Квадратура круга

А. Я. Канель-Белов, И. Иванов-Погодаев, Ф. Нилов, А. Оноприенко, А. Садовничий, М. Голафшан

. Целью данного проекта является исследование удивительного факта — можно перекроить квадрат в круг, при этом допускается использовать только параллельные переносы.

Серия A: Перекраивание (немного олимпиадчины)

A_1. (**Квадратура круга** 0**).** Можно ли квадрат разрезать на части и сложить круг? (Разрезы — участки прямых и дуги окружностей).

A_2. Выпуклую фигуру Φ разбили на части и сложили круг (Разрезы — участки прямых и дуги окружностей). Докажите что сама Φ является кругом.

A_3. Можно ли перекроить два круга в круг?

Серия B: Полные системы инвариантов

➢ Инвариантный

Пусть имеется некоторый процесс. *Инвариантом* этого процесса называется некоторая величина (функция от текущего состояния), которая не меняется, как бы ни шёл процесс.

Отсюда следует, что если в начале процесса инвариант был чему-то равен, то нельзя привести систему к состоянию, в котором этот инвариант принял бы другое значение. Это простая часть: чтобы привести систему к какому-то состоянию, *необходимо*, чтобы инвариант не менялся.

Можно задаться обратным вопросом. Пусть имеется некоторый инвариант (или несколько инвариантов, которые мы будем в совокупности называть *системой инвариантов*). Допустим, что в состоянии A и B состоянии B эта система инвариантов одна и та же.

Вопрос: Обязательно ли можно привести систему из состояния A в состояние B?

Ответ может быть как положительным, так и отрицательным. Но если он положительный (для любых состояний A и B), то такую систему инвариантов мы будем называть *полной*.

B_1. а) По кругу стоят n деревьев, на некоторых из них сидят чижи. За ход один из чижей перелетает на соседнее дерево по часовой стрелке, а какой-то другой — на соседнее дерево против часовой. Цель: собрать всех чижей на первом дереве (тогда все чижи станут весёлыми).

б) Пусть $n = 43$, на каждом дереве сидит по чижу. Можно ли сделать всех чижей весёлыми?

в) Пусть $n = 44$, на каждом дереве сидит по чижу. Можно ли сделать всех чижей весёлыми?

г) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи.

д) Пусть $n = 10$, чижи сидят на деревьях через одного (то есть сидят на деревьях с нечётными номерами). На каких деревьях можно собрать всех чижей?

е) Найдите полную систему инвариантов, если чижей можно собрать на любом дереве.

B_2. На острове Серобуромалин обитают серые, бурые и малиновые хамелеоны. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Цель: сделать всех хамелеонов одноцветными.

а) На острове 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета? Если да, то какой цвет это будет?

б) На острове 13 серых, 15 бурых и 16 малиновых хамелеонов. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета? Если да, то какой цвет это будет?

в) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи.

B$_3$. Имеется клетчатый прямоугольник, в некоторых его клетках стоят плюсы, в некоторых — минусы (пустых клеток нет). За ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или в любом столбце. Цель: сделать все знаки плюсами.

а) В одной угловой клетке квадрата 8×8 стоит минус, а во всех остальных клетках стоят плюсы. Можно ли сделать все знаки плюсами?

б) Во всех угловых клетках квадрата 8×8 стоят минусы, а во всех остальных клетках стоят плюсы. Можно ли сделать все знаки плюсами?

в) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи.

B$_4$. На табло есть n лампочек и несколько кнопок, каждая из которых соединена с некоторыми лампочками (с одной лампочкой может быть соединено несколько кнопок). Нажатие на кнопку меняет состояние всех соединённых с ней лампочек на противоположное. Докажите, что число узоров, которые мы можем получить, есть 2^k для некоторого k.

