Дистанционные графы и теорема Турана

Андрей Райгородский, Максим Дидин, Святослав Дженжер,
Вадим Ретинский, Алексей Суворов, Александр Толмачев

Введение

В 2010 году на Московской математической олимпиаде последней (самой сложной) задачей в варианте 10 класса А.М. Райгородским была предложена такая задача:

На плоскости отметили 4α точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $\alpha + 1$ точек обязательно есть две, соединенные отрезком. Докажите, что всего проведено не менее 7α отрезков.

На той олимпиаде эту задачу решил всего один человек из 616 участников, что приводит нас к мысли, что решить ее весьма непросто, несмотря на короткую и ясную формулировку! Часто на олимпиадах предлагаются «игрушечные» задачи, не имеющие приложений и большой теории, которая стоит за их решениями. Однако, эта задача связана с очень красивым разделом математики — комбинаторной геометрией.

На олимпиаде размышления над задачей заканчиваются после того, как удалось найти (или узнать после олимпиады) верное решение, но в научной деятельности решение одной задачи является первым шагом в постановке новых задач. Давайте попробуем сделать следующие шаги и придумать новые (можно придумать ещё!) вопросы:

- В условии задачи сказано, что точки расположены на плоскости. А что изменится, если отказаться от этого условия и рассмотреть произвольный граф? Какое минимальное количество ребер может быть в таком графе?

- Можно ли улучшить оценку на число ребер в таком графе и вместо 7α написать какое-то большее число?

Попробуем ответить на первый вопрос. В этом случае получается такая задача:

Дан граф с 4α вершинами, так что среди любых $\alpha + 1$ вершин есть ребро. Каково минимальное количество ребер в таком графе?

Напомним важное определение: *числом независимости* графа G называется величина $\alpha(G)$, равная максимальному числу вершин графа G, которое можно выбрать так, чтобы никакие две выбранные вершины не были соединены ребром. Тогда, задача выше спрашивает нас о том, какое минимальное количество ребер может быть в графе с 4α вершинами, число независимости у которого не больше α? Здесь, вероятно, многие читатели вспомнили теорему Турана, которая, по сути, спрашивает нас ровно об этом. Сформулируем несколько упражнений:

(a) Придумайте пример такого графа, в котором ровно 6α ребер.

(b) Докажите, что в любом таком графе не менее 6α ребер.

В общем случае, задачу о минимальном числе ребер в графе с заданным количеством вершин и числом независимости полностью дает теорема Турана, которой посвящен первый раздел нашего проекта. Даже если эта тема кажется знакомой читателю, то мы рекомендуем внимательно изучить этот раздел, так как это позволит лучше понять следующие разделы.

Таким образом, на первый из двух новых вопросов, вдохновленных задачей с Московской олимпиады 14-летней давности, мы ответили. И вопрос-то оказался не таким уж новым, если эта проблема была уже решена венгерским математиком Палом Тураном в 1941 году.

Но что насчет второго вопроса? Давайте теперь рассматривать только графы на плоскости. Введем еще одно определение (приготовьтесь, их дальше будет еще много):

Дистанционным графом на плоскости называется граф, вершины которого суть точки на плоскости, и рёбра которого соединяют точки на единичном расстоянии.

Теперь наша задача на языке графов приобретает следующий вид:

На плоскости дан дистанционный граф с 4α вершинами и числом независимости не больше α. Какое минимальное количество ребер может быть у такого графа?

В задаче с Олимпиады было доказано, что ребер не меньше 7α. Попробуйте, опираясь на решение упражнения выше про оценку на 6α, доказать это. Не забывайте, что где-то в решении должна использоваться дистанционность графа, т.е. то, что точки расположены на плоскости, и расстояния измеряются тоже на плоскости. Задача сложная, поэтому дадим подсказку: используйте то, что дистанционный граф на плоскости не содержит подграфа K_4 — полного графа на четырех вершинах.

Получилось решить? Поздравляем! Вы уже научились решать задачу, которую на Московской олимпиаде 15 лет назад решил всего один человек! Однако, если вы попробуете построить пример такого графа (ровно с 7α ребрами), то у вас ничего не получится...

И этот вопрос (про минимальное количество ребер для дистанционного графа) уже не такой простой, как вопрос выше, для произвольного графа. Удивительно, но точная оценка на минимальное количество ребер в этой задаче — до сих пор нерешенная проблема! С момента той олимпиады прошло уже 14 лет... За это время оценка на 7α ребер сначала была улучшена до 8α в 2016 году (см. статью Льва Шабанова и А.М. Райгородского «Об одной олимпиадной задаче на графы расстояний» в журнале «Квант»). Позже Лев Шабанов в своей статье доказал оценку на $8\frac{2}{3}\alpha$. И после этого продвижений в такой задаче не было...

...до января 2024 года, когда Максим Дидин улучшил оценку до 9α! Это продвижение, а точнее методы, с помощью которых оно было достигнуто, легли в основу данного проекта. И сейчас, мы предлагаем Вам познакомиться с ними и, можно сказать, поработать на переднем крае одного из самых красивых (как нам кажется!) разделов математики - комбинаторной геометрии. В рамках данного проекта, последовательно решая задачи, вы не только узнаете, как улучшить оценку до 9α (а также соответствующие оценки в общем случае), но и (для самых успешных!) сможете ЕЩЁ улучшить оценку!

Математики-исследователи стараются решить задачу в общем случае, а не только в частном, который можно встретить, например, на олимпиаде в виде сложной задачи. Полагаем, уже давно не секрет, что многие олимпиадные задачи — это частные случаи новых результатов из разных областей математики. Поэтому, главная идея данного научного проекта заключается в том, что **мы хотим получить не конкретную оценку для графа с заданным соотношением между числом вершин и числом независимости (как было в исходной задаче с ММО-2010), а найти хорошую линейную по числу вершин оценку минимального количества ребер для всех графов.** Хотите узнать про новые методы и как именно можно улучшать такие оценки? А может быть вы уже мыслите как исследователь и хотите попробовать применить эти методы в других задачах теории графов? Тогда выбирайте наш проект и скорее приступайте к решению задач!

Комментарий участникам. Мы опускаем слова «докажите, что» и пишем сразу утверждение, которое нужно доказать. «Задачами» называются чуть более сложные или фундаментальные упражнения.

Символом (!) будем обозначать задачи, без решения которых трудно двигаться дальше. Символом (*) — задачи повышенной сложности. Символом (**) — «гробы». Чем дальше вы продвигаетесь по проекту, тем больше идей осваиваете. Поэтому задачи (*) и (**) можно пропускать и возвращаться к ним позже, используя технику более высокого уровня.

1 К теореме Турана

Основная цель этого параграфа — найти минимально возможное число рёбер в турановском графе с заданными количеством вершин и числом независимости. Вторая цель — получить методы работы с турановскими графами, которые можно использовать в остальных частях проекта.

Напомним, что *числом независимости* $\alpha(G)$ графа G называется размер наибольшего множества его вершин, попарно не соединенных ребром.

Теорема 1.1 (Туран, 1941)**.** *Найдите минимально возможное количество рёбер в графе на n вершинах с числом независимости α.*

1.2. (!) Пусть в графе имеется вершина степени хотя бы 1. Тогда можно выбросить её вместе с выходящими рёбрами и, возможно, ещё несколько рёбер, так, что число независимости не изменится.

1.3. (!) Пусть v — вершина наименьшей степени, а N — объединение множества её соседей и $\{v\}$.
- (a) Если удалить все рёбра с концами в N и сделать из N клику, то число независимости не увеличится.
- (b) При любом способе проведения операции из предыдущего пункта количество рёбер в графе не увеличивается.
- (c) При проведении операции из первого пункта количество рёбер в графе не меняется тогда и только тогда, когда N является одновременно кликой и компонентой связности.

