Уклонения многочленов и критические значения

Проект представляют

Navid Safaei, Ярослав Абрамов, Ольга Бурсиан и Константин Кохась

В этом проекте обсуждаются некоторые свойства многочленов. Вы можете без ограничений пользоваться теоремами из «начального» курса математического анализа, в частности, следующими теоремами.

Теорема (Больцано–Коши о промежуточном значении). Если непрерывная функция f имеет на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, то у нее на этом отрезке имеется корень.

Теорема (Вейерштрасса). Любая непрерывная функция f, заданная на отрезке $[a, b]$ ограничена и достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

1 Несколько предварительных задач

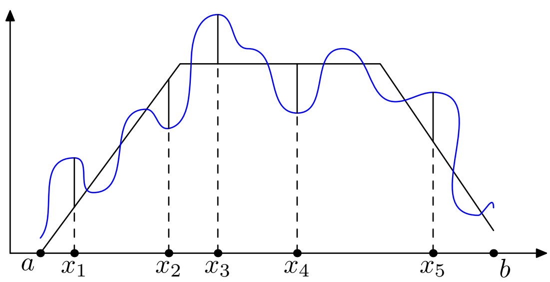
В этом разделе приведено несколько задач для знакомства с темой. Не все из этих задач простые и не обязательно решать их «в первую очередь».

1.1. Для произвольного многочлена $F(x)$ положим $F^{[n]}(x) = \underbrace{F(F(\ldots F}_{n\text{ раз}}(x)))$. Докажите, что существует такой кубический многочлен $P(x)$, что для каждого натурального N следующее уравнение имеет 3^N различных вещественных корней на отрезке $[-1, 1]$ a) $P^{[N]}(x) = 0$; b) $P^{[N]}(x) = x$.

1.2. Пусть $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ при всех $x \in [-1, 1]$. Докажите, что $|2ax + b| \leqslant 4$ при $|x| \leqslant 1$.

1.3. Пусть n — натуральное число и на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция f (можно для простоты думать, что она кусочно-линейная, как на рисунке). Для каждого многочлена F степени n обозначим

$$M(F) = \max_{x \in [a,b]} |F(x) - f(x)|.$$



Допустим, что нашелся многочлен F_n степени n, для которого величина $M(F_n)$ принимает минимальное значение. Докажите, что на отрезке $[a, b]$ найдутся такие точки $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$, что при всех k

$$F_n(x_k) - f(x_k) = \pm M(F_n)$$

и для любой пары соседних точек x_k, x_{k+1} разность $F_n(x) - f(x)$ имеет противоположные знаки.

1.4. Докажите, что каковы бы ни были заданные n точек A_1, A_2, …, A_n на плоскости, произведение расстояний

$$MA_1 \cdot MA_2 \cdot \ldots \cdot MA_n$$

от них до точки M, пробегающий данный отрезок $[a, b]$ длины $b - a = 2h$, не может оставаться все время менее $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.

1.5. Задача «о стакане». «Стакан» — это фигура на декартовой плоскости, изображенная на рисунке. Ширина стенок и донышка стакана равна δ. Существуют ли сколь угодно большие n, для которых график многочлена степени n проходит внутри «стеклянной» части стакана, если

a) $\delta = \frac{1}{n}$ b) $\delta = \frac{1}{n^3}$?

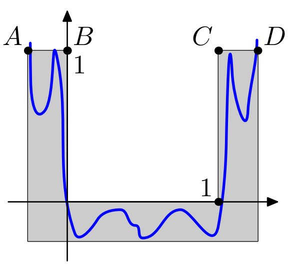


График должен заходить в закрашенную область, пересекая отрезок AB, и выходить из нее, пересекая CD.

2 Многочлены, мало отклоняющиеся от 0

Уклонением (от 0) многочлена F на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ будем называть величину

$$M(F) = \max_{x \in [a,b]} |F(x)|.$$

Многочлен F, у которого $M(F) \leqslant 1$ на заданном отрезке, будем называть *малоуклоняющимся.* Напомним, что многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называется *унитарным.* В этом проекте мы рассматриваем многочлены только с вещественными коэффициентами (хотя в решениях можно использовать и комплексные числа).

Докажем, что среди всех унитарных многочленов степени n существует многочлен F_n, уклонение которого $M(F_n)$ на отрезке $[-1, 1]$ принимает наименьшее возможное значение.[1]

Допустим, что для некоторого числа c мы нашли унитарный многочлен F_n, для которого $M(F_n) = c$ и при этом (как в задаче 1.3) *существуют такие точки* $-1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant 1$, *что при всех* k

$$F_n(x_k) = \pm M(F_n),$$

причем для любой пары соседних точек x_k, x_{k+1} *значения* $F_n(x_k)$ *и* $F_n(x_{k+1})$ *имеют противоположные знаки.* Проверим, что тогда c — это минимально возможное уклонение для всех унитарных многочленов степени n.

Действительно, допустим, что нашелся многочлен Q с меньшим уклонением. Тогда в пределах отрезка $[-1, 1]$ график многочлена F_n лежит в горизонтальной полосе ширины $2c$ и выходит на ее границу в точках $(x_k, F_n(x_k))$, а график многочлена Q лежит строго внутри полосы, см. рис. 1. Проведем через точки x_k вертикальные (пунктирные) прямые, они вырежут из полосы n прямоугольников. Внутри каждого прямоугольника графики P_n и Q имеют хотя бы одну точку пересечения. Но это невозможно, поскольку многочлен $P_n - Q$ имеет степень не больше $n - 1$ и не может иметь n корней.

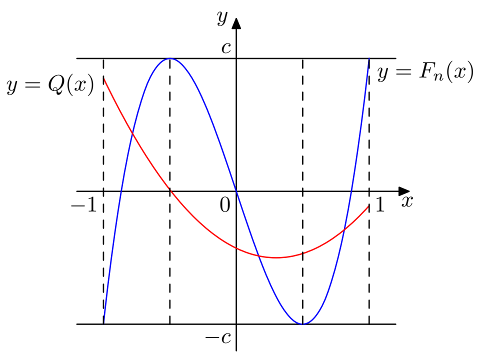


Рис. 1.

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

Рис. 2. Полиномы Чебышева

Более того, в описанной ситуации F_n — единственный унитарный многочлен, уклонение которого равно c (этот вопрос вынесен в задачу 2.1).

Таким образом, осталось «угадать» многочлен, удовлетворяющий свойству, выделенному выше курсивом. Эта конструкция широко известна. Заметим, что при натуральных n функция $\cos nx$ с помощью тригонометрических преобразований может быть выражена через $\cos x$ и получаемая формула как раз полиномиальная: $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1$, $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$ и т. д. Таким образом, функция

$$T_n = \cos(n \arccos x)$$

является многочленом (степени n). Он называется *многочленом Чебышева* первого рода. Сразу по определению получаем, что $|T_n(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$ и

$$T_n(x_k) = (-1)^k, \quad \text{при } x_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Значит, $M(T_n) = 1$, а в качестве многочленов F_n из предыдущего рассуждения следует взять $F_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$, при этом $c = M(F_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

[1] Это рассуждение взято из [6, лекция 7].

Несколько первых многочленов Чебышева приведены в таблице (рис. 2). Приведем еще несколько полезных формул.

$$T_n(x) = 2^{n-1}\Big(x-\cos\frac{\pi}{2n}\Big)\Big(x-\cos\frac{3\pi}{2n}\Big)\Big(x-\cos\frac{5\pi}{2n}\Big)\dots\Big(x-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\Big) \quad \text{при } x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\big(x+\sqrt{x^2-1}\,\big)^n + \frac{1}{2}\big(x-\sqrt{x^2-1}\,\big)^n \qquad \text{при } x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1). \tag{2}$$

$$2T_n(x) = (2x)^n - \frac{n}{n-1}\cdot C^1_{n-1}(2x)^{n-2} + \frac{n}{n-2}\cdot C^2_{n-2}(2x)^{n-4} - \frac{n}{n-3}\cdot C^3_{n-3}(2x)^{n-6} + \dots \tag{3}$$

2.1. Докажите, что многочлен F_n из приведенного выше рассуждения определен однозначно.

2.2. Докажите, что для любого многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_dx^d$ (где $d \geqslant 1$) выполняется неравенство

$$\max_{x\in[a,b]} |P(x)| \ \geqslant \frac{|a_d|}{2^{2d-1}}(b-a)^d.$$

Причем равенство достигается только для многочлена $P(x) = \dfrac{a_d(b-a)^d}{2^{2d-1}}\cdot T_d\Big(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\Big)$. Заодно докажите, что в случае равенства

$$P(x) = \frac{a_d}{2^{d-1}}.\sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor} C_d^{2k}(x-a)^k(x-b)^k\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^{d-2k}.$$

2.3. Докажите следующее экстремальное свойство многочленов Чебышева. Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени не выше n, причем

$$\max_{x\in[-1,1]} |F_n(x)| = 1.$$

Тогда при всех вещественных x, $|x| > 1$, выполняется неравенство $|F_n(x)| \leqslant |T_n(x)|$.

2.4. Пусть $P(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}x^iy^j$ для некоторых натуральных m, n.

а) Пусть $a_{mn} = 2^{m-1}2^{n-1}$. Докажите, что $\max\limits_{-1\leqslant x,y\leqslant 1} |P(x,y)| \ \geqslant 1$, причем равенство имеет место только для $P(x,y) = T_m(x)T_n(y)$.

b) Пусть многочлен $P(x,y)$ имеет целочисленные коэффициенты и не является константой ни по x, ни по y. Докажите, что $\max\limits_{-2\leqslant x,y\leqslant 2} |P(x,y)| \ \geqslant 4$.

2.5. Пусть x_k — корни многочлена Чебышева T_n, где n — четно. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2} = n^2$.

