c, d одновременно не равны нулю. Докажите, что число

$$\beta = \frac{a + b\alpha}{c + d\alpha}$$

либо рационально, либо является квадратичной иррациональностью.

б) Докажите, что если число представляется в виде бесконечной периодической цепной дроби, то оно является квадратичной иррациональностью.

Обратное утверждение также верно.

Задача 1.8. а) Пусть α — действительный иррациональный корень уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

с целыми a, b, c и ненулевым a . Докажите, что α_{k+1} является корнем уравнения

$$A_k x^2 + B_k x + C_k = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= ap_k^2 + bp_k q_k + cq_k^2, \\ B_k &= 2ap_k p_{k-1} + b(p_k q_{k-1} + p_{k-1} q_k) + 2cq_k q_{k-1}, \\ C_k &= ap_{k-1}^2 + bp_{k-1} q_{k-1} + cq_{k-1}^2 \end{aligned}$$

и

$$B_k^2 - 4A_k C_k = b^2 - 4ac.$$

б) Докажите, что числа $|A_k|, |B_k|, |C_k|$ ограничены константой, не зависящей от k .

в) Докажите, что каждая квадратичная иррациональность имеет представление в виде бесконечной периодической цепной дроби.

Определение. Пусть $\alpha = a + b\sqrt{D}$, где a, b рациональны, а $\sqrt{D}$ иррационально. Число $\alpha' = a - b\sqrt{D}$ назовём *сопряжённым* к α .

Задача 1.9. Пусть α — квадратичная иррациональность.

а) Докажите, что если α представляется в виде чисто периодической цепной дроби, то $\alpha > 1$ и $-1 < \alpha' < 0$.

б) Докажите, что если $\alpha > 1$ и $-1 < \alpha' < 0$, то α представляется в виде чисто периодической цепной дроби.

Задача 1.10. Представим $\sqrt{D}$ в виде цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \alpha_{k+1}]$.

а) Докажите, что α_k имеет чисто периодическое представление при всех натуральных k .

б) Докажите, что для любого k существуют натуральные b_k, c_k такие, что

$$\alpha_{k+1} = \frac{b_k + \sqrt{D}}{c_k},$$

причём

$$p_k^2 - Dq_k^2 = (-1)^{k+1}c_k.$$

Из предыдущей задачи следует, что последовательность $p_k^2 - Dq_k^2$ периодична, причём её период равен или в два раза больше периода цепной дроби для $\sqrt{D}$. Этот факт вкуче с результатом Задачи 1.6 позволяет для каждого D полностью описать решения уравнения $x^2 - Dy^2 = n$ в случае $|n| < \sqrt{D}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только те решения уравнения $x^2 - Dy^2 = n$, для которых $x + y\sqrt{D} > 0$. Очевидно, что мы ничего не упустим, так как если пара (x, y) является решением, то и пара $(-x, -y)$ тоже.

Заметим, что если уравнение $x^2 - Dy^2 = n$ имеет хотя бы одно решение (x_0, y_0) , то оно имеет бесконечное количество решений (x_k, y_k) , задаваемых следующим способом:

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})(s + t\sqrt{D})^k,$$

где (s, t) — минимальное решение соответствующего уравнения Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$.

Определение. Скажем, что два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) уравнения

$$x^2 - Dy^2 = n$$

принадлежат одному классу, если существует целое k такое, что

$$x_2 + y_2\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})(s + t\sqrt{D})^k,$$

где (s, t) — минимальное решение соответствующего уравнения Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$.

В каждом классе существует решение (x, y) такое, что

$$1 < x + y\sqrt{D} \leq s + t\sqrt{D}.$$

Назовём это решение *минимальным* в этом классе.

Задача 1.11. Определите, сколько классов решений имеет уравнение

$$x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 2$$

при каждом целом $m > 1$.

