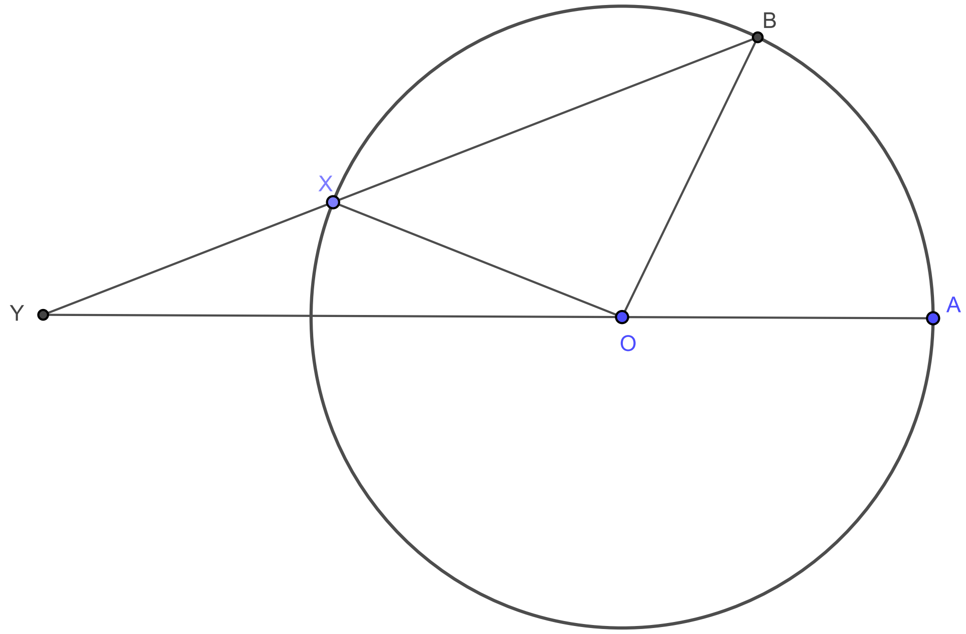
Трисекция угла и другие классические задачи.
Решения

$\boxed{\mathbf{1}}$ На единичной окружности с центром O возьмем точки A и B такие, что $\angle AOB = \varphi$. Используя линейку с отмеченным единичным отрезком, проведем через B прямую, пересекающую окружность и продолжение отрезка AO за точку O в таких точках X, Y, что $XY = 1$. Тогда $\angle OBX = \angle OXB = 2\angle XYA$ и $\angle AOB = \angle OBY + \angle OYB = 3\angle XYA$, следовательно, $\angle XYA = \varphi/3$.



$\boxed{\mathbf{2}}$

$\boxed{\text{a}}$ Проведем из центра O спирали два луча, образующие угол φ, и найдем точки X, Y их пересечения со спиралью. Отложим на OY отрезок $OX' = OX$, разделим отрезок $X'Y$ на три равные части и проведем через точки деления окружности с центром O, пересекающие спираль в точках P и Q. Тогда $\angle XOP = \angle POQ = \angle QOY$.

$\boxed{\text{b}}$ Решение аналогично предыдущему пункту.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ $x^3 - (2b-1)x - 2a = 0$

$\boxed{\text{b}}$ Если $b = 2$, $a = 2\cos\varphi$, корни полученного уравнения равны $2\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}$.