2.6. Докажите, что при всех натуральных m, n (где $m > n$) и целых x число

$$(T_{m+n}(x)-1)(T_{m-n}(x)-1)$$

является точным квадратом.

3 Свойства малоуклоняющихся полиномов

3.1. Пусть $|ax^2+bx+c| \leqslant 1$ при $x\in[-1,1]$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \leqslant 5$.

3.2. Пусть $|ax^3+bx^2+cx+d| \leqslant 1$ при $x\in[-1,1]$. Докажите, что $|a| \leqslant 4$, $|a|+|b| \leqslant 4$, $|c| \leqslant 3$, $|a|+|b|+|c|+|d| \leqslant 7$.

3.3. Пусть $P(x)$ — многочлен степени d, такой что $|P(x)| \leqslant 1$ при $x\in[-1,1]$. Докажите, что

$$|P(2)| < 4^d.$$

3.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не более 2018, такой что $|P(x)| \leqslant \frac{1}{|x-\sqrt{3}|}$ при $x\in[-2,2]$. Докажите, что $|P(\sqrt{3})| \leqslant 2019$.

3.5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не более n, такой что $|P(x)| < \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $0 < x < 1$. Докажите, что $|P(0)| \leqslant 2n + 1$.

3.6. Пусть $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$ — малоуклоняющийся многочлен: $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что

$$|a_d| + |a_{d-1}| \leqslant 2^{d-1}.$$

3.7. Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ — многочлен степени не более n, такой что $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$. И пусть $T_n(x) = t_n x^n + \ldots + t_0$ — это n-й многочлен Чебышева. Докажите, что

a) $|a_{n-2m}| \leqslant |t_{n-2m}|$ при $m = 0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Равенство достигается при $P(x) = \pm T_n(x)$.

b) $|a_{n-2m}| + |a_{n-2m-1}| \leqslant |t_{n-2m}|$ при $m = 0, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Равенство только при $P(x) = \pm T_n(x)$.

3.8. (Неравенство Бернштейна) Если $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени n и $|P(x)| \leqslant 1$ на $[-1, 1]$, то $|P'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$ на $(-1, 1)$.

3.9. (Теорема Маркова) Пусть многочлен n-й степени $P(x)$ удовлетворяет неравенству $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что

$$|P'(x)| \leqslant n^2.$$

Равенство достигается только для многочленов $P = \pm T_n$ и только в точках $x = \pm 1$.

4 Интерполяционная формула Лагранжа

Многочлен степени n однозначно задается своими значениями в $n+1$ точке, причем можно выписать явную формулу. Пусть мы выбрали (попарно различные) точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ и ищем многочлен $F(x)$, который в точках x_k принимает значения y_k:

$$F(x_k) = y_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Положим $G(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})$. В произведении, задающем $G(x)$, пропустим k-ю скобку и рассмотрим дробь, в которой числитель содержит остальные скобки, а знаменатель содержит те же скобки, но в них вместо x подставлено x_k:

$$\Pi_k(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_{n+1})}.$$

Очевидно, что $\Pi_k(x_k) = 1$ и $\Pi_k(x_j) = 0$ при $j \neq k$. Произведение $\Pi_k(x)$ можно записать в более коротком виде

$$\Pi_k(x) = \frac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}.$$

Тогда для интересующий нас многочлен $F(x)$ задается формулой (*интерполяционная формула Лагранжа*):

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \cdot \frac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}. \tag{4}$$

Её можно использовать также и для изучения коэффициентов многочлена F, отслеживая коэффициенты при x^k в обеих частях этого тождества.

4.1. Докажите, что $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(k-1)\pi}{n-1}} = \frac{n(n-2)}{3}$.

4.2. Пусть $\theta_k = (k - \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$, где $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = 2n^2$.

4.3. Пусть $x_k = \cos \theta_k$, $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что любой многочлен $P(x)$ степени не выше $n - 1$ удовлетворяет тождеству

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} P(x_k) \sqrt{1 - x_k^2} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k}.$$

4.4. Пусть $x_k = \cos \theta_k$, $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1 - x x_k) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_k)} \right)^2 = 1$.

5 Уклонение на других множествах

5.1. Пусть $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$ — многочлен, малоуклоняющийся на двух отрезках: $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [0, 1] \cup [99, 100]$. Найдите наибольшее возможное значение $P(50)$
a) при $d = 2$; b) при $d = 100$.

5.2. Пусть A — объединение конечного количества отрезков на вещественной прямой. Илья нашел непостоянный многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами со старшим коэффициентом 1 такой, что $|Q(x)| < 1{,}999$ при всех $x \in A$. Докажите, что *Навид* может найти непостоянный многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами со старшим коэффициентом 1 такой, что $|P(x)| < 1$ при всех $x \in A$.

5.3. На вещественной прямой даны три непересекающихся отрезка $[-b; -a]$, $[-c; c]$ и $[a; b]$, причем $b^2 = a^2 + c^2$. Докажите, что многочлен $f(x)$ степени $2n$ с единичным старшим коэффициентом не может на этих отрезках по абсолютному значению быть меньше чем $2\left(\frac{ac}{2}\right)^n$.

5.4. Теорема Пойя. Пусть S — подмножество $\mathbb{R}$, представляющееся в виде объединения конечного числа непересекающихся отрезков, ℓ — сумма длин этих отрезков. Тогда для любого многочлена $f(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом найдется такое число $y \in S$, что

$$|f(y)| \geqslant 2\left(\frac{\ell}{4}\right)^n.$$

Причем, если S не является отрезком, то знак в неравенстве строгий.

5.5. Найдите унитарный многочлен степени n, имеющий наименьшее уклонение на множестве $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

6 После промежуточного финиша

6.1. Докажите следующее усиление задачи 2.3. Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени n, причем

$$\max_{x \in [-1,1]} |F_n(x)| = 1.$$

Тогда при всех вещественных x, $|x| > 1$, и всех $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ выполняется неравенство для производных: $|F_n^{(j)}(x)| \leqslant |T_n^{(j)}(x)|$.

6.2. Докажите следующее усиление задачи 3.7. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени не более n, такой что

$$|P(\alpha_i)| \leqslant 1, \qquad \text{где} \ \ \alpha_i = \cos\frac{i\pi}{n}\ ,\ i = 0,\ \ldots,\ n.$$

Тогда верны оба утверждения a) и b) задачи 3.7.

6.3. Докажите тригонометрическую модификацию задачи 3.8. Пусть

$$P(\varphi) = a_0 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\big)$$

— тригонометрический многочлен порядка n с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$. Положим $M = \max\limits_{\varphi \in \mathbb{R}} |P(\varphi)|$. Докажите, что

$$|P'(\varphi)| \leqslant nM \qquad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

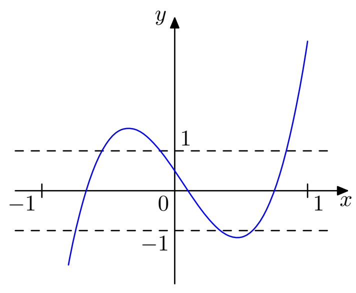
6.4. Докажите, что для любого натурального n существует многочлен $P(x)$ степени не больше $100n$, такой что

$$|P(0)| > |P(1)| + \ldots + |P(n^2)|.$$

Решения

1 Несколько предварительных задач

1.1.



Первое решение. В этой задаче ничего не нужно знать о многочленах Чебышева, подойдет любой кубический многочлен, который троекратно накрывает отрезок $[-1,1]$, т. е. для которого каждая точка отрезка $[-1,1]$ имеет три прообраза. Например, можно выбрать любые $a,b,c\in(-1,1)$ и тогда подойдет многочлен $F(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)$, где число A выбирается настолько большим, чтобы локальные экстремумы F были по модулю больше 1.

Второе решение. Пусть $P(x)=4x^3-3x$, тогда $P(\cos\theta)=\cos(3\theta)$. Поскольку функция $f(\theta)=\cos\theta$ является биекцией на отрезке $[0,\pi]$, ясно, что $P([-1,1])=[-1,1]$ и

$$P^{[2]}(\cos\theta)=P(\cos(3\theta))=\cos(9\theta)$$

Аналогично, $P^{[N]}(\cos\theta)=\cos(3^N\theta)$.

Из первого уравнения $\cos(3^N\theta)=0$ получаем 3^N различных корней: $\theta=3^{-N}(2k+1)\pi/2$, $k=0,\cdots,3^N-1$. Из второго уравнения $\cos(3^N\theta)=\cos\theta$ имеем $(3^N\pm1)\theta=2k\pi$ и тоже получаем 3^N различных корней: $\theta=(2k\pi)/(3^N+1)$, $k=1,\cdots,\frac{3^N+1}{2}$.

1.2. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку $f'(x)=2ax+b$ — линейная функция, ее максимум модуля достигается на границе отрезка, т. е. достаточно проверить неравенство только при $x=\pm1$. Взяв $x=1$, заметим, что

$$2a+b=1{,}5(a+b+c)+0{,}5(a-b+c)-2c=1.5f(1)+0.5f(-1)-2f(0).$$

Тогда

$$|2a+b|\leqslant 1.5|f(1)|+0.5|f(-1)|+2|f(0)|\leqslant 4.$$

Проверка неравенства при $x=-1$ делается аналогично. Или можно применить уже сделанную оценку к функции $f(-x)$, имеющей то же уклонение 1.

Задачу можно рассматривать как простое следствие задачи 3.7. Действительно, при $|x|\leqslant1$

$$|2ax+b|\leqslant 2|a||x|+|b|\leqslant 2|a|+|b|=|a|+\big(|a|+|b|\big)\leqslant 2+2=4.$$

Здесь последнее неравенство использует оба пункта задачи 3.7 (при $n=2$, $m=2$), в которых сравниваются коэффициенты малоуклоняющегося многочлена степени 2 со старшим коэффициентом T_2.

1.3. См. [2, §5, с. 16–18]. Идея проста: если таких точек будет меньше, чем указано, то многочлен F_n можно «подправить», уменьшив его отклонение $M(F_n)$.