Определение. Решение (x_0, y_0) уравнения $x^2 - Dy^2 = n$ назовём *примитивным*, если x_0 и y_0 взаимно просты.

Очевидно, что достаточно исследовать только примитивные решения, потому что если $\text{НОД}(x_0, y_0) = d > 1$, то $(x_0/d, y_0/d)$ – примитивное решение уравнения

$$x^2 - Dy^2 = \frac{n}{d^2}.$$

Задача 1.12. Если (x_0, y_0) – примитивное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = n$, то существует целое k такое, что

$$x_0 \equiv ky_0 \pmod{n}$$

и

$$k^2 \equiv D \pmod{n}.$$

Из предыдущей задачи следует, что если D – квадратичный невычет по модулю n , то уравнение $x^2 - Dy^2 = n$ не имеет примитивных решений.

Определение. Будем считать, что примитивное решение (x_0, y_0) уравнения

$$x^2 - Dy^2 = n$$

покрашено в цвет k , если

$$x_0 \equiv ky_0 \pmod{n}$$

и

$$k^2 \equiv D \pmod{n}.$$

Задача 1.13. Докажите, что два примитивных решения уравнения $x^2 - Dy^2 = n$ принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они покрашены в один цвет по модулю n .

Из результата предыдущей задачи следует, что существует конечное количество классов решений уравнения $x^2 - Dy^2 = n$.

Возьмём решение (x_0, y_0) цвета k уравнения $x^2 - Dy^2 = n$. Из определения следует, что существуют целые u_0, m такие, что

$$x_0 = y_0 k - u_0 n, \quad D = k^2 - mn.$$

Задача 1.14. Докажите, что существует целое t_0 такое, что (t_0, u_0) является решением цвета $\pm k$ уравнения $t^2 - Du^2 = m$. Выразите x_0, y_0 через t_0, u_0 .

Число m из предыдущей задачи зависит от k . Заметим, что выбор числа k не фиксирован, фиксирован лишь его остаток по модулю n .

Задача 1.15. Докажите, что если $|n| > \sqrt{D}$, то число m может быть выбрано так, чтобы выполнялось неравенство

$$|m| \leq \max\{\sqrt{D}, |n|/4\}.$$

Последовательно применяя метод, описанный в двух предыдущих задачах, в какой-то момент мы сведём исходное уравнение $x^2 - Dy^2 = n$ к конечному числу уравнений вида $t'^2 - Du'^2 = m'$, где $|m'| < \sqrt{D}$, которые, как уже известно, могут иметь только такие решения, которые получаются из числителей и знаменателей подходящих дробей для $\sqrt{D}$. Внимание: при применении метода на каждом шаге могут выбираться различные цвета k .

Задача 1.16. Найдите все классы решений следующих уравнений:

а) $x^2 - 82y^2 = 23$;

б) $x^2 - 23y^2 = 41$.

Задача 1.17. Докажите, что уравнение $x^2 - 229y^2 = 3$

а) не имеет целых решений;

б) имеет решение по модулю каждого простого p .

2 Об уравнениях вида $x^4 - Dy^2 = 1$ и $x^2 - Dy^4 = 1$

Для решения задач из этого параграфа полезно решить задачи из первого раздела, но не обязательно. Для понимания формулировок некоторых задач необходимо ознакомиться с определениями «класса решений» и «минимального решения в классе решений» уравнения $x^2 - Dy^2 = n$ из первого раздела (перед задачей 1.11).

Определение. Предположим, что уравнение $x^2 - Dy^2 = n$ имеет только один класс решений. Скажем, что число $\alpha = u + v\sqrt{D} > 0$ задаёт фундаментальное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = n$, если (u, v) — минимальное решение в этом классе.

Задача 2.1. Докажите, что если $x^2 - Dy^2 = -1$ имеет решение, то оно имеет ровно один класс решений. Докажите, что если $\alpha = u + v\sqrt{D}$ задаёт фундаментальное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = -1$, то фундаментальное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = 1$ задаётся числом $\beta = \alpha^2$.