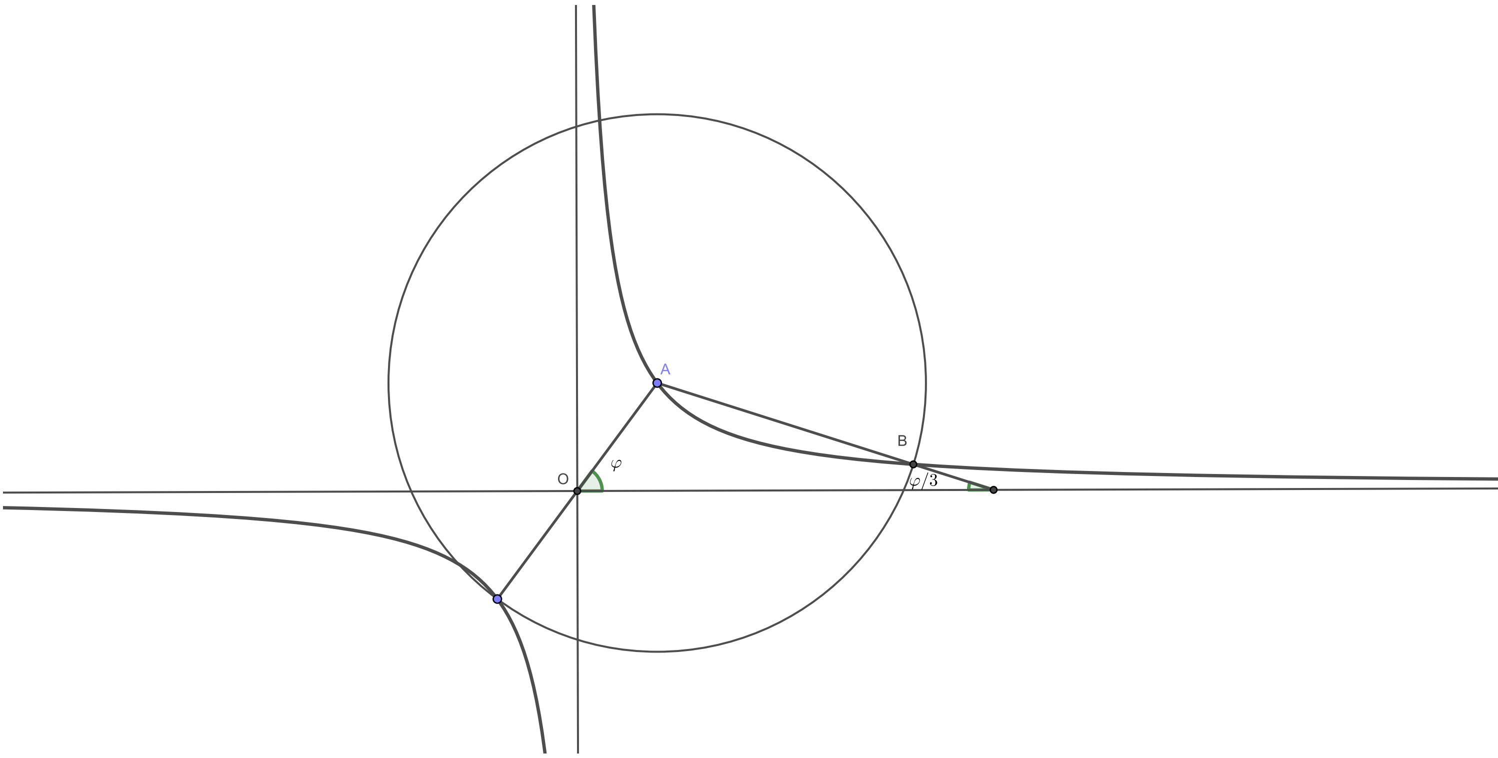
$\boxed{\text{c}}$ Если $b = 1/2$, $a = 1$, корень полученного уравнения равен $\sqrt[3]{2}$.

Примечание. Описанный способ трисекции угла является модификацией метода, предложенного Р.Декартом в книге [1]. Изложение этого метода можно также прочитать в [2].

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\boxed{\text{a}}$ **Первый способ.** Пусть точка A имеет координаты $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Тогда окружность можно задать параметрическими уравнениями: $x = r\cos\varphi + 2r\cos t$, $y = r\sin\varphi + 2r\sin t$. Подставив эти выражения в уравнение гиперболы, получим $\cos\frac{t-\varphi}{2}\sin\frac{3t+\varphi}{2} = 0$. Первый множитель соответствует точке, симметричной A относительно центра гиперболы, второй определяет три точки, образующие правильный треугольник.

Второй способ. (Подробнее см. [3].) Рассмотрим треугольник Δ, образованный тремя точками пересечения окружности и гиперболы. Описанная около треугольника равносторонняя гипербола проходит через его ортоцентр, причем точка, симметричная ортоцентру относительно центра гиперболы, лежит на описанной около треугольника окружности. Следовательно, A — ортоцентр Δ. Поскольку A также является центром описанной около Δ окружности, треугольник Δ правильный.