Назовём *оптимальным* граф, на котором достигается минимум в теореме Турана 1.1.

1.4. (!) В оптимальном графе
- (a) все компоненты связности суть клики,
- (b) размеры компонент связности отличаются не более чем на 1.

Есть много задач, в которых нужно найти связь между числом вершин, минимально возможным числом рёбер и числом независимости в графе с какими-то ограничениями (например, граф без треугольников, дистанционный граф). Интересен случай, когда эти ограничения запрещают оптимальный пример из теоремы Турана. Тогда мы будем рассматривать локальный минимум.

Назовём ребро *лишним*, если его удаление не меняет числа независимости графа.

1.5. Найдите все лишние рёбра в (a) пути; (b) цикле; (c) полном графе; (d) квадрате с диагональю.

Назовём *турановским* связный граф без лишних рёбер.

1.6. (!) В турановском графе, отличном от клики, среди соседей любой вершины есть две независимых вершины (в частности, нет висячих вершин).

1.7. Найдите минимально возможное число вершин в турановском графе с числом независимости равным двум.

1.8. Опишите все турановские графы для количества вершин из $\{3, 4, 5, 6\}$.

2 Элементарные методы

В этом разделе мы познакомимся с основными понятиями, которые будут использоваться в дальнейшем для получения различных турановских оценок. Некоторые из этих методов пригодятся и для получения простых линейных оценок; остальные методы пригодятся для более сложных техник, но эти методы можно разобрать и сейчас для улучшения понимания происходящего.

Подмножество вершин называется *максимальным*, если разность количества вершин в нём и количества рёбер в подграфе, индуцированном на этом подмножестве, максимальна.

2.1. Опишите все максимальные множества (a) пути; (b) цикла; (c) полного графа; (d) цикла с подвешенной вершиной.

Подмножество вершин называется *независимым*, если его вершины попарно не соединены рёбрами. Таким образом, размер максимального независимого множества в графе G равен $\alpha(G)$.

2.2. (!) Максимальное независимое множество вершин является максимальным множеством.

2.3. (!) Ребро является лишним тогда и только тогда, когда не существует максимального множества, содержащего обе его вершины.

2.4. (!) Пусть в турановском графе больше одной вершины. Тогда для любой вершины найдётся как максимальное независимое множество, содержащее эту вершину, так и максимальное независимое множество, не содержащее эту вершину.

Назовём подмножество вершин *свободным*, если оно лежит в дополнении некоторого максимального множества. Назовём несвободное множество вершин *ключевым*, если оно становится свободным при удалении любой его вершины.

2.5. Опишите все ключевые множества графов из упражнения 2.1.

Задача 2.6. Любая вершина турановского графа вместе со своими соседями образует ключевое множество.

Назовём *шарниром* вершину, при удалении которой граф теряет связность.

Задача 2.7. В турановском графе нет шарниров.

Задача 2.8. (a) (*) Для связного графа с числом независимости α улучшите результат теоремы Турана 1.1 на $\alpha - 1$. (b) (**) Опишите все случаи равенства.

Указание к задаче 2.8.a. Покажите, что из графа можно выбросить лишнее ребро, а если таких нет, — вершину максимальной степени без соседей.

Указание к задаче 2.8.b. Предположим, если удалить из турановского графа вершину и несколько лишних рёбер, он распадётся на клики. Тогда степени всех вершин уменьшатся.

Далее мы будем рассматривать преобразования (добавление ребра, удаление вершины), в ходе которых возникают лишние рёбра и изменяется количество компонент связности. Пусть в результате удаления вершины граф остаётся связным, но перестаёт быть турановским. Очевидно, что мы можем избавляться как минимум от одного ребра за каждое увеличение количества компонент связности на один. После этого мы покажем, как получить гораздо больше!

2.9. (a) Для каждого $n > 2$ приведите пример связного графа на n вершинах, у которого все рёбра лишние.

(b) При удалении лишнего ребра не могут появиться новые лишние рёбра (исчезнуть могут, как видно из предыдущего пункта).

(c) (*) Какие из пяти правильных многогранников являются турановскими графами? Для остальных придумайте последовательность удаления лишних рёбер, приводящую к распаду на несколько одинаковых турановских частей.

Далее мы будем пользоваться понятием удаления (упорядоченного) набора лишних рёбер. А именно, мы будем говорить, что граф G' получен из графа G удалением набора $(e_1, \ldots, e_n)$ лишних рёбер, если существует такая цепочка $G_0 = G, G_1, \ldots, G_{n-1}, G_n = G'$ графов, что одновременно выполнены два условия:

- множества вершин всех графов $G_0, G_1, \ldots, G_n$ совпадают,
- для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ граф G_i получен из графа G_{i-1} удалением лишнего ребра e_i.

Назовём связный граф *почти турановским*, если его связность нельзя нарушить путём удаления нескольких лишних рёбер.

2.10. Приведите пример

(a) почти турановского графа с лишними рёбрами;

(b) графа с лишними рёбрами, в зависимости от порядка удаления которых можно получить как один турановский граф, так и две турановские компоненты связности.

2.11. (a) Пусть U — ключевое множество в турановском графе. Тогда при добавлении новой вершины, соединённой со всеми вершинами из U, полученный граф останется турановским.

(b) Пусть U — несвободное множество в почти турановском графе. Тогда при добавлении новой вершины, соединённой со всеми вершинами из U, полученный граф тоже останется почти турановским.

3 Простые линейные оценки

В этом разделе мы научимся доказывать линейные оценки на число рёбер в графе с ограничениями. Основные действия — удаление вершины наибольшей степени без соседей, удаление вершины наименьшей степени с соседями, удаление лишних рёбер. Чтобы было, что улучшать, выпишем несколько оценок, верных для произвольного графа.

Далее мы всегда будем обозначать количество вершин через n, количество рёбер через m, а число независимости через α.

3.1. (!) Пусть имеется граф на n вершинах с числом независимости α. Тогда количество рёбер в нём не меньше (a) $n - \alpha$; (b) $2n - 3\alpha$; (c) $3n - 6\alpha$; (d) $4n - 10\alpha$; (e) $5n - 15\alpha$.

Оценки являются точными. Доказательство любой аналогичной линейной оценки — последовательность действий, упрощающих граф и позволяющих отследить изменение m, n, α. Например, вершину, степень которой не меньше, чем коэффициент при n, можно удалить без соседей (если появятся лишние рёбра — тем лучше).

Если дополнительно запретить в графе некоторые клики, то предыдущие оценки можно усилить.

3.2. (a) (!) Пусть в графе нет треугольников (клик на трёх вершинах). Тогда $m \geqslant 3n - 5\alpha$; (b) Равенство $m = 3n - 5\alpha$ достигается ровно на двух связных графах.

Указания к упражнению 3.2.a. Можно считать, что степени вершин в графе не превосходят 2. Достаточно рассмотреть случай турановского графа.

Указания к упражнению 3.2.b. Можно считать, что в турановском графе есть вершина v степени 3, соединённая с вершиной степени 2. Что произойдёт, если выбросить v?

3.3. (a) (!) Предположим, оценка $m \geqslant 5n - 10\alpha$ верна для всех 3-регулярных турановских графов без треугольников. Докажите её для всех остальных графов без треугольников. (b) Постройте бесконечную серию связных графов без треугольников, на которых достигается равенство $m = 5n - 10\alpha$. (c) (*) Докажите оценку $m \geqslant 5n - 10\alpha$ для 3-регулярных графов без треугольников.