Задача 2.2. Пусть (u, v) — минимальное решение уравнения Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$. Докажите, что уравнение $x^2 - Dy^2 = -1$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$u \equiv -1 \pmod{2D}.$$

Задача 2.3. а) Пусть $m, n > 1$ — натуральные числа такие, что mn не является точным квадратом, а уравнение $mx^2 - ny^2 = 1$ имеет решение. Пусть (u, v) — минимальное положительное решение этого уравнения. Докажите, что фундаментальное решение уравнения $x^2 - mny^2 = 1$ задаётся числом $\gamma = \alpha^2$, где $\alpha = u\sqrt{m} + v\sqrt{n}$.

б) Опишите все решения уравнения $ax^2 - (a-1)y^2 = 1$ для каждого целого $a > 1$.

Задача 2.4. Предположим, что фундаментальное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = -4$ задаётся числом $2\alpha = a + b\sqrt{D}$, где a и b нечётны. Определите, какие числа задают фундаментальные решения следующих уравнений:

$$x^2 - Dy^2 = 4, \quad x^2 - Dy^2 = -1, \quad x^2 - Dy^2 = 1.$$

Задача 2.5. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в натуральных числах: а) $x^4 - 8z^4 = 1$; б) $x^2 - 2y^4 = 1$.

Отсутствие целых решений у некоторых уравнений, предложенных дальше, можно доказывать при помощи метода *бесконечного спуска*. Он заключается в следующем: пусть P — некоторое свойство, которым все натуральные числа могут либо обладать, либо нет. Предположим, что мы умеем доказывать, что если натуральное n_0 обладает свойством P , то существует меньшее натуральное n_1 , также этим свойством обладающее. Если мы применим подобный аргумент к числу n_1 , то найдём число $n_2 < n_1$, обладающее свойством P . Если существует хоть одно натуральное число, обладающее свойством P , то процесс может быть повторён бесконечное количество раз. Это противоречит тому, что не существует бесконечно убывающей последовательности из натуральных чисел; следовательно, не существует ни одного натурального числа, удовлетворяющего свойству P .

Задача 2.6. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в натуральных числах: а) $x^4 + y^4 = z^2$; б) $x^4 - 2y^2 = 1$; в) $x^4 + y^2 = z^4$; г) $x^4 - 2y^2 = -1$ за исключением $(x, y) = (1, 1)$.

Задача 2.7. Найдите все решения следующих уравнений в натуральных числах:

а) $x^2 = 8t^4 - 8t^2 + 1$; б) $x^2 = 2t^4 + 4t^2 + 1$.

Рассмотрим уравнение $x^4 - 6y^2 = 1$. Минимальным решением уравнения Пелля $x^2 - 6y^2 = 1$ является пара $(5, 2)$, поэтому все решения (u_k, v_k) этого уравнения описываются следующей формулой:

$$u_k + v_k\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^k.$$

В частности,

$$u_k = \frac{1}{2} \left((5 + 2\sqrt{6})^k + (5 - 2\sqrt{6})^k \right).$$

Таким образом, если уравнение $x^4 - 6y^2 = 1$ имеет решение в натуральных числах, то $x^2 = u_k$ для некоторого натурального k .

Задача 2.8.

- а) Докажите, что k чётно.
- б) Выразите u_{2l} как многочлен от u_l .
- в) Докажите, что k не делится на 4.
- г) Докажите, что число $u_{2l+1} - 1$ является точным квадратом.
- д) Найдите все решения уравнения $x^4 - 6y^2 = 1$ в натуральных числах.

Задача 2.9. а) Докажите, что если уравнение $x^2 - Dy^2 = 2$ имеет решение, то оно имеет ровно один класс решений. Докажите, что если число $\alpha = u + v\sqrt{D}$ задаёт фундаментальное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = 2$, то фундаментальное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = 1$ задаётся числом $\beta = \alpha^2/2$.