Отметим, что условие задачи допускает, что у многочлена F_n могло бы быть несколько последовательно расположенных точек максимального отклонения, в которых знак выражения $F_n(x)-f(x)$ одинаков. Тогда в набор x_k мы могли бы включить лишь какую-то одну из этой серии точек.

Допустим, что мы смогли построить лишь набор $x_1,\ldots x_p$ из $p\leqslant n$ таких точек. Разобьем отрезок $[a,b]$ на p отрезков (переобозначим $a=a_0$, $b=a_p$)

$$[a,b]=[a_0,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup\ldots\cup[a_{p-1},a_p]$$

так, чтобы в каждый отрезок $[a_{i-1},a_i]$ входили лишь точки отклонения одинакового знака, включая x_i. Тогда на каждом таком отрезке

$$-M(F_n)\leqslant\max_{x\in[a_{i-1},a_i]}|F_n(x)-f(x)|\leqslant M(F_n),$$

где один из знаков неравенства обязательно строгий. Тогда по теореме Вейерштрасса найдется такое α, $0 < \alpha < M(F)$, (можно считать, что это α одно и то же для всех отрезков) что на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ выполняется лишь одно из неравенств

$$-M(F_n) \leqslant F_n(x) - f(x) < M(F_n) - \alpha, \qquad \text{или} \qquad -M(F_n) + \alpha < F_n(x) - f(x) \leqslant M(F_n).$$

Положим $Q(x) = \pm(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{p-1})$, где знак выбирается так, чтобы на всех отрезках $[a_{i-1}, a_i]$ знак $Q(x)$ совпадал со знаком $F_n(x_i) - f(x_i)$. Выберем теперь небольшое положительное число ε так, чтобы выполнялось неравенство $\max\limits_{x\in[a,b]} |\varepsilon Q(x)| < \alpha$. Тогда при всех $x \in [a, b]$

$$-M(F_n) < F_n(x) - \varepsilon Q(x) - f(x) < M(F_n).$$

Очевидно, что $\deg Q \leqslant n-1$, значит, $F_n-\varepsilon Q$ — многочлен степени n, дающий меньшее отклонение, чем F_n. Противоречие.

1.4. [7, задача 135]. Полагая, что речь идет о комплексной плоскости, мы можем считать, что отрезок $[a, b]$ совпадает с отрезком $[-h, h]$ вещественной оси. Расстояние от переменной точки z до точки A_k можно записать как $|z - A_k|$. Тогда требуется доказать, что

$$\max_{z\in[-h,h]} \big|(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_n)\big| \geqslant 2\Big(\frac{h}{2}\Big)^n.$$

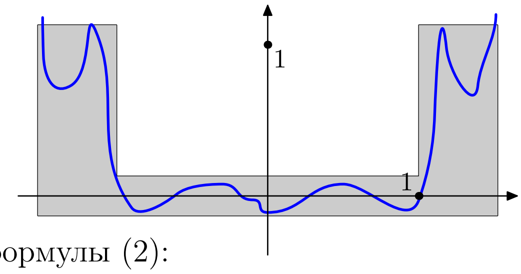
Выражение под модулем — (произвольный) унитарный многочлен с комплексными коэффициентами. Требуемое неравенство следует из минимаксного свойства полиномов Чебышева, если мы проверим, что полиномы Чебышева имеют минимальное уклонение в классе полиномов с комплексными коэффициентами. Это вытекает из следующих соображений.

Поскольку $z \in [-h, h] \subset \mathbb{R}$, мы фактически рассматриваем наш многочлен как комплексно-значный многочлен вещественной переменной, запишем его в виде

$$F(z) = (z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_n) = F_1(z) + iF_2(z),$$

где коэффициенты многочленов F_1 и F_2 — это соответственно вещественные и мнимые части коэффициентов $F(z)$. Заметим, что $\deg F_1 = n$, $\deg F_2 \leqslant n-1$ и $|F(z)| = |F_1(z)+iF_2(z)| \geqslant |F_1(z)|$.

1.5. О т в е т: a) существует, b) не существует.



Чтобы не возиться с масштабированием многочленов, зафиксируем начало координат, растянем стакан в 2 раза по горизонтали, после чего сдвинем на вектор $(-1, \frac{\delta}{2})$. Тогда в пределах промежутка $[-1, 1]$ мы имеем многочлен F с уклонением $\frac{\delta}{2}$. Попробуем взять $F = \frac{\delta}{2}T_n$ с четным n.

a) Пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Оценим величину $F(1 + \frac{2}{n})$ с помощью формулы (2):

$$F\Big(1+\frac{2}{n}\Big) = \frac{1}{4n}\bigg(1+\frac{2}{n}+\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}\bigg)^n + \frac{1}{4n}\bigg(1+\frac{2}{n}-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}\bigg)^n > \frac{1}{4n}\Big(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)^n.$$

Выражение в правой части стремится к бесконечности, поэтому $F\big(1 + \frac{2}{n}\big) >> 1$ при больших n. Это значит, что многочлен F удовлетворяет требованиям задачи.

b) Пусть $\delta = \frac{1}{n^3}$. Оценим величину $F(1 + \frac{2}{n^3})$ с помощью формулы (2):

$$F\Big(1+\frac{2}{n^3}\Big) = \frac{1}{4n^3}\bigg(1+\frac{2}{n^3}+\sqrt{\frac{4}{n^3}+\frac{4}{n^6}}\bigg)^n + \frac{1}{4n^3}\bigg(1+\frac{2}{n^3}-\sqrt{\frac{4}{n^3}+\frac{4}{n^6}}\bigg)^n < \frac{2}{4n^3}\Big(1+\frac{10}{n^{3/2}}\Big)^n.$$

Выражение в правой части стремится к 0. Значит, $F\big(1 + \frac{2}{n^3}\big) < 1$ при больших n. Осталось воспользоваться экстремальным свойством многочленов Чебышева из задачи 2.3: вне $[-1, 1]$ многочлены Чебышева растут быстрее всех малоуклоняющихся многочленов. Значит, для любого многочлена F, график которого проходит по донышку нашего стакана, выполняется неравенство $F\big(1+\frac{2}{n^3}\big) < 1$, то есть его график выходит из стеклянной части стакана, пересекая вертикальную стенку, что нарушает требования условия задачи.

Не будем портить песню обсуждением того, почему для нечетных n обсуждаемое явление тоже невозможно.

2 Многочлены, мало отклоняющиеся от 0

2.1. Эту задачу мы взяли в [6, лекция 7].

Решение 1. Пусть имеются два унитарных многочлена F_n и G с отклонением c. Тогда многочлен $h(x) = \frac{1}{2}(F_n(x) + G(x))$, будучи средним арифметическим, во всех точках $x \in [-1,1]$ удовлетворяет неравенству

$$-c \leqslant \min(F(x), G(x)) \leqslant h(x) \leqslant \max(F(x), G(x)) \leqslant c,$$

т. е. h — тоже унитарный многочлен степени n, имеющий уклонение c. Заметим, что принимать значение $\pm c$ многочлен h может только в тех точках x, где $F_n(x) = G(x) = c$ или $F_n(x) = G(x) = -c$. Поскольку в силу рассуждений из начала раздела 2 многочлен h должен попеременно принимать значения $\pm c$ в каких-то $n+1$ точках отрезка $[-1,1]$, мы приходим к выводу, что точки максимального уклонения многочленов F_n и G совпадают.

Таким образом, унитарные многочлены F_n и $G(n)$ совпадают в $n+1$ точке, значит, они равны.

Решение 2. Другое рассуждение, более похожее на рассуждения из раздела 2, можно провести следующим образом. Пусть $x_i = \cos\frac{i\pi}{n}$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, — точки максимального уклонения многочлена Чебышева T_n. Тогда выполнены следующие свойства.

1. На каждом промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ многочлен $T_n - F_n$ имеет корень. Действительно, пусть для определенности $T_n(x_{k-1}) = -1$, $T_n(x_k) = 1$, тогда $T_n(x_{k-1}) - F_n(x_{k-1}) \leqslant 0$, $T_n(x_k) - F_n(x_k) \geqslant 0$ и существование корня обеспечивается теоремой о промежуточном значении.

2. Суммарное количество корней $T_n - F_n$ с учетом их кратности не меньше числа отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Действительно, построим отображение из множества корней в множество отрезков: если на интервале (x_{i-1}, x_i) имеется корень — ставим ему в соответствие отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. Если же корень оказался на конце отрезка, скажем в x_i, то это корень кратности не меньше 2 (оба многочлена достигают в точке x_i экстремум) — поставим в соответствие этому корню сразу два отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$. Очевидно, что каждый отрезок сопоставлен хотя бы оному корню.

Осталось заметить, что число отрезков равно n, т.е многочлен $T_n - F_n$ степени не выше $n-1$ имеет n корней. Значит, $T_n = F_n$.

2.2. Отображение $y \mapsto \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y$ взаимно однозначно отображает $[-1,1]$ на $[a,b]$. Если мы подставим $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y$, то для многочлена $P(x)$ степени d получаем, что

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |P(x)| \ = \max_{-1\leqslant y\leqslant 1} \bigl|P(x(y))\bigr| \ \geqslant \frac{|a_d|(b-a)^d}{2^{2d-1}},$$

поскольку старший коэффициент многочлена $P\bigl(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y\bigr)$ равен $|a_d|(\frac{b-a}{2})^d$. Равенство достигается только в случае, когда $P(x(y)) = |a_d|\frac{(b-a)^d}{2^{2d-1}}T_d(y)$, или (если сделать обратную замену) $P(x) = \frac{a_d(b-a)^d}{2^{2d-1}} \cdot T_d\bigl(\frac{2x-a-b}{b-a}\bigr)$.

