

КВАДРАТУРА КРУГА

М. Голафшан, А. Я. Канель-Белов, И. Иванов-Погодаев, Ф. Нилов, А. Оноприенко, А. Садовничий

Серия Е: Задача ЦС

- Централно-симметричное выпуклое тело (фигура) разбито на два конгруэнтных множества. Доказать, что его/её центр лежит на их общей границе.

При этом *граница* частей будет считаться состоящей из участков прямых и окружностей (плоскостей и сфер в пространственном случае). Для многогранников граница будет считаться состоящей из участков плоскости.

Выражение фигура (тело) разбита (-о) на части можно понимать по-разному. Во-первых, можно считать, что пересечение частей пусто (т. е. у них нет общих точек).

Е₁. На плоскости дано (возможно, невыпуклое) множество A . Множество B есть результат некоторого движения множества A . Может ли так быть, что объединение A и B есть центрально-симметричное (возможно, невыпуклое) множество, содержащее свой центр симметрии, а пересечение множеств A и B пусто?

Е₂. На плоскости дано множество A . Множество B есть результат некоторого движения множества A . Оказалось, что объединение A и B есть плоский прямоугольник (т. е. не ломаная, а контур вместе с внутренностью). Может ли при этом центр прямоугольника принадлежать A , но не принадлежать B ?

- Во-вторых, можно допускать пересечения частей по их общей границе (т. е. все общие точки частей лежат на их границах). В дальнейшем мы будем подразумевать именно это определение.

Е₃. Несколько точек разбивают отрезок на два конгруэнтных множества (множество может состоять из нескольких кусков). Докажите, что одна из точек — в его центре.

Е₄. Круг разбит на 2 части. Доказать, что они переводятся друг в друга либо поворотом относительно центра круга, либо осевой симметрией. Что можно сказать о разбиении на 3 части?

Е₅. Решите задачу ЦС для квадрата.

Е₆. Решите задачу ЦС для правильного 6-угольника.

Е₇. Решите задачу ЦС для n -мерной сферы.

Е₈** **Открытый вопрос.** Решите задачу ЦС для куба (гиперкуба).

Е₉. В задаче ЦС на плоскости рассмотрим по отдельности все виды движений, которыми одна часть разбиения может переводиться в другую.

а) Решите задачу ЦС, если движение — это параллельный перенос или скользящая симметрия.

б) * В случае, если центрально-симметричный многоугольник разбит на две равные части, переводящиеся друг в друга поворотом, докажите, что центр этого поворота лежит внутри фигуры.

в) ** **Открытый вопрос.** Решите задачу ЦС для многоугольника, если движение — это поворот.

г) *** **Тем более открытый вопрос.** Решите задачу ЦС для произвольных центрально-симметричных фигур в \mathbb{R}^n .

Е₁₀. Площадь сферического треугольника равна четверти площади сферы. Докажите, что сферу можно разрезать на 4 треугольника, равных данному.

Е₁₁. а) Разрежьте плоскость на равные фигуры, каждая из которых ограничена тремя дугами окружностей (отрезок не является дугой окружности).

б) ** **Открытый вопрос.** Опишите все такие разрезания.

Е₁₂. а) Разрежьте правильный шестиугольник на равные части так, чтобы центр шестиугольника лежал внутри одной из них.

б) ** **Открытый вопрос.** Можно ли разрезать таким же образом правильный n -угольник при $n \neq 3, 4, 6$?