- б) Докажите, что уравнение $x^2 + 1 = 2(t^2 - 1)^2$ не имеет решений в целых числах.
- в) Докажите, что если уравнение $x^2 - Dy^2 = 2$ имеет решение, то уравнение $x^4 - Dy^2 = 1$ не имеет решений в натуральных числах.

Задача 2.10. Докажите, что если уравнение $x^2 - Dy^2 = -2$ имеет решение, то уравнение $x^4 - Dy^2 = 1$ не имеет решений в натуральных числах за исключением случая $D = 6$.

Примечание: Из решений Задач 2.9 и 2.10 следует, что уравнения $x^2 - Dy^2 = -2$ и $a^2 - Db^2 = 2$ не могут одновременно иметь целочисленные решения, кроме случая $D = 2$. Докажем это рассуждением от противного. Пусть некоторые решения существуют. Возьмем фундаментальные решения α и β этих уравнений соответственно. Тогда $\alpha^2/2$ и $\beta^2/2$ равны как фундаментальные решения уравнения Пелля. Отсюда следует, что $\alpha = \beta$, что неверно.

3 О диофантовых множествах и уравнениях вида $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$

Определение. Рассмотрим целое число n . Множество из m различных натуральных чисел называется *диофантовым m -множеством со свойством $D(n)$* или, проще говоря, $D(n)$ - m -множеством, если произведение любых двух элементов множества, увеличенное на n , является точным квадратом.

В задачах ниже будут часто рассматриваться множества с определённым количеством элементов, поэтому для простоты, например, $D(n)$ - 3-множества мы будем называть $D(n)$ -тройками, $D(n)$ - 4-множества — $D(n)$ -четвёрками и т.д.

Задача 3.1. Докажите, что не существует $D(n)$ -четвёрок ни при каком $n \equiv 2 \pmod{4}$.

В случае $n = 1$ проблема существования диофантовых m -множеств впервые была затронута Диофантом; он нашёл множество $\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}\}$ с подобным свойством, состоящее, правда, из рациональных чисел. Первая $D(1)$ -четвёрка, а именно множество $\{1, 3, 8, 120\}$, было найдено Ферма. Считается, что не существует $D(1)$ -пятёрок, но пока никто это утверждение доказать не смог. Недавно Дуелла доказал, что не существует $D(1)$ -шестёрок и существует лишь конечное количество $D(1)$ -пятёрок.

Задача 3.2. Докажите, что любую $D(1)$ -двойку можно расширить до $D(1)$ -тройки.

Задача 3.3. Покажем, что любую $D(1)$ -тройку $\{a, b, c\}$ можно расширить:

а) Докажите, что квадратное уравнение

$$t^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ta + tb + tc + ab + bc + ca) - 4abct - 4 = 0$$

относительно t имеет по крайней мере одно натуральное решение t_0 .

б) Докажите, что множество $\{a, b, c, t_0\}$ является $D(1)$ -четвёркой.

В 1969 году Бэйкер и Дэвенпорт доказали, что $D(1)$ -четвёрку Ферма $\{1, 3, 8, 120\}$ нельзя расширить до $D(1)$ -пятерки.

По определению, для $D(1)$ -тройки $\{a, b, c\}$ существуют натуральные u, v, w такие, что

$$ab + 1 = w^2, \quad bc + 1 = u^2, \quad ca + 1 = v^2.$$

Так как

$$bv^2 - au^2 = b(ac + 1) - a(bc + 1) = b - a,$$

то уравнение $bx^2 - ay^2 = b - a$ имеет натуральное решение (v, u) . Заметим также, что $(w, 1)$ является решением уравнения Пелля $x^2 - aby^2 = 1$. Пусть $\alpha = v\sqrt{b} + u\sqrt{a}$ и $\beta = w + \sqrt{ab}$.