Для доказательства последнего равенства из условия задачи, перейдем к переменной y. Тогда $x - a = \frac{b-a}{2}(y+1)$, $x - b = \frac{b-a}{2}(y-1)$, $x - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}y$ и

$$\frac{a_d}{2^{d-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor} C_d^{2k}(x-a)^k(x-b)^k\Bigl(x - \frac{a+b}{2}\Bigr)^{d-2k} = \frac{a_d(b-a)^d}{2^{2d-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor} C_d^{2k}(y^2-1)^k y^{d-2k}. \tag{5}$$

В последней сумме легко узнать раскрытую по биному Ньютона формулу (2) и тогда правая часть последнего равенства равна $|a_d|\frac{(b-a)^d}{2^{2d-1}}T_d(y)$, что и требуется. Отметим забавный нюанс. Область определения формулы (2) — множество, заданное неравенством $|y| \geqslant 1$, а в формуле (5) мы используем $y \in [-1,1]$. Читателям, которые увидели в этом проблему, мы предлагаем разобраться с ней самостоятельно.

2.3. Достаточно проверить неравенство при $x > 1$. Сменив при необходимости знак P, мы можем считать, что $P(x) > 0$ при $x > 1$. Предположим противное, пусть при некотором $x^* > 1$ оказалось, что $1 < \frac{P(x^*)}{T_n(x^*)}$. Пусть

$$R(x) = \frac{P(x^*)}{T_n(x^*)} T_n(x) - P(x).$$

Рассмотрим значения этого многочлена в точках $x_i = \cos\frac{i\pi}{n}$ $(i = 0, \cdots, n)$ — это точки максимального уклонения многочлена T_n, в них $T_n(x_i) = (-1)^i$. Тогда $R(x_i) = (-1)^i \frac{P(x^*)}{T_n(x^*)} - P(x_i)$. В силу сделанного предположения знак этого выражения равен $(-1)^i$. Значит, многочлен R имеет корень на каждом интервале (x_i, x_{i+1}).

Но кроме того, очевидно, $R(x^*) = 0$. Таким образом, многочлен $R(x)$ имеет $n+1$ корень. Следовательно, $P(x) = \frac{P(x^*)}{T_n(x^*)} T_n(x)$. Но тогда при $x = 1$ получаем противоречие $P(1) = \frac{P(x^*)}{T_n(x^*)} > 1$.

Вот альтернативное рассуждение, использующее интерполяционную формулу Лагранжа.

Пусть $x_i = \cos\frac{i\pi}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, — точки максимального уклонения многочлена Чебышева T_n. Положим

$$g_k(x) = \prod_{j: j\neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Тогда для любого многочлена h степени n при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнена формула Лагранжа:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} h(x_k) g_k(x).$$

Пусть $x > 1$, тогда $\operatorname{sign} g_k(x) = (-1)^k$ и, значит, $|g_k(x)| = (-1)^k g_k(x) = T_n(x_k) g_k(x)$. Если h — малоуклоняющийся многочлен, то получаем оценку

$$|h(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} h(x_k) g_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |g_k(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k g_k(x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(x_k) g_k(x) = T_n(x).$$

В обоих рассуждениях мы использовали неравенство $|h(x)| \leqslant 1$ только в точках $x = x_i$. Таким образом, с точностью до того, что мы не разобрали аккуратно случай $x < -1$, доказана теорема

Теорема. *Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени не выше n, причем*

$$|F_n(x_i)| \leqslant 1, \qquad \text{где } \ x_i = \cos\frac{i\pi}{n}, \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда при всех вещественных x, $|x| > 1$, выполняется неравенство $|F_n(x)| \leqslant |T_n(x)|$.

2.4. а) Разложим многочлен $P(x, y)$ по степеням x:

$$P(x, y) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(y) x^j. \tag{6}$$

Оценим $|Q_m(y)|$, используя неравенство из задачи 2.2: $\max\limits_{y\in[-1,1]} |Q_m(y)| \geqslant \dfrac{2^{m-1} 2^{n-1}}{2^{2n-1}} 2^n = 2^{m-1}$. Рассматривая сумму $\sum\limits_{i=0}^{m} Q_i(y) x^i$ как многочлен от x, оценим и её по неравенству из задачи 2.2:

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\sum_{i=0}^{m} Q_i(y) x^i\right| \geqslant \frac{|Q_m(y)|}{2^{2m-1}} 2^m = \frac{|Q_m(y)|}{2^{m-1}}.$$

Таким образом,

$$\max_{y\in[-1,1]} \max_{x\in[-1,1]} |P(x, y)| \geqslant \max_{y\in[-1,1]} \frac{|Q_m(y)|}{2^{m-1}} \geqslant 1.$$

Выясним, когда достигается равенство. Обозначим через t_j коэффициент многочлена $T_m(x)$ при x^j. И пусть y_i, где $0 \leqslant i \leqslant n$, — точки максимального уклонения многочлена $T_n(y)$.

Предположим, что выполнено равенство $\max\limits_{\substack{x\in[-1,1],\\ y\in[-1,1]}} |P(x,y)| = 1$. Тогда из проделанных рассуждений заключаем, что

$$\max_{y\in[-1,1]} |Q_m(y)| = 2^{m-1}.$$

Поскольку старший коэффициент многочлена $Q_m(y)$ равен $2^{m-1}2^{n-1}$, по утверждению задачи 2.2 это равенство возможно лишь в случае $Q_m(y) = 2^{m-1}T_n(y)$. Тогда

$$Q_m(y_i) = (-1)^i 2^{m-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{7}$$

Рассматривая $P(x, y_i)$ как многочлен от x, мы видим, благодаря формуле (7), что его старший коэффициент по модулю совпадает со старшим коэффициентом многочлена T_m. Следовательно, $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x,y_i)| \geqslant 1$. Но поскольку $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x,y_i)| \leqslant \max\limits_{\substack{x\in[-1,1],\\ y\in[-1,1]}} |P(x,y)| = 1$, на самом деле здесь тоже имеет место равенство $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x,y_i)| = 1$. По утверждению 2.2 и с учетом (7) это возможно, только если $P(x,y_i) = (-1)^i T_m(x)$. Итак, при всех i

$$\sum_{j=0}^{m} Q_j(y_i)x^j = (-1)^i T_m(x) = T_n(y_i)T_m(x).$$

Полученная формула означает, что при всех j многочлены $Q_j(y)$ и $t_jT_n(y)$, у которых степень не выше n, совпадают при $y = y_i$, т. е. в $n+1$ точке. Значит, $Q_j(y) = t_jT_n(y)$ при всех y, и тогда

$$P(x,y) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(y)x^j = \sum_{j=0}^{m} T_n(y)t_jx^j = T_n(y)\sum_{j=0}^{m} t_jx^j = T_n(y)T_m(x).$$

b) Разложим многочлен P по степеням x, см. (6). Пусть $d = \deg Q_m(y)$ и a_m — старший коэффициент многочлена Q_m. Если $d \geqslant 1$, то оценим $|Q_m(y)|$, используя неравенство из 2.2:

$$\max_{y\in[-2,2]} |Q_m(y)| \geqslant \frac{|a_m|}{2^{2d-1}}4^d = 2|a_m| \geqslant 2,$$

и тогда

$$\max_{y\in[-2,2]}\max_{x\in[-2,2]} |P(x,y)| \geqslant \max_{y\in[-2,2]} \frac{|Q_m(y)|}{2^{2m-1}}4^m = 2\max_{y\in[-2,2]} |Q_m(y)| \geqslant 4.$$

Разберем случай $d = 0$. Обозначим через k наибольший индекс j, для которого $\deg Q_j(y) > 0$:

$$P(x,y) = a_mx^m + \ldots + a_{k+1}x^{k+1} + Q_k(y)x^k + \ldots$$

Заметим, что найдутся два таких числа y_1, $y_2 \in [-2,2]$, что $|Q_k(y_1) - Q_k(y_2)| \geqslant 4$ (если бы это было не так, то, сдвинув Q_k на константу, мы получили бы многочлен с целочисленным старшим коэффициентом, уклонение которого на $[-2,2]$ меньше 2). Тогда

$$P(x,y_1) - P(x,y_2) = (Q_k(y_1) - Q_k(y_2))x^k + \ldots$$

Аналогично предыдущим оценкам получаем

$$\max_{x\in[-2,2]} |P(x,y_1) - P(x,y_2)| \geqslant 2|Q_k(y_1) - Q_k(y_2)| \geqslant 8,$$

а следовательно, $\max\limits_{y\in[-2,2]}\max\limits_{x\in[-2,2]} |P(x,y)| \geqslant 4$.

2.5. Для набора чисел $x_1, \ldots, x_n$ обозначим через σ_i стандартные симметрические функции: σ_1 — это сумма чисел, σ_2 — сумма попарных произведений и т. д. Тогда как нетрудно видеть,

$$\sum_k \frac{1}{x_k^2} = \frac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_n\sigma_{n-2}}{\sigma_n^2}.$$

Впрочем, приблизительно то же самое можно увидеть, если рассмотреть выражение $x^n T_n\left(\frac{1}{x}\right)$. Осталось сосредоточиться, применить теорему Виета и воспользоваться явным видом коэффициентов из формулы (3).

Второе решение. Пусть $P(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = \prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)$. Тогда $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{x-x_i}$. Продифференцировав это равенство, получим:

$$\frac{P''(x)P(x) - P'(x)}{P(x)^2} = \sum_{i=1}^{k}\frac{-1}{(x-x_i)^2}.$$

Подставляя $x = 0$, получаем

$$\frac{P'(0)}{P(0)^2} - \frac{P''(0)}{P(0)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i^2}.$$

Теперь используя формулу (3) на стр. 3, вычислим $P(0)$, $P'(0)$ и $P''(0)$.