Указания к упражнению 3.3.a. Тут пригодятся методы решения 3.1.a. Также: При удалении вершины наименьшей степени d с соседями теряется хотя бы d^2 рёбер. Если граф не является регулярным, оценка улучшается на одно очко.

Вопрос: где используется, что граф не содержит треугольников?

Указания к упражнению 3.3.b. Простейший пример — цикл на пяти вершинах. Он получается, если выбросить из какого-то графа вершину степени два с соседями. Чтобы продолжить серию, добавляя на каждом шаге по три вершины, и отслеживать число независимости, потребуется понятие ключевого множества.

Указания к упражнению 3.3.c. Удаляя вершину с соседями, мы теряем 1 очко. Зато дальше можно разрушать граф, пока мы не вернём очко или не дойдём до конца (до какого конца?)

Итак, оценки 3.2 и 3.3 точны для определённых диапазонов отношения $\frac{n}{\alpha} < 3$. При этом, точной оценки для всех графов без треугольников нам неизвестно (в частности, она позволяла бы вычислить числа Рамсея $R(3, \alpha)$).

Теперь, после знакомства с техникой удаления вершины с соседями, пора получить одну из оценок, анонсированных во введении.

3.4. (!) Пусть имеется граф на n вершинах с числом независимости α. Пусть в нём нет клик на четырёх вершинах. Тогда количество рёбер в нём не меньше $5n - 12\alpha$.

Задача уже выглядит непростой. Но результат ещё нужно усилить! Для этого нужно найти точки равенства.

3.5. Пусть в условиях упражнения 3.4 в оценке достигается равенство для некоторого графа. Пусть d — наименьшая степень вершины.

(a) Тогда $2 \leqslant d \leqslant 4$.

(b) Как может выглядеть множество соседей вершины степени d?

(c) Имеется ровно три «попарно неизоморфных» турановских графа, на которых достигается равенство в оценке.

Указание к упражнению 3.5. Докажите, что случай равенства единственный, сначала для $d = 2$, потом для $d = 3$, потом для $d = 4$. В 4-регулярном графе удобно зацепиться за ромб — цикл на четырёх вершинах с диагональю.

Кажется, что для усиления оценки для дистанционного графа необходимо использовать недистанционность большого списка подграфов, вылезает перебор. Таким образом, оценку на количество m рёбер можно усилить до $m \geqslant 8\frac{1}{3}\alpha$ (если запретить недистанционный пример из 3.5) или даже $m \geqslant 8\frac{2}{3}\alpha$ (если запретить пятиугольную пирамиду без одного бокового ребра и пару вершин с тремя общими соседями) при $n = 4\alpha$. Этого мало! Мы выберем другой путь. Для произвольного турановского графа мы получим оценки (a) $m \geqslant 3n - 4\alpha - 2$; (b) $m \geqslant 4n - 7\alpha - 3$; (c) $m \geqslant 5n - 11\alpha - 4$.

Имеется много случаев равенства (в частности, $m = 3n-4\alpha-2$ в примерах из упражнения 3.2.b. Оценка $m \geqslant 4n-7\alpha-3$ для графов без клик на 4 вершинах точна при $n \leqslant 4\alpha-1$. Тем не менее, при $n \geqslant 4\alpha$ её можно ещё усилить. Пусть имеется турановский граф на n вершинах с числом независимости α. Пусть в нём нет клик на четырёх вершинах. Тогда количество рёбер в нём не меньше (a) $5n-11\alpha-2$; (b) $6n-15\alpha-1$, за исключением графа четырехугольной антипризмы.

Связность и отсутствие лишних рёбер позволяют добавить в оценку свободный член. Таким образом, случаи равенства при $\alpha = 2$ сохраняются, а при больших α оценка усиливается. Кроме того, можно обходить неудобные случаи равенства. Обычная техника удаления вершины не позволяет доказать такие оценки, ведь граф может после удаления лишних рёбер рассыпаться на тысячи осколков, а свободные члены для разных частей складываются! Поэтому, мы посвятим следующие две главы технике, позволяющей решать эти проблемы.

4 Расколы

В этом разделе мы познакомимся с понятием раскола, которое поможет нам преобразовывать графы так, чтобы для них было проще получать турановские оценки. Идея в том, чтобы добавляя в турановский граф ребро или удаляя вершину, делать несколько других рёбер лишними. На этом пути есть две проблемы. Во-первых, добавленное ребро может входить в запрещённый подграф. Для решения этой проблемы, мы будем окрашивать такие рёбра в красный цвет и снимем с них все ограничения. Также нам потребуются красные вершины. Заметим, что любая вершина красного ребра может легко и необратимо превратиться в красную вершину. Обычные вершины и рёбра мы назовём синими.

Во-вторых, удаление лишних рёбер может привести к увеличению числа компонент связности. Назовём вершину v турановского графа *нестабильной*, если при удалении вершины v и нескольких лишних рёбер граф может распасться на части. Назовём пару (u, v) независимых вершин турановского графа *особой*, если при добавлении ребра uv и удалении нескольких лишних рёбер граф может распасться на части.

4.1. (a) (!) Каждая вершина особой пары нестабильна. (b) (!) Любая пара вершин нечётного цикла — особая. (c) Приведите пример турановского графа, не содержащего нестабильных вершин и не являющегося кликой.

Как видно из задачи 4.1.b, частей может быть много, а лишних рёбер — не так много. Поэтому, мы не хотим оставлять полученный граф в таком виде. Оказывается, что верна следующая теорема.

Задача 4.2 (**). (a) **Раскол по ребру**. Пусть при добавлении красного ребра e и удалении нескольких лишних рёбер граф распадается на почти турановские компоненты $G_1, \ldots, G_t$, и e лежит в G_1. Тогда можно добавить в компоненты $G_2, \ldots, G_t$ по одной красной вершине, при этом число независимости не изменится, а общее количество рёбер в графе увеличится не более, чем на $t - 1$.

(b) **Раскол по вершине**. Пусть при удалении нестабильной вершины v и нескольких лишних рёбер граф распадается на почти турановские компоненты $G_1, \dots, G_t$. Тогда можно добавить во все компоненты $G_1, \dots, G_t$ по одной красной вершине при этом число независимости не изменится, а общее количество рёбер в графе увеличится не более, чем на $t-1$.

Решение задачи 4.2 в рамках методов данной части не так просто (в том числе, поскольку результат раскола и даже число частей не определены однозначно). Эта задача будет решена далее с помощью гиперграфов. В дальнейшем можно использовать результат задачи 4.2 без доказательства (кроме задач, являющихся частными случаями данной теоремы).

4.3. (a) (!) Расколите пятиугольник по вершине.

(b) (!) Расколите произвольный нечётный цикл по вершине.

(c) (!) Расколите турановский граф на $n > 3$ вершинах, содержащий пару соседних вершин степени 2. Укажите все способы (расколы по ребру или по вершине).

(d) Какой способ из п. (b) гарантирует раскол ровно на две части?

(e) Приведите пример связного графа с лишними рёбрами, содержащего нестабильную вершину, раскол по которой невозможен (потребуется добавить слишком много рёбер).

Этот раздел посвящён расколу на две части (назовём такой раскол простым). Наша цель — не только доказать теорему о расколе, но и найти точки равенства (назовём раскол на t частей, при котором число рёбер в графе увеличивается ровно на $t-1$, бесплатным).

Пусть имеется турановский граф G. Пусть e — ребро из дополнения графа G. Граф назовём *e-предраскольным*, если он (1) представляет собой две почти турановские компоненты G_1, G_2, (2) получен из графа G добавлением ребра e и удалением всех рёбер, соединяющих G_1 с G_2, (3) имеет такое же число независимости, как и G.