$\boxed{\text{b}}$ Возьмем на гиперболе точку A такую, что луч OA образует с осью абсцисс угол φ, проведем окружность с центром A, проходящую через точку, симметричную A относительно центра гиперболы, и найдем ближайшую к оси абсцисс точку B пересечения окружности с гиперболой. Тогда угол между прямой AB и осью абсцисс равен $\varphi/3$.



$\boxed{\textbf{5}}$ $\boxed{\text{a}}$ (А.Соколов) Запишем уравнение гиперболы в виде $y^2 = 3x^2 - 3$. Перейдя к комплексным координатам, получим $z^2 + \bar{z}^2 + z\bar{z} = 3$.

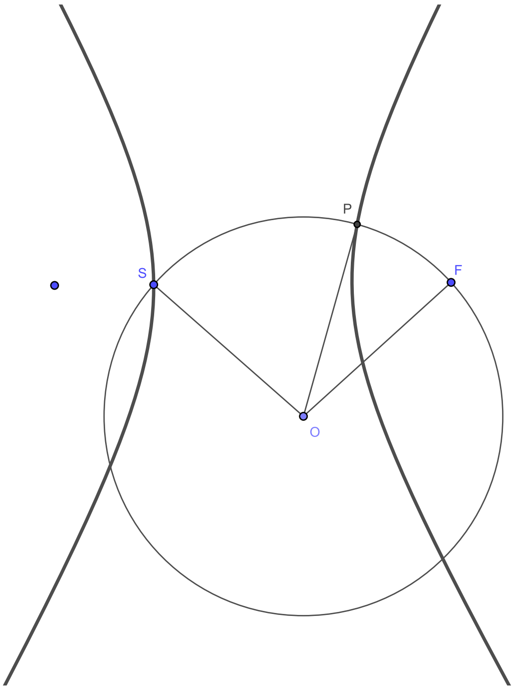
Произвольная окружность, проходящая через точки -1 (вершина) и 2 (фокус), имеет уравнение $z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} = 2$, где $a + \bar{a} = 1$.

Выразив из уравнения окружности $\bar{z}$, и подставив в уравнение гиперболы, получим

$$(z+1)(z^3 - 3az^2 + 3a^2z + 3 - 3a^2) = 0.$$

Второй множитель приводится к виду $(z-a)^3 = C$, следовательно, его корни являются вершинами правильного треугольника

$\boxed{\text{b}}$ Пусть окружность с центром O, проходящая через вершину S и фокус F гиперболы пересекает гиперболу в точке P. Тогда $\angle POF = \angle SOF/3$



$\boxed{\mathbf{6}^\star}$ (А.Соколов) Пусть дана коника $y^2 = (e^2-1)(x^2-1)$ (e — эксцентриситет). Возьмем окружность с центром в точке $(e^2/8, b)$, проходящую через вершину гиперболы $(-1,0)$.

Исключив из системы уравнений, задающих окружность и гиперболу, y и поделив полученное уравнение на $(x+1)$, получим

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \left(\frac{15}{16} + \alpha\right)x + \left(\frac{25}{16} + \alpha\right) = 0,$$

где $\alpha = 4b^2(e^2-1)/e^4$.