2.6. Полагая $\varphi = \cos x$ и вооружившись тригонометрическими формулами, получаем

$$(T_{m+n}(x)-1)(T_{m-n}(x)-1) = (\cos(m+n)\varphi-1)(\cos(m-n)\varphi-1) = (\cos m\varphi-\cos\varphi)^2 = (T_m(x)-T_n(x))^2.$$

Таблица на рис. 2 наводит на мысль, что коэффициенты многочленов Чебышева — целые числа. А творчески переосмысленная формула (3) или размышление о том, как понижается кратность аргумента под косинусом и синусом при использовании тригонометрических формул, окончательно убеждают нас в этом. Итак, многочлены Чебышева имеют целые коэффициенты и, следовательно, принимают целые значения в целых точках. Таким образом, правая часть полученной формулы есть квадрат целого числа.

3 Свойства малоуклоняющихся полиномов

3.1. Техническая возня с такими неравенствами не очень интересна, поэтому ограничимся замечанием, что утверждение следует из задачи 3.7.

3.2. Аналогично предыдущей задаче.

3.3. По утверждению задачи 2.3 и формуле (2)

$$|P(2)| \leqslant |T_d(2)| = \frac{(2+\sqrt{3})^d + (2-\sqrt{3})^d}{2} < 4^d.$$

Для оценки $|T_d(2)|$ можно обойтись и без формулы (2). Например, может помочь неравенство о средних.

$$|T_d(2)| = 2^{d-1}\prod_{k=1}^{d}\left|2-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2d}\right| \leqslant 2^{d-1}\left(\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left|2-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2d}\right|\right)^d = 2^{d-1}\cdot 2^d.$$

Последняя сумма легко подсчитывается благодаря четности функции $\cos x$. Впрочем если с помощью этой четности сгруппировать сомножители парами с самого начала, то и неравенство о средних не нужно.

3.4. Решение 1. Предъявим сначала многочлен $R(x)$, для которого $R(\sqrt{3}\,) = 2019$. Заметим, что $T_{2019}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big) = T_{2019}(\cos\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{2019\pi}{6} = 0$. Тогда положим $R(x) = \frac{T_{2019}(\frac{x}{2})}{x-\sqrt{3}}$ (сократив дробь), а значение $R(\sqrt{3}\,)$ найдем по непрерывности (с помощью правила Лопиталя):

$$R(\sqrt{3}) = \lim_{X\to\sqrt{3}} \frac{T_{2019}(\frac{x}{2})}{x-\sqrt{3}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}} \frac{T_{2019}(\cos\theta)}{2\cos\theta - \sqrt{3}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2019\cdot\theta)}{2\cos\theta - \sqrt{3}} = \frac{2019\cdot\sin\frac{2019\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{6}} = 2019. \qquad (8)$$

Предположим от противного, что нашелся многочлен P, для которого $P(\sqrt{3}\,) > 2019$. Пусть $\beta_i = 2\cos\frac{\pi}{2019}$, $i = 0,\ldots, 2019$ и $\gamma = \sqrt{3}$. Тогда

$$|R(\beta_i)| = \frac{1}{|\beta_i - \sqrt{3}|} \geqslant |P(\beta_i)| \qquad \text{и} \qquad P(\gamma) > |R(\gamma)|.$$

Возьмем $\epsilon > 0$ и положим $Q_\epsilon(x) = R(x) - (1-\epsilon)P(x)$. Тогда для достаточно маленьких ϵ

$$\operatorname{sign}\big(Q_\epsilon(\beta_i)\big) = \operatorname{sign}\big(R(\beta_i) - (1-\epsilon)P(\beta_i)\big).$$

Поскольку знаки $R(\beta_i)$ чередуются, многочлен Q_ϵ имеет не меньше 2019 корней. Это невозможно.

Решение 2. Проверим еще одно экстремальное свойство полиномов Чебышева.

Лемма. Пусть $R(x)$ — малоуклоняющийся многочлен степени не более n: $|R(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$, имеющий общий корень x^* с многочленом T_n: $R(x^*) = T_n(x^*) = 0$. Тогда $|R'(x^*)| \leqslant |T_n'(x^*)|$.

Доказательство. Допустим, что нашелся многочлен R, для которого $|R'(x^*)| \geqslant |T_n'(x^*)|$. Пусть $x_i = \cos\frac{i\pi}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, — точки максимального уклонения многочлена Чебышева T_n. И пусть $x^* \in (x_{k-1}, x_k)$. Меняя при необходимости знак $R(x)$, мы можем считать, что выражения $R'(x^*)$ и $T_n'(x^*)$ одинакового знака. Пусть оказалось, что $T_n(x_{k-1}) = -1$, $T_n(x_k) = 1$ и $R'(x^*) > T_n'(x^*) > 0$, другие комбинации знаков разбираются аналогично. Тогда, как нетрудно убедиться, многочлен $R - T_n$ имеет на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ еще один корень, кроме x^*. Рассуждая как во втором решении задачи 2.1, получаем что многочлен $R - T_n$ степени не выше n имеет на отрезке $[-1, 1]$ не меньше $n + 1$ корня, что невозможно.

Перейдем к решению задачи. Пусть $x = 2y$, $R(y) = P(2y)(2y - \sqrt{3})$, тогда $|R(y)| \leqslant 1$ при $y \in [-1, 1]$, а число $y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — общий корень $R(y)$ и $T_{2019}(y)$. По лемме $\big|R'\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\big| \leqslant \big|T_{2019}'\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\big|$. Осталось подсчитать, что $R'\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big) = 2P(\sqrt{3}\,)$, $T_{2019}'\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big) = 2\cdot 2019$ — последнее вычисляется так же, как в (8).

3.5. Предлагаемое решение 1 сильно проигрывает по громоздкости решению 2 ниже, но зато в нем используется лишь то, что неравенство из условия выполняется не на всем промежутке, а только в точках $\cos\frac{k\pi}{2n+1}$.

Решение 1. По условию $|xP(x^2)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$. Пусть $Q(x) = xP(x^2)$. Рассмотрим $2n + 2$ точки $\alpha_k = \cos\frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 0, \ldots, 2n + 1$. Заметим, что $1 = \alpha_0 > \ldots > \alpha_{2n+1} = -1$ и

$$\alpha_k + \alpha_{2n+1-k} = 0. \qquad (9)$$

Поскольку $\deg Q \leqslant 2n + 1$, мы можем задать многочлен Q с помощью его значений в точках α_k с помощью интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} Q(\alpha_i)\frac{R(x)}{(x-\alpha_i)R'(\alpha_i)}, \qquad R(x) = (x-\alpha_0)\ldots(x-\alpha_{2n+1}) = (x^2-\alpha_0^2)\ldots(x^2-\alpha_n^2).$$

Так как $R(x)$ — четная функция, ее производная $R'(x)$ нечетная, а функция $Q(x)$, кстати, тоже нечетная. Следовательно,

$$Q(x) = R(x)\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{Q(\alpha_i)}{(x-\alpha_i)R'(\alpha_i)} + \frac{Q(-\alpha_i)}{(x+\alpha_i)R'(-\alpha_i)}\right) =$$
$$= R(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{Q(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)}\Big(\frac{1}{x-\alpha_i} + \frac{1}{x+\alpha_i}\Big) = R(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{Q(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)}\cdot\frac{2x}{x^2-\alpha_i^2}.$$

Теперь

$$P(x^2) = \frac{Q(x)}{x} = 2R(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{Q(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)}\cdot\frac{1}{x^2-\alpha_i^2}.$$

И поскольку $|Q(\alpha_i)| \leqslant 1$, получаем неравенство

$$|P(0)| \leqslant 2|R(0)|\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\alpha_i^2|R'(\alpha_i)|}. \tag{10}$$

Проверим, что при $Q(x) = T_{2n+1}(x)$ достигается равенство, это позволит нам вычислить значение правой части.

Действительно, проделанные разложения имеют место для любого нечетного многочлена степени $2n+1$. В частности для $Q(x) = T_{2n+1}(x)$ имеем

$$\frac{T_{2n+1}(x)}{x} = 2R(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{T_{2n+1}(\alpha_i)}{(x^2-\alpha_i^2)R'(\alpha_i)}.$$

Поскольку $T_{2n+1}(\alpha_i) = (-1)^i$ и $\operatorname{sgn}(R'(\alpha_i)) = (-1)^i$, последнее выражение можно ещё слегка упростить:

$$\frac{T_{2n+1}(x)}{x} = 2R(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(x^2-\alpha_i^2)|R'(\alpha_i)|}.$$

Таким образом, значение $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{T_{2n+1}(x)}{x}\right|$ совпадает с правой частью (10), и нам остается лишь досчитать этот предел:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{T_{2n+1}(x)}{x}\right| = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos(2n+1)t}{\cos t}\right| = 2n+1.$$

Р е ш е н и е 2. Пусть $Q(x) = xP(x^2)$, тогда Q — малоуклоняющийся многочлен степени не более $2n+1$, причем $Q(0) = 0 = T_{2n+1}(0)$. Тогда по лемме из второго решения предыдущей задачи $|Q'(0)| \leqslant |T'_{2n+1}(0)|$. Осталось заметить, что $Q'(0) = P(0)$, $T'_{2n+1}(0) = 2n+1$.

3.6. Это утверждение — частный случай задачи 3.7. Но мы докажем его непосредственно.