4.4. Найдите, если возможно, e-предраскольный граф для (a) (!) цикла на пяти вершинах; (b) веретена Мозера.

Простой раскол по ребру.

Пусть имеется турановский граф G на m рёбрах. Граф получен *простым расколом графа G по ребру e*, если количество рёбер в нём не больше $m+1$, и он получен добавлением одной (красной) вершины в компоненту некоторого e-предраскольного графа, не содержащую e.

4.5. (!) Если для турановского графа существует e-предраскольный граф, то простой раскол возможен.

Указание к упражнению 4.5. Нужно использовать факт, что рёбра, соединяющие G_1 и G_2, изначально не были лишними. Далее ищем ключевое множество в G_2.

Назовём *стоимостью* графа без лишних рёбер разность между количеством рёбер и количеством компонент связности. Когда мы уменьшаем стоимость графа на 1, сохраняя разность между количеством вершин и количеством компонент связности, мы получаем 1 монету.

Задача 4.6 (**Простой бесплатный раскол по ребру**). Пусть возможен раскол графа G по ребру e на почти турановские части G_1, G_2. Предположим, что число рёбер в графе при этом расколе увеличится (другими словами, мы не можем получить монету при этом расколе). Пусть e лежит в G_1. Тогда

(a) в графе G из каждой вершины графа G_2 ведёт не более одного ребра в вершины графа G_1;
(b) вершины графа G_1, из которых в графе G ведут рёбра в вершины графа G_2, в объединении с концами ребра e образуют независимое множество;
(c) граф G можно расколоть по любому ребру, стягивающему вершины независимого множества из предыдущего пункта.

Задача 4.7 (**Элементарный раскол**). Пусть турановский граф G состоит из двух непустых подграфов G_1, G_2, и двух вершин u и v, причём из подграфа G_1 не ведут рёбра в G_2. Тогда
(a) вершины u и v независимы;
(b) после проведения ребра uv все рёбра, ведущие из u и v в один из подграфов (обозначим его G_2), станут лишними;
(c) вершины графа G_2, соединённые с u или v, образуют ключевое множество U;
(d) после добавления новой красной вершины x, соединённой с вершинами множества U, получится турановский граф $G_2 \cup \{x\}$;
(e) граф G_1 с проведённым ребром uv также турановский.

Задача 4.8. Пусть имеются два турановских графа, в каждом из которых хотя бы три вершины. Как «собрать из них» один турановский граф, уменьшив число вершин и рёбер на один?

Указание. Важно доказать, что в полученном графе нет лишних рёбер. Задача 4.8 позволяет за несколько шагов свернуть оптимальный граф в турановский (колоссальным числом способов). Такое действие мы называем рекомбинацией графов по ребру одного графа и вершине другого. Наша цель — доказать, что в построенном примере будет минимальное число рёбер (среди всех турановских графов с такими же характеристиками).

Задача 4.9. (!) Проведите элементарный раскол в следующих турановских графах, отличных от клики и содержащих:
(a) вершину степени 2;
(b) вершину степени 3, входящую в два треугольника.

Далее мы используем следующие обозначения (пусть подграф G_1 находится сверху, G_2 — снизу): X — шарнир, XX — возможность элементарного раскола

4.10. (!) Пусть турановский граф G состоит из вершины и подграфов G_1, G_2, причём имеется ровно одно ребро, соединяющее G_1 с G_2 (случай XI).
(a) Укажите, какие элементарные расколы по ребру возможны.
(b) Как получить в каждой части красное ребро?

4.11. (!) Пусть турановский граф G состоит из подграфов G_1, G_2, причём имеется ровно два ребра, соединяющее G_1 с G_2 (случай II). Что получится после двух элементарных расколов?

Теперь вернёмся к упражнениям 3.4 и 3.5. Если вы решили не все пункты, примените технику расколов. Считайте, что красная вершина стоит 4 очка (но не спешите удалять красную вершину степени 4 из графа).

Задача 4.12. (a) В задаче 3.5.b получены «худшие случаи» положения вершины степени 3. Какие в этих случаях возможны расколы?
(b) Сколько очков можно гарантированно получить в этих случаях при $\alpha > 2$? Постройте пример турановского графа с $\alpha = 3$, содержащего вершину степени 3, стоимостью 1 очко (равенство $m = 5n - 12\alpha + 1$).

(c) (*) Покажите, что при $\alpha > 3$ турановский граф, содержащий вершину степени 3, стоит больше одного очка (неравенство $m \geqslant 5n - 12\alpha + 2$).

Задача 4.13. Пусть турановский граф содержит треугольник из вершин степени 3, не входящих в другие треугольники.

(a) По каким рёбрам можно расколоть граф?

(b) Приведите пример такого графа на 8 вершинах. Что получается при расколах?

(c) (*) Разрешим некоторым рёбрам графа содержать больше одной вершины. (граф становится гиперграфом, который может содержать как простые рёбра, так и гиперрёбра). Расколите граф из п. (a,b) по гиперребру. Расколите гиперграф, полученный из п. (b), повторно.

(d) (*) Дайте общее определение элементарного раскола турановского гиперграфа. Какие условия на максимальное независимое множество в G_1 или G_2 достаточны для возможности элементарного раскола?

Простой раскол по вершине.

Пусть имеется турановский граф G на m рёбрах, а v — его нестабильная вершина. Граф назовём *v-предраскольным*, если он: (1) представляет собой две почти турановские компоненты G_1, G_2, (2) получен из графа G удалением вершины v и всех рёбер, соединяющих G_1 с G_2, (3) имеет такое же число независимости α, как G. Граф получен *простым расколом графа G по вершине v*, если количество рёбер в нём не больше $m + 1$, и он получен добавлением по одной вершине в каждую из обеих компонент некоторого v-предраскольного графа.

4.14. (!) Если существует v-предраскольный граф, то простой раскол возможен.

4.15. (*) Пусть турановский граф G состоит из двух вершин и подграфов G_1, G_2, причём имеется ровно одно ребро, соединяющее G_1 с G_2 (случай XXI). Докажите, что граф можно расколоть по одной из вершин.

Задача 4.16 (Симметричный раскол по вершине). Пусть в упражнении 4.14 невозможно провести раскол по вершине v так, чтобы получить монету. Кроме того, пусть невозможно расколоть граф по ребру, инцидентному v. Рассмотрим любой v-предраскольный граф $G_1 \sqcup G_2$, где G_1, G_2 суть его почти турановские компоненты.

(a) В графе G из каждой вершины графа G_1 ведёт не более одного ребра в вершины графа G_2.

(b) Вершины графа G_1, из которых в графе G ведут рёбра в вершины графа G_2, в объединении с $\{v\}$ образуют независимое множество U.

(c) $\alpha(G_i) \geqslant 3$ для $i = 1, 2$.

(d) (*) Приведите пример турановского графа, для которого возможен симметричный раскол по одной из вершин.

Итак, мы знаем многое про простые расколы и почти всё — про простые бесплатные расколы, верим в общий случай теоремы о расколе.

Первым применением данной техники станут линейные оценки со свободным членом для турановских графов.

4.17. Докажите для турановского графа на n вершинах с числом независимости α следующие оценки снизу на количество рёбер: (a) (!) $3n - 4\alpha - 2$; (b) $4n - 7\alpha - 3$; (c) (*) $kn - \frac{k^2-k+2}{2}\alpha - k + 1$ для каждого натурального $k \geqslant 3$.

Чтобы применить эту технику, вернёмся к задаче 3.3 (если вы решили ещё не все пункты, вернитесь к ним, вооружившись техникой расколов и неравенствами 4.12). Считайте, что красная вершина стоит 3 очка, но не спешите удалять красные вершины степени 3 — лучше расколите граф.