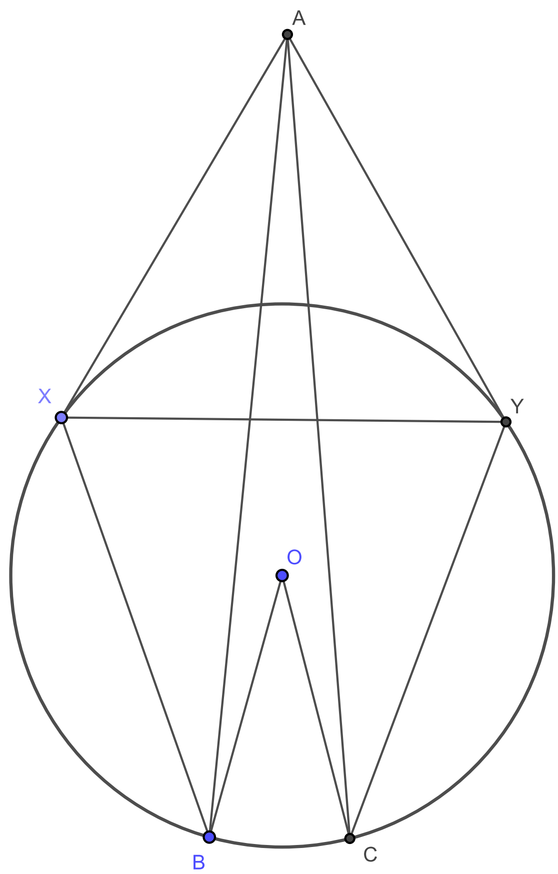
Сделав замену $t = (x-1/2)/k$, $k = \sqrt{3/4 + 4\alpha/3}$, приведем это уравнение к виду $4t^3 - 3t + 3/8k = 0$.

При

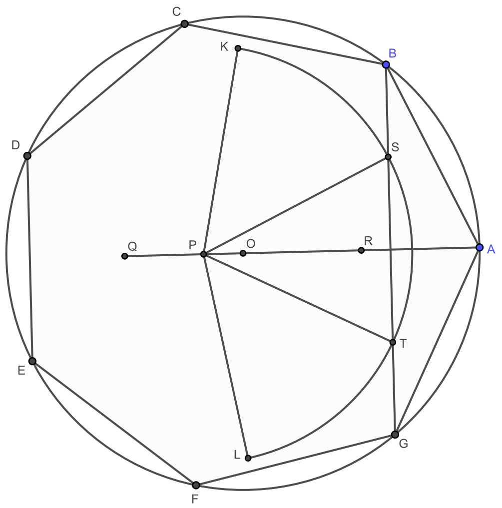
$$b^2 = \frac{27e^4}{64(e^2-1)}\left(\frac{1}{16\cos^2\varphi} - 1\right),$$

получаем, что $\arccos t = \varphi/3$. При этом для эллипса ($e > 1$) должно выполняться условие $\cos\varphi \geq 1/4$, а для гиперболы — противоположное но произвольный угол можно представить в виде суммы или разности частей, удовлетворяющих нужному условию.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Пусть BC — сторона n-угольника, лежащая на основании треугольника, а X, Y —вершины, через которые проходят боковые стороны. Тогда треугольник AXY — правильный. Одна из содержащих X сторон n-угольника образует с BC угол, больший 60 градусов, а другая - меньший. Это однозначно определяет вершину X: при $n = 3k + 1$ имеем $BX = XY = YC$, а при $n = 3k - 1$ имеем $CX = XY = YB$. В первом случае $\angle BAC = \pi/3 - 2\angle CAY = \angle XYC - \pi/3 = \angle BOC/3$. Во втором $\angle BAC = 2\angle BAY - \pi/3 = 2\pi/3 - \angle AYB = \pi/3 - \angle XYB = \angle BOC/3$.



$\boxed{\mathbf{8}}$ Пусть Ω — окружность с центром в начале координат и радиусом 6. Возьмем точки $A(6, 0)$, $Q(-3, 0)$, $R(3, 0)$. Пусть K, L — вершины двух правильных треугольников с основанием QR. Построим дугу KL с центром в точке $P(-1, O)$ и разделим ее на три равные части точками S и T. Точки B и G пересечения прямой ST с окружностью Ω являются вершинами правильного семиугольника $ABCDEFG$.

