

# КВАДРАТУРА КРУГА

А.Я.КАНЕЛЬ-БЕЛОВ, И.ИВАНОВ-ПОГОДАЕВ, Ф.НИЛОВ, А.ОНОПРИЕНКО, А.САДОВНИЧИЙ, М.ГОЛАФШАН

## Серия F. Третья проблема Гильберта.

### Немного стереометрии.

**F1.** Докажите, что градусная мера двугранного угла правильного тетраэдра иррациональна.

**F2.** Можно ли замостить пространство

а) правильными тетраэдрами;

б) правильными октаэдрами;

в) правильными тетраэдрами и правильными октаэдрами вместе;

г) усеченными правильными октаэдрами?

**F3.** Правильный тетраэдр разрешено отражать относительно любой из его граней и повторять эту процедуру. Докажите, что множество его положений всюду плотно.

**F4.** Предположим, из некоторого набора многогранников (без ограничения общности их можно считать выпуклыми, кстати почему?) можно собрать как куб, так и правильный тетраэдр. Поместим в вершины липкую красную краску. Соберём куб, потом тетраэдр, потом куб, потом тетраэдр и т.д. Пусть процесс размножения красных точек остановится. Получите противоречие в этом случае.

**F5.** Пусть после сборки куба-тетраэдра-куба-тетраэдра красная краска высохнет и не сможет размножаться. Предположим, что на каждом отрезке с красными концами и без красных внутренних точек можно так расставить синие точки, что на примыкающих отрезках к ребру внутри куба или тетраэдра или на его границе одинаковое число синих точек. Получите противоречие в этом случае.

**F6.** Докажите, что искомая расстановка синих точек существует.

### Линейные функции.

**F7.** Числовая функция  $f$  называется *линейной*, если для любых  $x, y$  из области определения  $f$  выполнено условие  $f(x) + f(y) = f(x + y)$  (это условие, в частности, означает, что  $x + y$  также лежит в области определения  $f$ ).

а) Пусть  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  — линейная функция. Докажите, что существует  $k \in \mathbb{R}$ , что  $f(x) = kx$ .

б) Приведите пример линейной (числовой) функции  $f$ , которая не имеет вида  $f(x) = kx$  ни для какого  $k \in \mathbb{R}$ .

Определим понятие *псевдообъёма многогранника  $M$  (инварианта Дена)* как функцию

$$f(M) = \sum_i l_i \varphi(\alpha_i),$$

где  $l_i$  — длина  $i$ -го ребра,  $\alpha_i$  — двугранный угол при  $i$ -ом ребре,  $\varphi$  — числовая функция.

**F8.** Пусть многогранник  $M$  разрезан на многогранники  $M_1$  и  $M_2$ . Каким свойствам должна удовлетворять функция  $\varphi$ , чтобы гарантировать выполнение условия  $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$ ?

**F9.** а) Докажите, что если многогранники равносоставлены, то их псевдообъёмы совпадают.

б) Докажите, что куб и правильный тетраэдр не равносоставлены.

в)\* Какими должны быть необходимые и достаточные условия, чтобы два многогранника были равносоставлены?