Заменяя при необходимости x на $-x$ или меняя знак многочлена, мы сведем задачу к случаю, когда у данного многочлена $P(x) = a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots$ оба коэффициента a_d и a_{d-1} положительны. Предположим, что при этом $m = \frac{2^{n-1}}{a_d+a_{d-1}} < 1$. Тогда $\max\limits_{x\in[-1,1]}|mP(x)| = m < 1$ и, следовательно, знаки выражений $T_d(x)$ и $T_d(x) - mP(x)$ в точках максимального уклонения многочленов T_d одинаковы. Тогда многочлен $T_d(x) - mP(x)$ степени d имеет d корней на отрезке $[-1,1]$ и эти корни x'_k перемежаются с точками максимального уклонения:

$$\cos\frac{0\pi}{d} > x'_1 > \cos\frac{1\pi}{d} > x'_2 > \cos\frac{2\pi}{d} > \ldots > x'_n > \cos\frac{d\pi}{d}. \tag{11}$$

Но заметим, что два старших коэффициента многочлена $T_d - mP$ отличаются лишь знаком:

$$T_d(x) - mP(x) = (2^{d-1}x^d + 0\cdot x^{d-1} + \ldots) - \left(\frac{2^{d-1}a_d}{a_d+a_{d-1}}x^d + \frac{2^{d-1}a_{d-1}}{a_d+a_{d-1}}x^{d-1}\ldots\right) =$$
$$= \frac{2^{d-1}a_{d-1}}{a_d+a_{d-1}}x^d - \frac{2^{d-1}a_{d-1}}{a_d+a_{d-1}}x^{d-1}\ldots$$

Тогда по тереме Виета, сумма корней многочлена $T_d - mP$ равна 1. Но это невозможно в силу неравенств (11). Действительно, сумма косинусов, выписанных в формуле (11), равна 0, значит,

$$1 = \cos\frac{0\pi}{d} + \cos\frac{1\pi}{d} + \ldots + \cos\frac{(d-1)\pi}{d} > x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n.$$

3.7. Мы приводим решение, близкое к решению Н. Ленской. Отметим, что в этом решении не требуется в полной мере то, что многочлен P малоуклоняющийся. Вместо этого используется только то, что $|P(x)| < 1$ в точках максимального уклонения многочлена T_n. Таким образом, это решение является также решением задачи 6.2.

a) Пусть n чётно. Достаточно проверить, что для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $|t_{2k}(1+\varepsilon)| \geqslant |a_{2k}|$. Положим $G(x) = (1+\varepsilon)T_n(x) - \frac{1}{2}(F(x)+F(-x))$. Очевидно, $G(x)$ — чётная функция. Поскольку

$$\left|\frac{1}{2}(F(x)+F(-x))\right| \leqslant \frac{1}{2}(1+1) < 1+\varepsilon \quad \text{при } x \in [-1,1], \tag{12}$$

в точках максимального уклонения многочлена T_n получаем совпадение знаков:

$$\operatorname{sgn} G(x_i) = \operatorname{sgn} T_n(x_i) = (-1)^i, \quad \text{где} \ \ x_i = \cos\frac{\pi i}{n}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n. \tag{13}$$

Значит, по теореме о промежуточном значении на интервале $(x_i; x_{i-1})$ имеется корень G. То есть у $G(x)$ заведомо имеется n вещественных корней. Так как многочлен G четный и имеет степень не выше n, можно записать его в виде $G(x) = c(x^2-y_1^2)\ldots(x^2-y_{n/2}^2)$, где $\pm y_i$ — корни $G(x)$, $|y_i| < 1$, и $c > 0$, поскольку $G(1) > 0$. Тогда знаки коэффициентов многочлена $G(\sqrt{x}\,)$ чередуются (это очевидно из раскрытия скобок). Но коэффициент при x^k в этом многочлене равен $t_{2k}(1+\varepsilon) - a_{2k}$. В аналогичном рассуждении для многочлена $-F(x)$ мы получим при x^k коэффициент $t_{2k}(1+\varepsilon) + a_{2k}$ того же знака. Отсюда следует, что $|t_{2k}(1+\varepsilon)| \geqslant |a_{2k}|$, что нам и требовалось.

Пусть теперь n нечетно. Как и в предыдущем случае, докажем для произвольного $\varepsilon > 0$, что $|t_{2k+1}(1+\varepsilon)| \geqslant |a_{2k+1}|$. Определим $G(x) = (1+\varepsilon)T_n(x) - \frac{1}{2}(F(x)-F(-x))$. Тогда $G(x)$ — нечетный многочлен. Как и в случае четного n убеждаемся в совпадении знаков (13), наличии n вещественных корней и разложения $G(x) = cx(x^2-y_1^2)\ldots(x^2-y_{(n-1)/2}^2)$, где $c > 0$. Тогда из раскрытия скобок видим, что знаки коэффициентов многочлена $G(\sqrt{x}\,)/\sqrt{x}$ чередуются. Коэффициент при x^k в этом многочлене равен $t_{2k+1}(1+\varepsilon) - a_{2k+1}$. Написав аналогичные рассуждения для $-F(x)$, получим коэффициент $t_{2k+1}(1+\varepsilon) - a_{2k+1}$ того же знака. Следовательно, $|t_{2k+1}(1+\varepsilon)| \geqslant |a_{2k+1}|$, что и требовалось доказать.

b) Рассмотрим два случая:

I. n четно. Рассмотрим многочлены степени n

$$G_1(x) = \frac{1}{2}\big(F(x)(1+x) + F(-x)(1-x)\big) \quad \text{и} \quad G_2(x) = \frac{1}{2}\big(F(x)(1-x) + F(-x)(1+x)\big).$$

Оба этих многочлена малоуклоняющиеся на отрезке $[-1;1]$ (это очевидно). Значит, они удовлетворяют утверждению п. a). Но коэффициент при x^{2k} у многочлена $G_1(x)$ равен $a_{2k} + a_{2k-1}$, а у $G_2(x)$ он равен $a_{2k} - a_{2k-1}$. Значит, $|t_{2k}| \geqslant \max\big(|a_{2k}+a_{2k-1}|, |a_{2k}-a_{2k-1}|\big) = |a_{2k}| + |a_{2k-1}|$, что и требовалось доказать.

II. n нечетно. Следует провести аналогичное рассуждение для многочленов

$$G_1(x) = \frac{1}{2}\big(F(x)(1+x) - F(-x)(1-x)\big) \quad \text{и} \quad G_2(x) = \frac{1}{2}\big(F(x)(1-x) - F(-x)(1+x)\big).$$

С л е д с т в и е. Сумма модулей коэффициентов малоуклоняющегося многочлена степени n не превосходит суммы модулей коэффициентов многочлена Чебышева T_n.

3.8. и **3.9.** Решения этих задач имеются в прекрасном задачнике [3], гл. I, задача 2.22.

4 Интерполяционная формула Лагранжа

4.1. Заменим $n-1$ на n и $k-1$ на k. Тогда требуется доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}=\frac{n^2-1}{3}$ или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-\cos^2\frac{k\pi}{n}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2x}{x^2-\cos^2\frac{k\pi}{n}}\Bigg|_{x=1}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{x-\cos\frac{k\pi}{n}}+\frac{1}{x+\cos\frac{k\pi}{n}}\Big)\Bigg|_{x=1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x-\cos\frac{k\pi}{n}}\Bigg|_{x=1}=\frac{n^2-1}{3}.$$

Здесь косинусы в слагаемых — это точки максимального уклонения многочлена T_n, кроме ± 1. Полагая $P(x)=\prod\limits_{k=1}^{n=1}(x-\cos\frac{k\pi}{n})=\frac{T_n^2(x)-1}{x^2-1}$, приходим к выводу, что

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x-\cos\frac{k\pi}{n}}\Bigg|_{x=1}=\frac{P'(1)}{P(1)}.$$

В лоб проводить это вычисление не очень удобно, поэтому заметим, что

$$P(\cos\varphi)=\frac{1-T_n^2(\cos\varphi)}{1-\cos^2\varphi}=\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Тогда $\ln P(\cos\varphi)=2(\ln\sin n\varphi-\ln\sin\varphi)$. И значит, $\frac{P'(\cos\varphi)}{P(\cos\varphi)}(-\sin\varphi)=2(n\operatorname{ctg} n\varphi-\operatorname{ctg}\varphi)$. Запасем заранее асимптотическое разложение для котангенса

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1}{\varphi}-\frac{\varphi}{3}+o(\varphi),\quad \text{при } \varphi\to 0.$$

Тогда

$$\frac{P'(1)}{P(1)}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{2(n\operatorname{ctg} n\varphi-\operatorname{ctg}\varphi)}{-\sin\varphi}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{2}{-\sin\varphi}\bigg(n\Big(\frac{1}{n\varphi}-\frac{n\varphi}{3}+o(\varphi)\Big)-\frac{1}{\varphi}+\frac{\varphi}{3}+o(\varphi)\bigg)=\frac{n^2-1}{3}.$$

4.2. Р е ш е н и е 1. Аналогично предыдущему решению имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1-\cos\theta_k}=\frac{2T_n'(1)}{T_n(1)}.$$

Мы знаем, что $T_n(1)=1$, а $T_n'(1)$ найдем из явной формулы с арккосинусом:

$$T_n'(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{n^2\cos(n\arccos x)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=n^2.$$

4.3. [4, отдел 6, задача 71] Возьмем в качестве точек интерполяции корни многочлена Чебышева T_n. Тогда $G(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ в обозначениях формулы (4) и

$$G'(x_k)=2^{1-n}T_n'(x_k)=2^{1-n}\big(\cos(n\arccos x)\big)'\Big|_{x=x_k}=\sin(n\arccos x)\cdot\frac{n2^{1-n}}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_{x=x_k}=\frac{(-1)^k n2^{1-n}}{\sqrt{1-x_k^2}}.$$

Тогда для каждого многочлена $P(x)$ степени не более $n-1$ получаем формулу Лагранжа

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}P(x_k)\cdot\frac{G(x)}{G'(x_k)(x-x_k)}=\sum_{k=1}^{n}P(x_k)\cdot\frac{(-1)^k\sqrt{1-x_k^2}}{n}\cdot\frac{T_n(x)}{x-x_k}.$$

4.4. В левой части доказываемой формулы написан многочлен степени $2n-1$. Для доказательства формулы достаточно проверить равенство в $2n$ точках.