Задача 3.4. а) Докажите, что для любого целого l число $\alpha\beta^l$ имеет вид

$$v_l\sqrt{b} + u_l\sqrt{a},$$

где (v_l, u_l) — целое решение уравнения $bx^2 - ay^2 = b - a$.

б) Докажите, что если $c \geq |b - a|$, то $u_{-1}, v_{-1} > 0$.

в) Докажите, что существует неотрицательное целое c' такое, что

$$bc' + 1 = u_{-1}^2, \quad ac' + 1 = v_{-1}^2.$$

г) Докажите, что любую $D(1)$ -двойку $\{a_1, a_2\}$ можно единственным образом расширить до $D(1)$ -тройки $\{a_1, a_2, a_3\}$ с условием

$$\max\{a_1, a_2\} < a_3 < 4a_1a_2.$$

Задача 3.5. а) Докажите, что существует бесконечно много арифметических прогрессий длины 3, которые являются $D(1)$ -тройками.

б) Докажите, что не существует $D(1)$ -четвёрок, которые образуют арифметическую прогрессию длины 4.

Интересно рассмотреть также случай $n = -1$. Несложно привести некоторые примеры $D(-1)$ -троек, например, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 5, 10\}$, $\{1, 26, 37\}$.

Задача 3.6. а) Докажите, что любая $D(-1)$ -двойка $\{a_1, a_2\}$ может быть расширена до $D(-1)$ -тройки $\{a_1, a_2, a_3\}$.

б) Докажите, что это можно сделать единственным образом с условием

$$\max\{a_1, a_2\} < a_3 \leq 3a_1a_2.$$

Различными исследователями было доказано, что некоторые $D(-1)$ -тройки, например, $\{1, 2, 5\}$, нельзя расширить до $D(-1)$ -четвёрок. Более того, Дуелла и Браун доказали, что существуют целые семейства $D(-1)$ -троек, которые не могут быть расширены до $D(-1)$ -четвёрок.

Задача 3.7. Докажите, что $D(-1)$ -тройка $\{n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1, (2n + 1)^2 + 4\}$ не может быть расширена до $D(-1)$ -четвёрки, если

а) $n \equiv 1 \pmod{4}$;

б) $n \equiv 2 \pmod{4}$;

в) $n = 4$.

Рассмотрим $D(-1)$ -тройку $\{a, b, c\}$, для неё существуют целые неотрицательные r, s, t такие, что

$$ab - 1 = r^2, \quad ac - 1 = s^2, \quad bc - 1 = t^2.$$

Предположим, что существует натуральное d , которое продолжает эту $D(-1)$ -тройку до $D(-1)$ -четвёрки. Тогда

$$ad - 1 = x'^2, \quad bd - 1 = y'^2, \quad cd - 1 = z'^2$$

при некоторых неотрицательных целых x', y', z' .

Исключая d из предыдущих равенств, получим, что x', y', z' являются решением следующей системы уравнений:

$$ay^2 - bx^2 = b - a,$$

$$az^2 - cx^2 = c - a,$$

$$bz^2 - cy^2 = c - b.$$

Задача 3.8. Пусть дана $D(-1)$ -четвёрка $\{a, b, c, d\}$, где $2 \leq a < b < c < d$.

а) Докажите, что существуют целые решения (z_0, x_0) и (z_1, y_1) уравнений

$$az^2 - cx^2 = c - a \quad \text{и} \quad bz^2 - cy^2 = c - b$$

соответственно такие, что

$$|x_0| < s, \quad 0 < z_0 < c,$$

$$|y_1| < t, \quad 0 < z_1 < c,$$

$$z'\sqrt{a} + x'\sqrt{c} = (z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c})(s + \sqrt{ac})^{2m},$$

$$z'\sqrt{b} + y'\sqrt{c} = (z_1\sqrt{b} + y_1\sqrt{c})(t + \sqrt{bc})^{2n}$$

для некоторых целых неотрицательных m, n .

