Трисекция угла и другие классические задачи

Проект представляют А. Заславский, С. Маркелов,
М. Евдокимов, И. Климанова, Б. Френкин

Мы знаем, что задача не имеет решения. Мы хотим знать, как ее решать.
А.Стругацкий, Б.Стругацкий. «Понедельник начинается в субботу»

Трисекция или деление данного угла на три равные части является одной из трех классических задач на построение, сформулированных еще в Древней Греции. Двумя другими являются *удвоение куба*, т.е. построение куба с объемом вдвое больше данного, и *квадратура круга*, т.е построение квадрата, площадь которого равна площади данного круга. В XIX веке было доказано, что решить все эти задачи, пользуясь только циркулем и линейкой без делений, невозможно. В частности, задача о трисекции угла $\varphi = \pi/3$ сводится к решению кубического уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$, корни которого не строятся циркулем и линейкой, потому что у него нет рациональных корней. Однако задача становится разрешимой, если расширить арсенал инструментов, а также если на плоскости предварительно начерчена некоторая кривая. Приведем две наиболее известные задачи.

$\boxed{\textbf{1}}$ Разделите данный угол на три равные части с помощью циркуля и линейки, на которой отмечен единичный отрезок.

Определение. Пусть точка равномерно движется по лучу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг своего начала. Тогда кривая, которую она описывает, называется *спиралью Архимеда.*

$\boxed{\textbf{2}}$ Пусть на плоскости начерчена спираль Архимеда. Разделите данный угол с помощью циркуля и линейки

$\boxed{\text{a}}$ на три равные части;

$\boxed{\text{b}}$ на n равных частей.

Множество кривых, при наличии которых трисекция угла становится выполнимой, весьма обширно. Наибольший интерес представляют методы деления угла на три части с помощью коник. Поскольку во многих графических редакторах, например в Geogebra, есть возможность рисовать коники, в них можно создать и инструмент для трисекции угла.

1 Трисекция угла с помощью коник

Все задачи этого раздела следует решать циркулем и линейкой.

$\boxed{\textbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ Пусть на плоскости начерчена парабола $y = x^2$. Окружность с центром в точке (a, b) проходит через вершину параболы. Напишите уравнение, корнями которого являются абсциссы остальных точек пересечения окружности с параболой.

$\boxed{\text{b}}$ Используя начерченную на плоскости параболу, разделите данный угол на три равные части.

$\boxed{\text{c}}$ Используя параболу, решите задачу удвоения куба.

$\boxed{\textbf{4}}$ $\boxed{\text{a}}$ На плоскости начерчена гипербола $xy = C$. Окружность с лежащим на гиперболе центром A проходит через точку, симметричную A относительно центра гиперболы. Докажите, что три других точки пересечения гиперболы и окружности — вершины правильного треугольника.

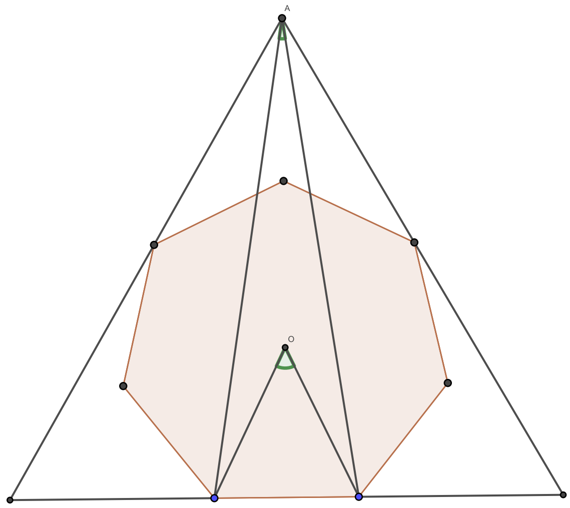
$\boxed{\text{b}}$ Используя начерченную на плоскости равностороннюю гиперболу, разделите данный угол на три равные части.

$\boxed{\textbf{5}}$ $\boxed{\text{a}}$ На плоскости начерчена гипербола, асимптоты которой образуют угол $2\pi/3$. Окружность проходит через вершину одной ветви гиперболы и фокус другой ветви. Докажите, что три другие точки пересечения гиперболы и окружности — вершины правильного треугольника.

$\boxed{\text{b}}$ Используя начерченную на плоскости гиперболу с эксцентриситетом 2, разделите данный угол на три равные части.

$\boxed{\textbf{6}^\star}$ Попробуйте придумать метод трисекции, использующий какую-нибудь конику, отличную от приведенных выше.

2 Другие задачи о трисекции



Хотя осуществить с помощью циркуля и линейки трисекцию произвольного угла невозможно, для многих углов эта задача разрешима. При этом среди них есть и углы, которые нельзя построить циркулем и линейкой. Например, есть следующий простой способ трисекции угла, равного $2\pi/n$, для любого n, не кратного 3.

7 Правильный n-угольник с центром O вписан в правильный треугольник, как показано на рисунке справа. Докажите, что $\angle A = \angle O/3$.

Предположим теперь, что у нас кроме циркуля и линейки есть трисектор (т.е. инструмент для деления произвольного угла на три равные части). Попробуем узнать, насколько это увеличивает наши возможности в задачах на построение. В частности, можно поставить вопрос, какие правильные многоугольники можно построить с помощью циркуля, линейки и трисектора.

8 С помощью циркуля, линейки и трисектора постройте правильный семиугольник.

9★ Какие еще правильные многоугольники можно построить, имея трисектор, циркуль и линейку? (Напомним, что по теореме Гаусса с помощью циркуля и линейки можно построить правильный N-угольник тогда и только тогда, когда $N = 2^m p_1 \cdots p_k$, где $p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа вида $2^{2^l} + 1$.)

В заключение еще две задачи о трисекции с помощью необычных инструментов.

10 Дан прямоугольный лист бумаги $ABCD$ и точка X на стороне BC. Сгибая бумагу по прямым, разделите угол XAD на три равные части.

11 "Пополамер" — это прибор, который для любой выпуклой фигуры и точки на ее границе строит прямую, делящую площадь фигуры пополам. С помощью пополамера, циркуля и линейки разделите данный угол

a на три равные части;

b на n равных частей.

c С помощью пополамера, циркуля и линейки осуществите квадратуру круга.

d★ Можно ли с помощью пополамера, циркуля и линейки осуществить удвоение куба?

Список литературы

[1] Rene Descartes. La geometrie. https://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf

Перевод: Рене Декарт. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А. П. Юшкевича. — Изд. 2-е, испр.. — М.: URSS, 2010

[2] W.W.Rouse Ball, H.S.M.Coxeter. Mathematical recreations and essays.

https://drive.google.com/file/d/1E0F6y0n6_oWprncBWTaico9_H-rqW4ql/view

[3] А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. — 2-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2011.

[4] A.M.Gleason. Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon. The American Mathematical Monthly, Vol. 95, No. 3 (Mar., 1988), pp. 185-194

[5] А.Б.Скопенков. Разрешимость в радикалах. В кн. "Элементы математики в задачах". М.: МЦНМО. 2018. С.69–120.