B$_5$. *Инвариантом* будем называть такое подмножество лампочек, что каждая кнопка соединена с чётным числом лампочек из него. Докажите, что число инвариантов (учитывая пустое подмножество) есть 2^ℓ для некоторого ℓ. Докажите, что некоторый узор можно зажечь тогда и только тогда, когда в каждом инварианте надо зажечь чётное число лампочек.

B$_6$. На собрании акционеров “ОАО: не обманешь — не продашь” оказалось, что каждые подряд идущие 12 месяцев расход превышает доход, а каждые подряд идущие 11 месяцев доход превышает расход. Как долго это может продолжаться?

B$_7$. Дана клетчатая фигура. Цель: покрыть её уголками из трёх клеток (не выходящими за границу) в несколько слоёв так, чтобы каждая клетка фигуры была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам.

а) Можно ли сделать это для квадрата 8×8?

б) Можно ли сделать это для прямоугольника 5×7?

в) Прямоугольники каких размеров можно так покрыть?

B$_8$. Клетчатая фигура Φ обладает таким свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника $m \times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру Φ можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника, накрытых фигурой Φ, была положительна (фигуру Φ можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой Φ в несколько слоев.

B$_9$. Имеются две фигуры равной площади. Границы этих фигур состоят из конечного числа отрезков и дуг окружностей. Разрешается разрезать первую фигуру на конечное число частей, причём разрезы состоят также из отрезков и дуг окружностей. Цель: собрать из этих кусочков вторую фигуру (кусочки можно параллельно переносить и поворачивать).

а) Можно ли из круга сделать квадрат?

б) **Первая фигура:** круг радиуса 2, из которого вырезан круг радиуса 1 (центры кругов совпадают).

Вторая фигура: сектор круга радиуса 3 с углом $\frac{2\pi}{3}$.

Можно ли из первой фигуры сделать вторую?

в) Выпуклую фигуру перекроили в круг. Докажите, что она сама круг.

г) Можно ли какую-то пару фигур, все участки границ которых есть дуги окружностей, перекроить в выпуклую фигуру?

д) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи. Тем самым получите ответ на следующий вопрос. Даны две фигуры, границы фигур и возможных разрезов — отрезки прямых и дуги окружностей. Когда одну можно перекроить в другую?

B$_{10}$. Даны две фигуры, границы фигур и возможных разрезов — отрезки прямых и дуги окружностей. Кроме того, можно осуществлять гомотетии. Когда одну фигуру можно перекроить в другую?

B$_{11}$. Границы фигур и возможных разрезов — конечное объединение участков коник. Когда одну можно перекроить в другую? Разрешено осуществлять аффинные преобразования кусочков.

B_{12}. Границы фигур и возможных разрезов — конечное объединение участков коник. Когда одну можно перекроить в другую? Разрешено осуществлять проективные преобразования кусочков.

B_{13}. (Теорема Бойяи–Гервина). Докажите, что любые два многоугольника равной площади на плоскости равносоставлены. Подумайте о сферическом и неевклидовом обобщениях.

> ➣ T-равносоставленными
>
> Имеются два многоугольника равной площади. Назовём их *T-равносоставленными*, если первый многоугольник можно разрезать на конечное число частей и собрать из них второй многоугольник, при этом части можно только параллельно переносить (и нельзя поворачивать).

B_{14}. а) Являются ли треугольник и квадрат равной площади T-равносоставленными?
б) Являются ли два равных квадрата T-равносоставленными?
в) Являются ли два параллелограмма равной площади T-равносоставленными?
г) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи.

B_{15}. Докажите что любые два параллелепипеда одинакового объёма в пространстве любой размерности T-равносоставлены.

B_{16}*. Найдите полную систему инвариантов для T-равносоставленности в пространстве любой размерности.

Серия C: Произвольные разбиения (разрешены гомотетии)

C_1. Разрешены гомотетии. Границы разбиения могут быть объединением счетного числа отрезков и дуг окружностей. Докажите, что квадрат перекраивается в круг.

C_2. Докажите, что любая выпуклая фигура перекраивается в любую.