б) Докажите, что $z_0 = z_1$.

в) Докажите, что существует натуральное $d_0 < c$ такое, что $\{a, b, c, d_0\}$ является $D(-1)$ -четвёркой.

При помощи предыдущей задачи несложно выясняется методом спуска, что из любой $D(-1)$ -четвёрки за конечное количество итераций можно получить другую $D(-1)$ -четвёрку, которая содержит 1.

Оказывается, что существование $D(-1)$ -четвёрок непосредственно связано с числом классов решений уравнения $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$.

Задача 3.9. а) Докажите, что для любого целого $k > 1$ каждый класс решений уравнения $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ содержит ровно одно решение (x_0, y_0) такое, что $|y_0| < k$.

б) Докажите, что это уравнение имеет по крайней мере три класса решений.

Определение. Назовём решение (x_0, y_0) уравнения $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ *исключительным*, если выполняются неравенства $x_0 > 0$ и $0 < y_0 < k - 1$.

Задача 3.10. Рассмотрим $D(-1)$ -четвёрку $\{1, a, b, c\}$. Докажите, что существует целое $k > 1$ такое, что уравнение $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ имеет по крайней мере два исключительных решения (или, что то же самое, более 5 классов решений).

Задача 3.11. Докажите, что уравнение

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$$

а) не имеет исключительных решений, если $k^2 + 1$ простое число;

б) не имеет исключительных решений при $k = p^i$, где p — нечётное простое, а i — натуральное число;

в) имеет не более одного исключительного решения при $k = pq$, где p, q — различные нечётные простые числа;

г) имеет не более одного исключительного решения при $k = p^i q^j$, где p, q — различные нечётные простые, i, j — натуральные числа.

Задача 3.12. Существует ли целое $k > 1$ такое, что уравнение

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$$

имеет хотя бы два исключительных решения?

Благодарности.

Авторы проекта благодарят Б. Френкина и М. Суркова за полезные комментарии, которые помогли улучшить качество изложения материала.

Список литературы.

1. J. E. Shockley, Introduction to Number Theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York-Toronto, Ont.-London (1967).
2. M. Waldschmidt, Continued fractions, Ecole de recherche CIMPA-Oujda, Théorie des Nombres et ses Applications, 18 - 29 mai 2015: Oujda (Maroc).
3. JHE Cohn, The Diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$, Quart. J. Math. Oxford (2) 26 pp. 279-281 (1975).
4. JHE Cohn, Some quartic Diophantine equations, Pacific J. Math. 26(2): 233-243 (1968).
5. A. Dujella, On the size of Diophantine m-tuples. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 132, pp. 23-33 (2002).
6. E. Brown, Sets in which $xy + k$ is always a square. Math. Comp. 45, pp. 613-620 (1985).
7. B. W. Jones, A second variation on a problem of Diophantus and Davenport, Fibonacci Quart. 16 pp. 155-165(1978).
8. A. Dujella, C. Fuchs, Complete solution of a problem of Diophantus and Euler. J. London Math. Soc. 71, pp. 33-52 (2005).
9. K. Matthews, J. Robertson, J. White, On a diophantine equation of Andrej Dujella, Math. Glasnik, 48, number 2, pp. 265-289 (2013).
10. A. Srinivasan, D(-1) quadruples and products of two primes, Glas. Mat. Ser. III 50, pp. 261-268 (2015).
11. M. Le, A. Srinivasan, Note on Dujella's unicity conjecture, Glas. Mat. Vol. 58(78), pp. 59 - 65 (2023).
12. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1186131p5767378>
13. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h577945p3408321>
14. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1849278p12466367>

15. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h2183565p16353210>
16. <https://artofproblemsolving.com/community/c146h150369p849188>
17. <https://artofproblemsolving.com/community/c146t383f146h150370>
18. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h553573p3216004>