I. Подставим $x = x_p = \cos\frac{(2p-1)\pi}{2n}$, $p = 1, \ldots, n$. Поскольку $T_n(x_p) = 0$, и в сумме обнулятся слагаемые для $k \neq p$. Поскольку в p-м слагаемом имеется неопределенность, найдем его предел

$$\lim_{x\to x_p}(1-xx_p)\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_p)}\right)^2 = \lim_{x\to x_p}\frac{1-x_p^2}{n}\cdot\left(\frac{T_n(x)-T_n(x_p)}{x-x_p}\right)^2 = \frac{1-x_p^2}{n}\cdot T_n'(x_p) = 1$$

(значение производной $T_n'(x_p)$ вычислено в предыдущей задаче).

II. Подставим точки уклонения $x = y_i = \cos\frac{i\pi}{n} = \cos\frac{2i\pi}{2n}$, $i = 0, \ldots, n$. В этих точках $T_n(x) = \pm 1$ и нам остается проверить, что при каждом i

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos\frac{2i\pi}{2n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{(\cos\frac{2i\pi}{2n}-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n})^2} = n^2.$$

Подготовим формулу для преобразования слагаемых:

$$\frac{1-\cos 2\alpha\cos 2\beta}{(\cos 2\alpha-\cos 2\beta)^2} = \frac{1-\frac{\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)}{2}}{4\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)} = \frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{4\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)} = \frac{1}{4\sin^2(\alpha+\beta)}+\frac{1}{4\sin^2(\alpha-\beta)}.$$

Тогда интересующую нас сумму можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos\frac{2i\pi}{2n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{(\cos\frac{2i\pi}{2n}-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n})^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4\sin^2\frac{(2i+2k-1)\pi}{4n}}+\frac{1}{4\sin^2\frac{(2i-2k+1)\pi}{4n}}\right) =$$
$$= \sum_{\ell=1}^{2n}\frac{1}{4\sin^2\frac{(2\ell-1)\pi}{4n}} = 2\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{4\sin^2\frac{(2\ell-1)\pi}{4n}} = 2\cdot\frac{2n^2}{4} = n^2$$

(предпоследнее равенство мы знаем из задачи 4.2).

5 Уклонение на других множествах

5.1. Ответ: a) $\frac{1}{2}(99+\frac{1}{99})$, b) $\frac{1}{2}(99^m+99^{-m})$, где $m = d/2$.

Пусть $d = 2m$ и $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(50+x)+f(50-x))$. Тогда $f_1(x)$ — четный многочлен. Записав его в виде $f_1(x) = g(x^2)$, получаем, что $g(0) = f(50)$ и

$$|g(y)| \leqslant 1 \quad \text{при} \;\; y \in [49^2, 50^2] = [2401,\; 2500].$$

Перейдем на отрезок $[-1,1]$. Пусть $h(x) = g(\frac{4901-99x}{2})$, тогда $|h(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1,1]$. Положим $x^* = \frac{4901}{99} = \frac{1}{2}(99+\frac{1}{99})$, тогда $h(x^*) = g(0) = f(50)$.

В силу экстремального свойства многочленов Чебышева (задача 2.3) выполняется[2] неравенство $h(x^*) \leqslant T_m(x^*) = \frac{1}{2}(99^m+99^{-m})$. Таким образом, случай равенства в задаче имеет место при $f_1(x) = g((x-50)^2) = T_m\big(\frac{4901-2(x-50)^2}{99}\big)$. В частности, при $n = 2$ равенство достигается для многочлена $f_1(x) = \frac{2}{99}x(100-x)-1$.

5.2. Положим $\widetilde{T}_1(x) = x^2-2$, тогда многочлен $\widetilde{T}_1$ переводит отрезок $[-2,2]$ в себя (отмасштабированный для отрезка $[-2,2]$ многочлен Чебышева). Для $n > 1$ положим рекурсивно $\widetilde{T}_n(x) = \widetilde{T}_1(\widetilde{T}_{n-1}(x))$. Тогда $\widetilde{T}_n$ — унитарный многочлен степени $2n$, переводящий отрезок $[-2,2]$ в себя. Положим $2c = 1{,}999$. Тогда $0 < c < 1$ и $|Q(x)|/c < 2$ при $x \in A$. Рассмотрим многочлен $f_n(x) = c^{2^n}\widetilde{T}_n(Q(x)/c)$. Тогда f_n — унитарный многочлен и $|f_n(x)| \leqslant c^{2^n}\cdot 2$ при всех $x \in A$. При достаточно большом n получаем требуемое.

[2] Здесь мы используем еще одно «секретное» свойство многочленов Чебышева: $T_n(\frac{x+x^{-1}}{2}) = \frac{x^n+x^{-n}}{2}$. Оно верно, поскольку при $x = e^{i\varphi}$ совпадает с определением многочленов Чебышева.

5.3. Это утверждение приведено в [2] как пример случая, когда в задаче о минимальном уклонении на множестве более сложном, чем отрезок, возможен хоть сколько-то приличный ответ.

Сначала изучим уклонения многочленов на множестве, состоящем из двух отрезков равной длины.

Лемма. *Пусть $0 < \alpha < \beta$ и имеется множество $S = [-\beta, \beta] \setminus [-\alpha, \alpha]$, представляющее собой объединение двух промежутков длины $\beta - \alpha$, симметричных относительно начала координат. Обозначим через μ_n нижнюю грань максимумов модуля всех полиномов степени n со старшим коэффициентом 1. Тогда*

$$\mu_n \geqslant 2\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}\right)^{n/2}. \tag{14}$$

При четном n равенство достигается.

Утверждение леммы мы взяли в задачнике Полиа, Сеге [4, отдел 6, задача 64], скомбинировав его с леммой из работы участников конференции Махмутова А. и Моисеева Ф. В [4] для случая нечетного n доказывается другая оценка:

$$\alpha \cdot 2\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}\right)^{(n-1)/2} \leqslant \mu_n \leqslant \beta \cdot 2\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}\right)^{(n-1)/2}. \tag{15}$$

Отметим, что которая из нижних оценок в формулах (14) и (15) сильнее, зависит от параметров α и β: неравенство

$$2\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}\right)^{n/2} \leqslant \alpha \cdot 2\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}\right)^{(n-1)/2}$$

равносильно неравенству $5\alpha^2 \geqslant \beta^2$. Найти точное значение μ_n при нечетном n, по-видимому, трудно.

Доказательство леммы. Для каждого унитарного многочлена $P(x)$ рассмотрим многочлен

$$\frac{P(x) + (-1)^n P(-x)}{2} = \begin{cases} Q(x^2) & \text{при четном } n, \\ xQ(x^2) & \text{при нечетном } n, \end{cases} \tag{16}$$

где $Q(\xi)$ — унитарный многочлен степени $[\frac{n}{2}]$ от $\xi = x^2$.

Пусть n четно. Когда переменная x пробегает любой из отрезков $[-\beta, -\alpha]$, $[\alpha, \beta]$, переменная ξ пробегает отрезок $[\alpha^2, \beta^2]$. Тогда

$$\max_{x \in S} |P(x)| \geqslant \max_{x \in S} \left|\frac{P(x) + (-1)^n P(-x)}{2}\right| = \max_{\xi \in [\alpha^2, \beta^2]} |Q(\xi)| \geqslant 2\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}\right)^{n/2}.$$

Это равенство достигается, если в качестве Q_0 взять многочлен, наименее уклоняющийся от 0 на отрезке $[\alpha^2, \beta^2]$, и положить $P(x) = Q_0(x^2)$. Нетрудно проверить, что равенство достигается только для этого многочлена.

Пусть теперь n нечетно. Тогда

$$\max_{x \in S} |P(x)| \geqslant \max_{x \in S} \left|\frac{P(x) + (-1)^n P(-x)}{2}\right| \geqslant \alpha \cdot \max_{\xi \in [\alpha^2, \beta^2]} |Q(\xi)| \geqslant \alpha \cdot 2\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}\right)^{(n-1)/2}.$$

А взяв $P_0(x) = xQ_0(x^2)$, получаем оценку

$$\mu_n \leqslant \max |P_0(x)| \leqslant \beta \cdot 2\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}\right)^{(n-1)/2}.$$

В результате мы проверили неравенство (15). Для доказательства оценки (14) в нечетном случае сделаем еще один фокус. Положим для краткости $M = \max\limits_{x\in S}|P(x)|$. Как мы уже видели,

$$\max_{x\in S}|xQ(x^2)| \leqslant M.$$

Следовательно, $\max\limits_{x\in S} x^2Q^2(x^2) \leqslant M^2$ и тогда $\max\limits_{\xi\in[\alpha^2,\beta^2]} \xi Q^2(\xi) \leqslant M^2$. Поскольку выражение под максимумом неотрицательно,

$$\max_{\xi\in[\alpha^2,\beta^2]}\left|\xi Q^2(\xi) - \frac{M^2}{2}\right| \leqslant \frac{M^2}{2}.$$

Под модулем — унитарный многочлен степени n, применяя для максимума стандартную чебышевскую оценку из задачи 2.2, получаем требуемое неравенство

$$\frac{(\beta^2-\alpha^2)^n}{2^{2n-1}} \leqslant \max_{\xi\in[\alpha^2,\beta^2]}\left|\xi Q^2(\xi) - \frac{M^2}{2}\right| \leqslant \frac{M^2}{2}.$$

Лемма доказана.

Обратимся к решению задачи. Действуя в духе леммы, построим «симметризацию» (16) исходного многочлена P и рассмотрим унитарный многочлен $Q(\xi)$, где $\xi = x^2$, $\xi \in [0, c^2] \cup [a^2, b^2]$. Если $\max|P| = \mu$, то $\max\limits_{x\in[0,c^2]\cup[a^2,b^2]} |Q(\xi)| = \mu$. Поскольку $b^2 - a^2 = c^2$, эти отрезки имеют одинаковую длину. Наименьшее уклонение многочлена на двух равных отрезках оценено в решении задачи 5.1. В нашем случае $\beta = \frac{b^2}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$ и мы получаем оценку

$$\mu \geqslant 2\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{4}\right)^{n/2} = 2\left(\frac{(a^2+c^2)^2-(a^2-c^2)^2}{16}\right)^{n/2} = 2\left(\frac{ac}{2}\right)^n.$$

5.4. Доказательство можно прочесть в замечательной книге «Доказательства из Книги» [1]. Но мы приводим слегка подчищенное рассуждение из [2, с. 23–24], поскольку оно не использует дополнительные свойства многочленов (вынесенные в книге [1] в отдельную рамочку).