Серия D: Потоки и клетки

- Данная серия подводит к основному результату: наличию возможности перекроить квадрат в круг

Начнем с подготовки (потоки на графах).

D_1. (Теорема Холла). Пусть в двудольном графе $G = (L, R, E)$ для любого k и k-элементного подмножества $L_0 \subseteq L$ количество вершин из R, смежных хотя бы с одной из вершин множества L_0, не меньше k. Тогда в графе есть паросочетание, содержащее все вершины из L.

D_2. (Теорема Кёнига). Пусть в двудольном графе G любое паросочетание имеет размер не более k. Тогда можно выбрать k вершин таких, что любое ребро графа имеет конец среди выбранных вершин.

D_3. (Теорема Менгера). Между двумя несмежными вершинами графа x и y существует не менее t непересекающихся путей тогда и только тогда, когда при выкидывании любых $t-1$ вершин, отличных от x и y, эти две вершины остаются в одной компоненте связности.

D_4. Вершины A и B графа G назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями без общих промежуточных вершин. Докажите, что любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями без общих ребер.

➢ Сеть

Сеть — это связный граф, в котором заданы пропускные способности рёбер.

- Одну из вершин сети будем считать *истоком (выходом)*, другую — *стоком (входом)*.
- *Пропускная способность:* в графе каждому ребру e приписано некоторое неотрицательное число $c(e)$.

➢ Поток

Поток в сети G — это пара функций (f, w), где w — некоторая ориентация всех рёбер сети, $f(e)$ — заданная на множестве всех рёбер функция, для которой выполнены условия:

1) $0 \leqslant f(e) \leqslant c(e)$ для всех рёбер сети;
2) для всех вершин v, не являющихся истоком и стоком, выполняется аналог закона Кирхгофа для силы тока:
$$\sum_{e \in \Gamma(v)} f(e) - \sum_{e \in \Gamma'(v)} f(e) = 0,$$
где $\Gamma(v)$ (соответственно, $\Gamma'(v)$) — множество всех рёбер, выходящих из v (соответственно, входящих в v) при ориентации w.

- Далее будем писать просто f для потока вместо (f, w).

- *Величина потока* — это сумма значений $f(e)$ для всех рёбер e, выходящих из истока (нетрудно понять, что она равна сумме значений $f(e)$ для всех рёбер e, входящих в сток).
- *Максимальный поток* — это поток, величина которого наибольшая.
- *Остаточная сеть* — граф G_f, вершины которого те же, что в графе G, а множество рёбер является подмножеством рёбер графа G.
  - Ребро e принадлежит графу G_f, если $c(e) - f(e) > 0$.

  Дополняющий путь — это такой путь $u_1 u_2 \dots u_k$ в остаточной сети, что u_1 — исток, u_k — сток.

➢ Разрез

Разрез — это такая пара непересекающихся множеств S и T, что их объединение даёт множество всех вершин графа G, исток принадлежит S, сток принадлежит T.

- Для данного разреза определим $c(S, T)$ как сумму величин $c(e)$ по всем рёбрам, ведущим из S в T. Аналогично определяется $f(S, T)$.

$\mathbf{D_5}$. (Теорема Форда-Фалкерсона). Пусть в сети G с пропускной способностью $c(e)$ для ребра e задан поток f. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Поток f — максимальный.
2. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.
3. Существует разрез (S, T) такой, что $f(S, T) = c(S, T)$.

$\mathbf{D_6}$. Пусть пропускная способность каждого ребра — целое число. Докажите, что в сети есть максимальный целочисленный поток (т.е. поток через каждое ребро — целый).

D_7. В таблице $m \times n$ в каждой клетке записано некоторое число так, что сумма чисел в каждом столбце и сумма чисел в каждой строке является целым числом. Докажите, что каждое число можно округлить до какого-то целого (изменив менее чем на 1) так, чтобы сумма в каждом столбце и сумма в каждой строке не изменилась.