Задача 4.18. (*) Пусть турановский граф не содержит треугольников. Рассмотрим случай равенства $m = 5n - 10\alpha$.

(a) Граф не является 3-регулярным.

(b) Пусть одну из вершин можно расколоть. Тогда расколы следуют один за другим, вплоть до распада графа на клики.

(c) Все расколы — простые бесплатные. Если граф можно расколоть, выполняется равенство $n = 3\alpha - 1$.

(d) Все расколы — элементарные.

(e) Для каждого $\alpha > 1$ существует единственный пример с возможностью раскола. Все вершины в примере нестабильные.

(f) Существуют ли другие примеры?

5 Удаление вершины с соседями

Итак, мы научились корректно удалять любую вершину турановского графа без соседей. Теперь мы хотим научиться удалять вершину с соседями.

Назовём вершину наименьшей степени в турановском графе *стандартной*, если при удалении этой вершины и всех её соседей получается почти турановский граф. Кажется, что у нас не возникало проблем с удалением стандартной вершины. Но на самом деле, часто можно улучшить результат. Например, для вершины степени 2 хочется, чтобы удаление совпадало с расколом.

Пусть имеется стандартная вершина v турановского графа, не являющегося полным. Назовём *удалением вершины v с соседями* следующий процесс:

1) выбираются два несмежных соседа u_1, u_2 вершины v;
2) удаляются все соседи вершины v, кроме u_1 и u_2, и затем все лишние рёбра;
3) полученный граф раскалывается по ребру u_1u_2;
4) удалённые вершины возвращаются в клику vu_1u_2.

5.1. Если возможно, удалите с соседями:

1) (!) вершину пятиугольника;
2) вершину четырехугольной антипризмы;
3) (*) вершину икосаэдра.

Задача 5.2. Удаление стандартной вершины v с соседями определено корректно, то есть

(a) у v найдутся два несмежных соседа u_1, u_2;

(b) на втором шаге удаление вершин и лишних рёбер не может привести к нарушению связности графа;

(c) на третьем шаге граф можно расколоть по ребру u_1u_2, причём раскол простой.

Задача 5.3. Удаление стандартной вершины с соседями является расколом (то есть количество рёбер увеличивается не более чем на одно).

Тем не менее, число красных объектов увеличивается на $d - k + 2$, где d — степень удаляемой вершины v, а k — минимальный размер запрещённой клики (при условии, что v, её соседи и выходящие из них рёбра все синие, иначе лучше). Например, в графе без клики на четырёх вершинах удаление вершины степени 3 с соседями приводит к тому же результату, что и простой раскол. Как и при расколе, нас интересуют случаи, когда удаление вершины не даёт нам монет (в смысле раскола).

Задача 5.4. (*) Пусть невозможно получить монету при удалении вершины v степени d с соседями. Тогда выполняется одна из двух альтернатив:

1) вершина v лежит в клике на d вершинах, а граф можно расколоть по ребру;

2) вершина v имеет независимых соседей u_1, u_2, u_3;
   все остальные соседи вершины v соединены только с v, u_1, u_2, u_3 и между собой;
   все соседи вершины v имеют степень d;

Во втором пункте при $d > 3$ возникает несколько попарно соединённых вершин, имеющих один и тот же набор соседей. Мы будем называть такие вершины *клонами*.

Задача 5.5. (!) Пусть вершина v не является стандартной. Тогда процесс удаления этой вершины с соседями невозможен; однако его можно несложно модифицировать.

(a) Что делать, если на каком-то этапе второго шага граф перестаёт быть почти турановским?

(b) Что делать, если степень какого-то из соседей вершины v стала меньше степени самой v? Покажите, что мы можем не только продолжить процесс, но и получить монету за каждую из вершин, которые мы удалили к этому моменту.

Задача 5.6. Используя предыдущую задачу, докажите, что пример, построенный в задаче 4.8, оптимален.

Итак, мы получили точную оценку снизу на число рёбер в турановском графе. Далее мы ещё приблизимся к описанию оптимальных графов.

Для турановского графа G назовём *итоговым* граф G', для которого выполнены следующие свойства:

1) у графов G, G' одинаковое число независимости α;
2) количество вершин в G' на $\alpha - 1$ больше количества вершин в G;
3) компоненты графа G' суть клики, размеры которых отличаются не более, чем на один.

5.7. (a) Итоговый граф однозначно строится по количеству вершин и числу независимости исходного графа.

(b) Количество рёбер исходного графа не более, чем на $\alpha - 1$ меньше количества рёбер итогового графа.

5.8. (a) Степень любой вершины итогового графа не меньше двух.

(b) Средняя степень вершин турановского графа не меньше средней степени вершин его итогового графа.

(c) Равенства в предыдущих пунктах достигаются только для циклов нечётной длины.

(d) Степень некоторой вершины оптимального турановского графа не больше степени некоторой вершины его итогового графа.

Теперь мы получим дополнительные условия на графы, для которых достигается равенство (то есть опишем оптимальные турановские графы).

Задача 5.9. (a) Степень любой вершины оптимального турановского графа не меньше, чем наименьшая степень вершин итогового графа.

(b) Пусть оптимальным турановский граф нельзя расколоть по вершине v. Тогда степень вершины v не больше, чем наибольшая степень вершин итогового графа.

В предыдущей задаче практически появилось следующее понятие. Назовём *стабильным* турановский граф, который не является полным и который нельзя расколоть по вершине.

Задача 5.10. (a) Приведите пример стабильного графа.

(b) * Существует ли оптимальный стабильный граф?

(c) Степень любой вершины оптимального стабильного графа равна наибольшей степени вершин его итогового графа.

6 Гиперграфы

Назовём *гиперграфом* пару (V, F), где V — множество вершин, а F — множество гиперрёбер, которые являются подмножествами множества V, состоящими из как минимум двух вершин. (Заметим, что граф является частным случаем гиперграфа, у которого все гиперрёбра имеют мощность два.)

Подмножество вершин называется *независимым*, если никакое гиперребро не содержится в нём целиком. *Числом независимости* $\alpha(G)$ графа G называется размер максимального независимого множества.

6.1. (a) Количество гиперрёбер в гиперграфе не меньше, чем количество рёбер в оптимальном графе с таким же количеством вершин и числом независимости.

(b) Найдите все гиперграфы, для которых в предыдущем пункте достигается равенство.

Задача 6.2. Обобщите все введенные выше определения о графах на гиперграфы.

Как видно, неочевидно только обобщить понятие шарнира.

Вершина v гиперграфа (V, F) называется *шарниром*, если существует такое разбиение $V \setminus \{v\} = V_1 \sqcup V_2$, что никакое гиперребро из F не пересекается одновременно с V_1 и с V_2.

Вершина v гиперграфа (V, F) назовём *почти шарниром*, если существует такое разбиение $V \setminus \{v\} = V_1 \sqcup V_2$, что любое гиперребро из F, пересекающееся одновременно с V_1 и с V_2, содержит v.

6.3. Пусть гиперграф на самом деле граф. Эквивалентны ли для него определения шарнира в смысле графов и шарнира в смысле гиперграфов? Эквивалентны ли для него определения шарнира в смысле графов и почти шарнира?

Независимое множество U связного гиперграфа (V, F) назовём *шарнирным*, если существует такое разбиение $V \setminus U = V_1 \sqcup V_2$, что любое гиперребро из F, пересекающееся одновременно с $V_1 \sqcup U$ и с V_2, содержит U и не содержит больше никаких вершин из V_1.