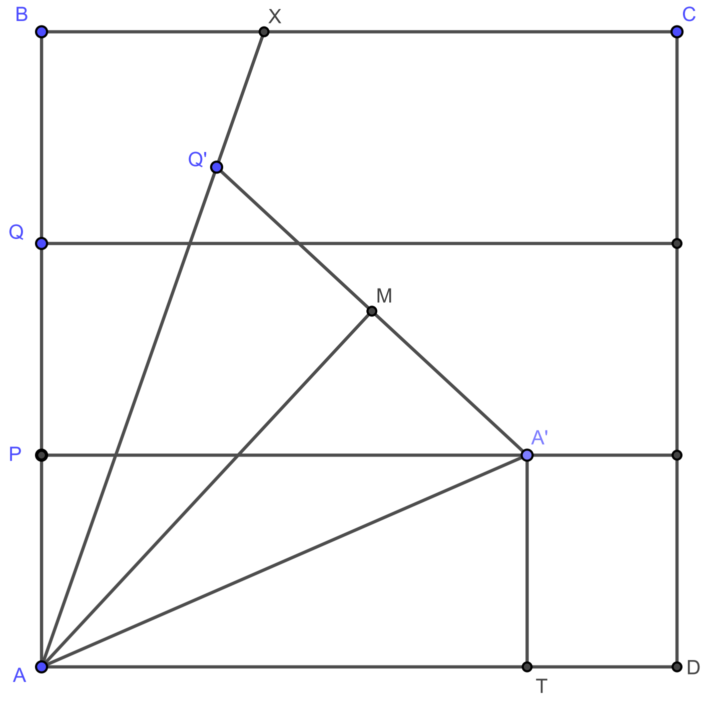


Для обоснования построения достаточно убедиться в справедливости равенства $1 + 6\cos\frac{2\pi}{7} = \sqrt{28}\cos\frac{\arccos 1/\sqrt{28}}{3}$. Непосредственная проверка (см. [4]) показывает, что как левая, так и правая части этого равенства удовлетворяют уравнению $x^3 - 21x - 7 = 0$, имеющему единственный положительный корень. Другие примеры построения правильных многоугольников циркулем, линейкой и трисектором можно посмотреть в [4].

$\boxed{\mathbf{9}^\star}$ $N = 2^m 3^n p_1 \cdots p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа вида $2^p 3^q + 1$. В частности, можно построить 13- и 19-угольники, но нельзя построить 11-угольник. (См. доказательство теоремы Гаусса в [5].)

$\boxed{\mathbf{10}}$ Отметим на стороне AB точку P, достаточно близкую к A, согнем лист по прямой $PP' \parallel AD$ и отметим точку Q на AB такую, что $AP = PQ$. Согнём лист по прямой так, что Q попадёт на прямую AX в какую-то точку Q', а A — в точку A' на PP'.

Пусть M — середина $A'Q'$, T — проекция A' на AD. Точки A, Q, Q', A' образуют равнобокую трапецию, поэтому $A'M = AP = A'T$. Прямоугольные треугольники ATA', AMA' и AMQ' равны, поэтому лучи AA' и AM делят угол XAD на равные части.



11 $\boxed{\text{a}}$ Построим сектор OAB с $\angle AOB = \varphi$ и разделим его площадь пополам прямой, проходящей через A и пересекающей отрезок OB в точке C. Возьмем вне сектора точку D такую, что $S_{OAD} = 2S_{OAC}/3$, и проведем через O прямую, делящую пополам площадь фигуры $ODAB$. Эта прямая делит угол AOB в отношении $1 : 2$.

$\boxed{\text{b}}$ Аналогично предыдущему пункту.

$\boxed{\text{c}}$ Построим прямую AC, делящую пополам площадь сектора OAB с прямым углом AOB. Задача свелась к построению квадрата, площадь которого в 8 раз больше площади треугольника OAC.

Список литературы

[1] Rene Descartes. La geometrie. https://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf

Перевод: Рене Декарт. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А. П. Юшкевича. — Изд. 2-е, испр.. — М.: URSS, 2010

[2] W.W.Rouse Ball, H.S.M.Coxeter. Mathematical recreations and essays.

https://drive.google.com/file/d/1E0F6y0n6_oWprncBWTaico9_H-rqW4ql/view

[3] А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. — 2-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2011.

[4] A.M.Gleason. Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon. The American Mathematical Monthly, Vol. 95, No. 3 (Mar., 1988), pp. 185-194

[5] А.Б.Скопенков. Разрешимость в радикалах. В кн. "Элементы математики в задачах". М.: МЦНМО. 2018. С.69–120.