➢ Цепью и Антицепью

Пусть на множестве S задан частичный порядок.

- *Цепью* – назовем подмножество, в котором любые два элемента сравнимы.
- *Антицепью* – подмножество, в котором любые два не сравнимы.

D_8. (Теорема Дилуорса). Пусть в множестве S нет антицепи размера больше k. Тогда S разбивается на k непересекающихся цепей.

- Перейдем к клетчатым задачам.

D_9. Докажите, что при игре "Жизнь" а) в квадрате 2010×2010; б) на бесконечной плоскости найдется конфигурация без прообраза. (Конвеевская игра *"Жизнь"* заключается в следующем: в некоторых клетках решётки стоит по фишке, а некоторые клетки пустые. Фишка, имеющая меньше двух соседей, умирает от одиночества, а имеющая больше трёх соседей — от перенаселённости. На пустом поле, имеющем три соседние фишки, рождается новая фишка. Максимально возможное число соседей равно 8. Все события в клетках происходят одновременно — например, каждую секунду.)

D_{10}. На некоторых клетках бесконечной доски стоят фишки (не более одной на каждой клетке), некоторые клетки пустые. Назовем расстановку *почти полной*, если найдется такое число C, что можно сдвинуть каждую фишку на расстояние, не превышающее C (иногда нулевое) так, чтобы пустых клеток не осталось. Назовем расстановку *не слишком пустой*, если найдется такое число D, что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DP, где P — периметр квадрата. Докажите, что почти полные расстановки — это в точности не слишком пустые.

D_{11}.* Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. Пусть Ω — множество всех клетчатых кубов, разбитых на кубики. Для каждого куба $L \in \Omega$ и числа k построим следующий граф $G(L, k)$. Его вершины – клетки куба L и еще две особые вершины a и b ("источник" и "сток"). Клетки куба L (т.е. остальные вершины $G(L, k)$) являются *смежными* тогда и только тогда, когда расстояние между ними не превосходит k. Кроме того, с вершиной a смежны все свободные клетки в L и только они, а с вершиной b смежны все клетки в L, из которых можно сделать шаг длины не более k, выводящий за пределы L.

D_{12}. Докажите, что в условии задач **D_9** и **D_{10}** существует такое натуральное k, что для любого куба $L \in \Omega$ в графе $G(L, k)$ между вершинами a и b существует k непересекающихся путей.

D_{13}. (Основная задача. Клетчатая версия.)* Возьмем число k достаточно большое, но фиксированное (наука умеет работать с числом $k = 100^{200}$). Рассмотрим клетчатый квадрат единичный площади, разбитый на квадратики площади $1/n$ каждый, $n \to \infty$. Рассмотрим круг единичной площади, покрытый клетчатым листом, разбитым на квадратики со стороной $1/n$ (стороны квадратиков параллельны сторонам исходного квадрата). Наша цель — выбрать множество векторов M из k элементов и сопоставить *почти каждому квадратику* разбиения квадрата квадратик покрытия круга так, чтобы

1) Соответствующие квадратики отличались сдвигом на вектор из M.

2) Суммарная площадь квадратиков, не имеющих партнёра, была бы меньше δ при достаточно большом n.

Докажите, что при сколь угодно малом δ и сколь угодно большом n это можно осуществить.

$\mathbf{D_{14}}$. Докажите, что существует k такое, что квадрат и круг почти перекраиваются k частями (т.е. для любого ε можно перекроить с точностью до множества меры ε).

$\mathbf{D_{15}^*}$. Докажите, что существует k такое, что квадрат и круг перекраиваются k частями с точностью до множества меры ноль.

$\mathbf{D_{16}}$. Обобщите предыдущие пункты на произвольную размерность.

$\mathbf{D_{17}}$. **Задача для исследования.** Постарайтесь уменьшить k.

$\mathbf{D_{18}}$. **Задача для исследования.** Постарайтесь уменьшить C в задачах $\mathbf{D_9}$ и $\mathbf{D_{10}}$.