Независимое множество U связного гиперграфа (V, F) назовём *почти шарнирным*, если существует такое разбиение $V \setminus U = V_1 \sqcup V_2$, что любое гиперребро из F, пересекающееся одновременно с $V_1 \sqcup U$ и с V_2, содержит U.

6.4. Имеются шарнир v и почти шарнир u (не обязательно различные). Для каждого из множеств $\{v\}$ и $\{u\}$ определите, является ли оно • шарнирным? • почти шарнирным?

Шарнирное множество U связного гиперграфа (V, F) назовём *правильным*, если дополнительно для разбиения $V \setminus U = V_1 \sqcup V_2$ из определения шарнирного множества выполнено, что любая вершина из V_2 содержится не более чем в одном гиперребре, пересекающемся с $V_1 \sqcup U$.

Следующая задача позволяет форсировать результат раскола графа с точностью до положения вершин, добавленных при расколе в каждую из частей, и наличия тех рёбер внутри каждой части, которые без добавления новой вершины являются лишними.

Задача 6.5. (a) Пусть при добавлении в турановский гиперграф гиперребра U и поcлелующем удалении лишних гиперрёбер он распадается на как минимум две почти турановские части. Как превратить U в почти шарнирное множество, сохранив количество гиперрёбер?

(b) Пусть при удалении из турановского гиперграфа вершины v и лишних рёбер он распадается на как минимум две почти турановские части. Как превратить v в почти шарнир, сохранив количество гиперрёбер?

6.6. Пусть два гиперребра турановского гиперграфа пересекаются по U, причём $|U| > 1$. Тогда можно или удалить некоторые рёбра, оставив гиперграф турановским, или превратить U в почти шарнирное множество.

Задача 6.7. Пусть в турановском гиперграфе есть почти шарнирное множество. Как получить турановский гиперграф с правильным шарнирным множеством, не увеличив количество рёбер?

7 Нетривиальные линейные оценки

Теперь, когда мы умеем корректно удалять вершины в турановском графе, как с соседями, так и без них, будем доказывать линейные оценки со свободным членом.

Сначала разберём случай, когда все расколы корректны.

Лемма 7.1. *При расколе планарного графа образуются только планарные графы.*

Теорема 7.2. *Пусть имеется планарный турановский граф на n вершинах с числом независимости α. Тогда количество рёбер в нём не меньше $6n - 14\alpha - 4$.*

Итак, получаются интересные оценки. Но в большинстве случаев, раскол не сохраняет ограничения на граф. Поэтому, мы окрасим вершины графа в два цвета: синие и красные. Ограничения будут наложены только на подграфы из синих вершин. Очевидно, что при расколе в каждой части появится одна красная вершина. При удалении некоторой вершины с соседями, в клике этой вершины может быть несколько красных вершин, а в остальных частях — по одной.

7.3. Пусть имеется турановский граф на n_1 синих и n_2 красных вершинах с числом независимости α. Пусть в нём нет синих треугольников (то есть клик на трёх синих вершинах). Тогда

(a) Количество рёбер в нём не меньше $5n_1 + 3n_2 - 10\alpha$.
(b) Равенство достигается только для оптимальных турановских графов.
(c) В случае равенства, число синих вершин равно $n_1 = 3\alpha - 1$.

Теперь вернёмся к выписанным ранее оценкам для графов без клики на 4 вершинах.

7.4. Пусть имеется турановский граф на n_1 синих и n_2 красных вершинах с числом независимости α. Пусть в нём нет клик на четырёх синих вершинах. Тогда количество рёбер $m \geqslant 5n_1 + 4n_2 - 11\alpha - 2$.

Для синего графа, эта оценка ровно на 2 монеты лучше, чем оценка для произвольного турановского графа.

Следующая оценка существенно сложнее, поэтому можно сдавать её по пунктам. Предлагается доказать по одной и той же схеме сразу две оценки: линейную и кусочно-линейную.

7.5. Пусть имеется турановский граф на n_1 синих и n_2 красных вершинах с числом независимости α, не являющийся четырехугольной антипризмой. Пусть в нём нет клик на четырёх синих вершинах. Тогда количество рёбер $3m \geqslant 19n_1 + 11n_2 - 50\alpha$ $m \geqslant 6n_1 + 4n_2 - 15\alpha - 1$

Первая из оценок примечательна тем, что это сильнейшая из опубликованных оценок для дистанционных графов. Её доказательство требует запрета трёх графов на 6 и 7 вершинах и опирается на существенный перебор. Вам предлагается не только доказать эту оценку для всех графов без K4, кроме антипризмы, но и найти все 4 случая равенства. Вторая оценка немного проще, зато сильнее первой при $n < 5\alpha - 3$.

7.6. (a) Пусть в графе есть красная вершина. Тогда можно либо получить монету, либо серией простых бесплатных расколов разбить граф на клики и графы из синей четырёхугольной антипризмы и красной вершины.

(b) Если в графе есть вершина степени менее 4 или нестандартная вершина степени 4, её можно удалить с соседями, далее п. (a).

(c) Если в графе есть 2 независимых вершины степени 4 с двумя общими соседями, одну из них можно удалить с соседями. Если она окажется стандартной, на следующем шаге мы не только восстановим баланс, но и получим монету.

(d) Пусть п. 1-3 не выполнены. Опишите все случаи множества соседей вершины v минимальной степени $d = 4$, которую невыгодно удалять с соседями. Что делать с 4-регулярным графом?

(e) Почему при удалении вершины степени 4 с соседями в случае равенства не получится антипризма?

(f) Разберите случай, когда степень всех вершин графа не менее 5.

7.7. (**) Пусть имеется турановский граф на n_1 синих, n_2 зелёных и n_3 красных вершинах с числом независимости α. Пусть в нём любая клика на четырёх вершинах содержит красную вершину, а любая антипризма - красную или зелёную вершину. Тогда либо количество рёбер $m \geqslant 7n_1+6n_2+4n_3-19\alpha$, либо граф - антипризма с одной зелёной вершиной и 7 синими, либо все вершины синие, и реализуется один из двух нетривиальных случаев равенства из предыдущей задачи ($n = 12$, $\alpha = 3$, $m = 26$).

Таким образом, для оценки $m \geqslant 9\alpha$ при $n = 4\alpha$ требуется не дистанционность графа, а существенно более слабые запреты. Но если вы хотите получить более простую оценку $m \geqslant 9\alpha$ или усилить её для дистанционных графов,

Кроме антипризмы, важнейший случай равенства — оптимальный турановский граф. Усиление оценки для дистанционных графов основано на борьбе с этим случаем. Чтобы точнее описывать серии расколов, мы введём в граф дополнительные объекты. Розовая вершина — красная вершина, не входящая в клику на 4 вершинах, из которых 3 синие, и 6 синих рёбрах (но входящая в другой запрещённый подграф).

7.8. (a) Пусть в турановском графе есть красная вершина v. Тогда либо граф — клика, либо v имеет степень более 4, либо v можно сделать розовой, либо возможен простой бесплатный раскол по ребру.

(b) Какие недистанционные подграфы нужно запретить, чтобы в условиях п. (a) при $\alpha > 3$ после одного или двух простых бесплатных расколов в графе появилось красное ребро, красная вершина степени более 4 или розовая вершина? Считаем, что откалываемые клики исчезают.

(c) В условиях предыдущего пункта при $\alpha > 4$ после трёх простых бесплатных расколов в графе появилась красная вершина степени более 4 или розовая вершина. Какой недистанционный подграф нужно запретить, чтобы она появилась после двух простых бесплатных расколов?

(d) Пусть в условиях п. (b) выполнено равенство $m = 6n_1+4n_2-15\alpha-1$ и есть красная вершина. Тогда $\alpha < 4$. Постройте все примеры с $\alpha = 2, 3$ (как видно из п. (c), единственный пример с $\alpha = 3$ — недистанционный).

Эти результаты позволяют получить более сильную оценку $m \geqslant 7n_1 + 4n_2 - 19\alpha$ для дистанционного графа G (в частности, ровно $m = 9\alpha$ при $n = 4\alpha$). Не умаляя общности, считаем граф турановским. Эту задачу тоже можно сдавать по пунктам.

7.9. (a) Пусть подграф из синих вершин G не является веретеном Мозера и содержит вершину степени менее 4. Как получить монету? Чем отличается случай, когда в G есть красная вершина A?

(b) Пусть в графе есть вершина степени 4, соседняя с вершиной степени 5. Как, затратив не более одной монеты, перейти к п. (a)?
(c) Решите задачу для 4-регулярного графа.
(d) Решите задачу для 5-регулярного графа.
(e) Завершите решение задачи. Запрет каких подграфов важен?

Интересно заметить, что оценку для дистанционных графов можно ЕЩЁ усилить! Для этого, технику красных рёбер придётся использовать в полную силу. Предлагается доказать такую нижнюю оценку:

$$2m \geqslant 12n - 29\alpha - 4.$$

Подсказка: опишем стоимости большинства объектов, учитывая, что *монета стоит 2 очка*:

- Синяя вершина — 12 очков
- Красная вершина — 8 очков
- Розовая вершина — 9 очков
- Красная вершина, которую по рекомбинации можно развернуть в синий ромб — 9 очков
- Красное ребро, соединяющее противоположные вершины синего ромба: +3 очка
- Красное ребро, любой конец которого можно сделать розовым: +2 очка
- Красное гиперребро (если потребуется): +2 очка

Если Вы добрались до этого места и скучаете в этот момент, то предлагаем вам попробовать улучшить любые оценки из этого раздела или найти точки равенства, т.е. ситуации, когда количество ребер графе в точности равно какой-либо нетривиальной нижней оценке из этого раздела. Мы полагаем, что получатся интересные результаты, и будем рады их обсудить: во время летней конференции или после нее, если у вас возникнет интерес к продолжению исследовательской деятельности в этом направлении. Желаем удачи!

Решения

1.1 Следует из упражнений 1.2 и 1.3. Если $n = q\alpha + r$, где $r < \alpha$, то в оптимальном графе будет r клик размера $q+1$ и $\alpha - r$ клик размера q, всего рёбер $T(n,\alpha) = (r\frac{q(q+1)}{2} + (\alpha - r)\frac{q(q-1)}{2})$.

1.2 Заметим, что при выкидывании вершины со всеми выходящими рёбрами число независимости не может увеличиться. Если число независимости не изменилось, то другие рёбра можно не выкидывать. Если оно уменьшилось, то будем выкидывать рёбра по одному. Заметим, что число независимости будет либо не меняться, либо увеличиваться на 1. Когда удалятся все рёбра, число независимости станет равно $n-1$. Но изначально оно не более $n-1$, так как в графе есть хотя бы одно ребро. Таким образом, по дискретной непрерывности можно найти набор рёбер, при удалении которого число независимости не измениться.

1.3

(a) Рассмотрим независимое множество в новом графе. Оно содержит не более одной вершины из N. Тогда, при необходимости заменив вершину из N вершиной v, мы получаем независимое множество такого же размера в исходном графе.

(b) Обозначим степень вершины v через d. Тогда в множестве N есть $d+1$ вершина степени не менее d, откуда рёбер с концами в N не менее $\frac{d(d+1)}{2}$. А в клике на $d+1$-й вершине рёбер ровно $\frac{d(d+1)}{2}$. Таким образом, мы удалим рёбер не меньше, чем добавим.

(c) Равенство достигается, если у всех вершин из N степени равны d, и каждое удалённое ребро соединяет две вершины из N. Нетрудно видеть, что в этом случае множество N образует клику, из которой не больше никаких рёбер не выходит.

1.4

(a) Докажем данное утверждение индукцией по α.

База. При $\alpha = 1$ оптимальным графом является только полный граф. **Переход от $\alpha < t$ к $\alpha = t$.** Применим операцию из задачи **??**. Так как граф оптимальный, то число рёбер не увеличится, и найдётся компонента связности, являющаяся кликой. Тогда граф на оставшемся множестве вершин является оптимальным для $\alpha < t$. Применяем предположение индукции и получаем, что весь граф состоит из непересекающихся клик.

(b) Если в одной клике k вершин, а в другой — $l > k+1$ вершин, то перебросим одну вершину из большей клики в меньшую. Тогда рёбер уменьшится на $l-1$, а увеличится всего на $k < l-1$, то есть уменьшится. А так как число независимости при такой операции не меняется, то данный граф не может быть оптимальным.

1.5 *Ответы:*

(a) Для нечётного n все рёбра лишние; для чётного лишние и нелишние рёбра чередуются, начиная с нелишних.

(b) Для чётного n все рёбра лишние, для нечётного n лишних рёбер нет.

(c) Лишних рёбер нет.

(d) Все рёбра лишние.

1.6 Предположим противное. Пусть у вершины v все соседи попарно соединены. Так как граф связный и не является кликой, то найдутся соединённые вершины u, w такие, что

u сосед v, а w — нет. Так как ребро $u-w$ не лишнее, найдётся максимальное множество, содержащее вершины u, w. Так как в максимальном множестве нет вершин степени хотя бы 2, то в выбранном множеств нет других соседей u, а, следовательно, и соседей v. Но тогда заменим в множестве вершину u на w. Число вершин не измениться, ребро $u-w$ пропадёт, новых не появится. Получим противоречие с максимальностью исходного множества.

2.2 Заметим, что в максимальном множестве не может быть вершины степени не меньше двух: при удалении любой такой вершины искомая разность уменьшается. При удалении вершины степени один искомая разность не изменяется. Поэтому если взять любое максимальное множество и по одной удалять вершины степени 1, мы придём к независимому множеству с тем же значением разности. А так как есть хотя бы одно независимое множество, являющееся максимальным, то все максимальные независимые множества будут максимальными.

2.3 ($\Rightarrow$) Пусть есть максимальное множество, содержащее ребро. Тогда при его удалении в этом множестве разность числа вершин и числа рёбер возрастёт, следовательно, возрастёт и размер максимального независимого множества. Значит, ребро не было лишним.

($\Leftarrow$) Пусть ребро лишнее. При его удалении число независимости увеличивается ровно на 1. Удалим его и выберем любое максимальное независимое множество. Это множество и будет максимальным в исходном графе: в исходном графе разность числа вершин и рёбер подмножества уменьшится на один и станет равна числу независимости исходного графа.

2.4 Так как граф связный и в нём больше одной вершины, то степень каждой вершины не меньше одного. Пусть дана вершина. Возьмём любое ребро, выходящее из неё. Это ребро нелишнее, поэтому по задаче 2.3 найдётся максимальное множество, содержащее выбранное ребро, а, следовательно, и данную вершину.

Как мы выясняли, все степени в максимальных множествах не больше двух. Тогда степень данной вершины в полученном максимальном множестве равна 1. Тогда выкинув из него данную вершину, получим максимальное множество, её не содержащее.

2.6

Рассмотрим произвольную вершину v, а N — объединение множества её соседей и $\{v\}$. Докажем, что N — ключевое.

Сначала покажем, что N несвободное. Действительно, пусть X — максимальное множество, не пересекающееся с N. Тогда в множестве $X \cup \{v\}$ на одну вершину больше и сколько же рёбер в сравнении с X, что противоречит максимальности X.

Теперь пусть $u \in N$. Покажем, что существует максимальное множество, не пересекающееся с $N \setminus \{u\}$. Рассмотрим ребро с концами v и u. (Если $v = u$, выберем любое ребро, выходящее из v). Так как выбранное ребро не лишнее, то по упражнению 2.3 существует максимальное множество X, содержащее u и v. Выкинем по одной вершины $(X \cup N) \setminus \{v, u\}$. Так как все выкидываемые вершины соединены с v, то при выкидывании вершины мы уменьшаем число вершин на 1, а число рёбер — хотя бы на 1. Следовательно, при выкидывании множество останется максимальным. Наконец, при необходимости выкинув v, мы получим максимальное множество, не пересекающееся с $N \setminus \{u\}$.

2.7 Предположим противное. Пусть G — турановский граф, а v — вершина, при удалении которой граф теряет связность. При этом $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 и G_2 — подграфы, пересекающиеся только по вершине v.

Наблюдение. Множество $X \ni v$ максимально в G тогда и только тогда, когда $X \cap V(G_1)$ максимально в G_1, а $X \cap V(G_2)$ максимально в G_2.

Выберем произвольные рёбра e_1 и e_2 с концами в v, ведущие в G_1 и G_2 соответственно. Так как они не лишние, то существуют максимальные множества X_1 и X_2 подграфов G_1

и G_2 соответственно, их содержащие. Тогда по наблюдению $X_1 \cup X_2$ максимально в G. Однако, вершина v имеет степень хотя бы 2 в индуцированном подграфе. Противоречие.

2.8

(a) Будем доказывать утверждение индукцией по n. *База* $n = \alpha + 1$: оценка теоремы Турана даёт одно ребро, а в связном графе на $\alpha + 1$ вершине хотя бы α рёбер.
Переход. Пусть дан связный граф на n вершинах с числом независимости α. Будем по одному удалять лишние рёбра, не нарушая связности. Когда мы остановимся, возможны два случая.
Осталось хотя бы одно лишнее ребро, при удалении которого граф теряет связность. Удалим это ребро. Пусть β и γ числа независимости компонент связности, $\beta + \gamma = \alpha$. По предположению в первой компоненте рёбер хотя бы на $\beta - 1$ больше, чем в оптимальном графе, во второй компоненте хотя бы на $\gamma - 1$ больше, чем в соответствующем оптимальном графе. Следовательно, исходно рёбер хотя бы на $1 + (\beta - 1) + (\gamma - 1) = \alpha - 1$ больше, чем в графе, являющимся объединением двух оптимальных. А в любом графе с числом независимости α число рёбер не меньше соответствующей оценки Турана. Данный случай рассмотрен.
Получился турановский граф на n вершинах. Так как для него верна оценка из теоремы Турана, то найдётся вершина со степенью хотя бы $\lceil \frac{n}{\alpha} \rceil - 1$. Удалим её. По задаче 2.7 граф останется связным. Число независимости станет не более α. Применим предположение индукции к полученному графу. В полученном графе рёбер хотя бы на $\alpha - 1$ больше, чем в оптимальном графе теореме Турана на $n - 1$ вершине, а удалили мы вершину степени не меньше, чем максимальная степень вершины оптимального графа на n вершинах. Следовательно, в исходном графе рёбер хотя бы на $\alpha - 1$ больше, чем в оптимальном графе на n вершинах.

2.9

(a) Как следует из упражнения 1.5, для нечётного n подойдёт путь, а для чётного — цикл.

(b) Предположим противное. Пусть ребро e_1 — лишнее, и при его удалении ребро e_2 становится лишним. Так как изначально e_2 нелишнее, то по упражнению 2.3 найдётся максимальное множество, содержащее оба конца ребра e_2. Но так как e_1 лишнее, то при его удалении число независимости сохраняется, и выбранное множество останется максимальным. Следовательно, ребро e_2 останется нелишним.

2.10

(a) Веретено Мозера с проведённым ребром таким образом, чтобы не образовалось клики на 4 вершинах.

(b) Пятиугольник с диагональю. Удаляя разными способами, мы можем оставить либо пятиугольник, либо несвязный граф, компоненты которого — треугольник и ребро.

2.11

(a) Сначала покажем, что при добавлении вершины v, соединённой с некоторым несвободным множеством U, число независимости не меняется. Предположим противное. Тогда есть максимальное независимое множество X большего размера. Очевидно, оно содержит v. Тогда оно должно не содержать вершин из U. Но тогда по определению несвободности множество $X \setminus \{v\}$ не может быть максимальным в исходном графе. Тогда в X вершин не больше, чем число независимости исходного графа. Противоречие.
Теперь покажем, что полученный граф является турановским. Все нелишние рёбра исходного графа остаются нелишними, ведь максимальные множеств, содержащие эти рёбра, остаются максимальными. Рассмотрим произвольно ребро $v - u$, $u \in U$ и проверим, что оно также нелишнее.

Так как множество U ключевое, то $U \setminus \{u\}$ — свободное. Рассмотрим максимальное множество X в исходном графе, не пересекающееся с $U \setminus \{u\}$. Добавим к X вершину v. Добавится 1 вершина и 1 ребро. Получим максимальное множество $X \cup \{v\}$, содержащее вершины u, v, откуда ребро $u - w$ нелишнее. Следовательно, полученный граф также является турановским.

(b) Из предыдущего пункта можно извлечь, что число независимости графа не изменилось, и все рёбра, выходящие из вершины v, являются нелишними.

3.1 Докажем оценку в общем виде: для произвольного натурального k будет выполнено неравенство $m \geqslant kn - \frac{k(k-1)}{2}\alpha$.

Наблюдение. Пусть дан граф G из n вершин, и степень каждой вершины не больше d. Тогда число независимости G не меньше $\lceil \frac{n}{d+1} \rceil$.

Доказательство наблюдения. Явно построим независимое множество нужного размера. Выберем произвольную вершину и добавим в независимое множество. Выкинем из графа выбранную вершину и всех её соседей. Добавим произвольную оставшуюся вершину в независимое множество, выкинем её и всех соседей из графа. Повторяя эти действия, мы действительно получим независимое множество размера не меньше $\lceil \frac{n}{d+1} \rceil$.

Доказательство оценки. Предположим противное и рассмотрим минимальный по количеству вершин граф G, не удовлетворяющий оценке.

Выберем произвольное максимальное независимое множество A, а множество остальных вершин обозначим через B. Предположим, что в B есть хотя одна вершина (глобальной) степени не меньше k. Удалим её. Получим граф на $m' \leqslant m - k$ рёбер, $n' = n - 1$ вершинах с числом независимости α. По предположению $m' \geqslant kn' - \frac{k(k-1)}{2}\alpha$, откуда и следует, что и для граф G удовлетворяет оценке.

Теперь предположим, что в B все степени вершин не больше $k-1$. При этом из каждой вершины в $v \in B$ должно вести хотя бы одно ребро в A, иначе $A \cup \{v\}$ также было бы независимым. Временно выкинем из графа G все вершины из A. Получим граф на $n - \alpha$ вершинах, степень каждой из которой не больше $k - 2$, а число независимости не больше α. Применяя наблюдение, полчаем оценку $\alpha \geqslant \lceil \frac{n-\alpha}{k-1} \rceil$, или $\alpha kgeqn$.

Наконец, оценим m. Суммарная степень вершин в B не меньше $(n-\alpha)(k-1)$, при этом хотя бы $n-\alpha$ рёбер имеет ровно 1 конец в B. Таким образом, получаем $m \geqslant (n-\alpha)+(n-\alpha)\frac{k-1}{2}$. Добавив к правой части величину $\frac{k-1}{2}(n-k\alpha)$, которая является неположительной, мы и получим требуемую оценку.