Допустим, что нашелся многочлен

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n), \tag{17}$$

опровергающий утверждение теоремы:

$$M = \max_{x\in S}|f(x)| < 2\left(\frac{\ell}{4}\right)^n.$$

Можно считать, что все корни многочлена f вещественны, поскольку для любого набора комплексных чисел $z_k = x_k + iy_k$ при вещественных x выполняется неравенство

$$|(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)| \leqslant |x-z_1|\cdot|x-z_2|\cdot\ldots\cdot|x-z_n|.$$

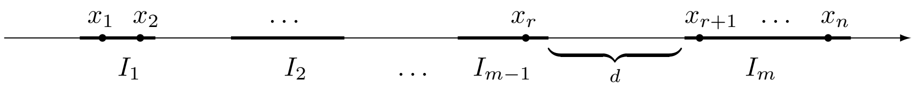
Далее, мы можем считать, что

$$S = f^{-1}([-M, M]) = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m, \tag{18}$$

где отрезки $I_k \subset \mathbb{R}$ перечислены на числовой прямой слева направо. В силу формулы (18) все корни многочлена f содержатся в множестве S.

Далее мы будем рассуждать методом спуска: будем поочередно «сдвигать» влево самый правый из отрезков I_k так, чтобы он склеился с предыдущим. Слово «сдвигать» означает, что мы будем модифицировать многочлен f так, чтобы его корни (лежащие на самом правом отрезке) подвинулись влево, но чтобы при этом многочлен по-прежнему служил контрпримером к доказываемой теореме. В результате нескольких сдвигов мы сведем изучаемый случай к одному отрезку, т. е. к теореме Чебышева, и получим противоречие (с оценкой задачи 2.2).

Итак, рассмотрим отрезок I_m. Пусть он отделен от отрезка I_{m-1} промежутком длины d. Пусть в объединении $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{m-1}$ содержатся корни нашего многочлена $x_1, x_2, \dots, x_r$, а на отрезке I_m — корни $x_{r+1}, \dots, x_n$. Отметим, что отрезок I_m действительно должен содержать хотя бы один корень многочлена f, поскольку в противном случае $n = r$, при $x > x_r$ выражение $|f|$ монотонно возрастает (поскольку возрастают по модулю все множители в (17)) и, значит, между I_{m-1} и I_m не должно быть никакого промежутка.



Рассмотрим тогда новый многочлен

$$f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r) \cdot (x - x_{r+1} - d) \dots (x - x_{n+1} - d).$$

Очевидно, $|f_1(x)| \leqslant |f(x)|$ при $x \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{m-1}$, поскольку в результате сдвига на d множители $x - x_k$ из второй половины разложения f (т.е. при $k > r$) уменьшились по модулю. Обозначим через $I_m - d$ отрезок, получающийся сдвигом отрезка I_m на d влево. Тогда при $x \in I_m - d$ также выполняется неравенство

$$|f_1(x)| \leqslant |f(x)| \tag{19}$$

поскольку $|x - d - x_k| < |x - x_k|$ при $k \leqslant r$. Осталось заметить, что отрезок $I_m - d$ имеет общий конец с I_{m-1} т.е. множество $\widetilde{I}_{m-1} = I_{m-1} \cup I_m$ является отрезком, длина которого равна сумме длин I_{m-1} и I_m. Таким образом

$$|f_1(x)| \leqslant M \quad \text{при } x \in S_1 = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{m-2} \cup \widetilde{I}_{m-1}$$

и суммарная длина отрезков, составляющих множество S_1, по-прежнему равна ℓ.

Для доказательства того, что в случае двух и более отрезков неравенство строгое, заметим, что в формулах (19), которые мы использовали при спуске, на самом деле знак всегда строгий, кроме случаев, когда вместо x подставляют какой-то из корней многочлена. Значит, при выполнении спуска максимум модуля многочлена уменьшается.

5.5. [7, задача 134]. С помощью интерполяционной формулы Лагранжа искомый многочлен $P(x)$ однозначно задается значениями в точках указанного множества:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(k) \cdot \frac{(x-0)(x-1)\dots(x-(k-1)) \cdot (x-(k+1))\dots(x-n)}{(k-0)(k-1)\dots(k-(k-1)) \cdot (k-(k+1))\dots(k-n)}.$$

Коэффициент при x^n в правой части равен

$$\frac{P(0)}{(-1)^n n!} + \frac{P(1)}{(-1)^{n-1} 1!(n-1)!} + \frac{P(2)}{(-1)^{n-2} 2!(n-2)!} + \dots + \frac{P(n)}{n!} = 1.$$

Поскольку $|P(x)| \leqslant M(F)$ при всех x, получаем неравенство

$$1 \leqslant M(P) \cdot \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = M(P) \cdot \frac{2^n}{n!}$$

(последнее равенство следует из того, что при умножении большой скобки на $n!$ мы получаем сумму всех биномиальных коэффициентов из n-й строки треугольника Паскаля). Таким образом $M(P) \geqslant \frac{n!}{2^n}$. Многочлен, дающий наименьшее возможное уклонение, получится лишь в том случае, если мы положим

$$P(n) = -P(n-1) = P(n-2) = -P(n-3) = \dots = (-1)^n P(0) = \frac{n!}{2^n}.$$

6 После промежуточного финиша

6.1. Мы взяли эту задачу в [3, гл. I, задача 2.21]. Лучше, чем там, не скажешь.

6.2. Решение этой задачи уже приведено выше под видом решения задачи 3.7. Мы приведем еще одно решение, опирающееся на циничную идею[3]: если все, что мы знаем о многочлене степени n, — это ограничения на его значения в $n+1$ точке, то всю информацию об этом многочлене можно выцарапать из интерполяционной формулы Лагранжа!

a) Следует из b).

b) I. Разберем сначала случай, когда n нечетно, $n = 2k-1$.

Пусть y_i — это точки максимального уклонения многочлена T_n, т. е. $y_i = \cos\frac{i\pi}{n}$, $i = 0, \ldots n$. Рассмотрим функцию

$$Q(x) = (x-y_0)(x-y_1)\ldots(x-y_n) = (x^2-y_0^2)\cdot\cdots\cdot(x^2-y_{k-1}^2).$$

Для нечетного n функция $Q(x)$ четная, а $Q'(x)$ — нечетная. Следовательно, $Q'(y_{n-i}) = -Q'(y_i)$. Заодно заметим, что $\operatorname{sgn} Q'(y_i) = (-1)^i$ в силу того, что узлы упорядочены: $y_0 > \ldots > y_n$.

Напишем интерполяционную формулу Лагранжа с узлами $y_0, \ldots, y_n$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(y_i)\frac{Q(x)}{(x-y_i)Q'(y_i)} = \sum_{i=0}^{n} P(y_i)(x+y_i)\frac{(x^2-y_0^2)\ldots\widehat{(x^2-y_i^2)}\ldots(x^2-y_{k-1}^2)}{Q'(y_i)}.$$

Здесь в правой части мы допускаем мелкую неаккуратность: для слагаемых, равноотстоящих от концов диапазона суммирования, например при $i = j$ и $i = n-j$, мы имеем $y_j = -y_{n-j}$. При $i = j$ в числителе большой дроби в множителе $(x^2-y_j^2) = (x-y_j)(x-y_{n-j})$ следует пропустить скобку $(x-y_j)$, а другая скобка $(x-y_{n-j}) = (x+y_j)$ должна остаться, а при $i = n-j$ — наоборот: вычеркивается скобка $(x-y_{n-j})$, а остается $(x+y_{n-j})$. В формуле так и записано: вычеркивается квадратичная скобка $(x^2-y_j^2)$ и добавляется линейная, но тем не менее это может вызывать некоторое недоумение.

Приравнивая коэффициенты при x^{2l+1}, x^{2l} в обеих частях формулы Лагранжа, получаем, что

$$a_{2l+1} = (-1)^{n-2l-1}\sum_{i=0}^{n} P(y_i)\cdot\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}, \qquad a_{2l} = (-1)^{n-2l}\sum_{i=0}^{n} y_iP(y_i)\cdot\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)},$$

где через $S_{m,\widehat{i}}$ обозначены стандартные симметрические суммы набора $\{y_0^2, \ldots, y_{k-1}^2\} \setminus \{y_i^2\}$. Например

$$S_{1,\widehat{i}} = y_0^2 + \ldots + \widehat{y_i^2} + \cdots + y_{k-1}^2, \qquad S_{2,\widehat{i}} = \sum_{\substack{0\leqslant s\neq t\leqslant k-1\\ s\neq i, t\neq i}} y_s^2y_t^2.$$

В частности, суммы $S_{m,\widehat{i}}$ *неотрицательны*. Только этой неотрицательностью мы и будем пользоваться ниже. В силу упомянутой выше неаккуратности $S_{m,\widehat{i}} = S_{m,\widehat{n-i}}$. Это позволяет еще преобразовать формулы для коэффициентов:

$$(-1)^{n-2l-1}a_{2l+1} = \sum_{i=0}^{n} P(y_i)\cdot\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(P(y_i)-P(y_{n-i}))$$

и

$$(-1)^{n-2l}a_{2l} = \sum_{i=0}^{n} y_iP(y_i)\cdot\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)} = \sum_{i=0}^{k-1} y_i\cdot\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(P(y_i)+P(y_{n-i})).$$

[3] Отметим, что цинизм в математических рассуждениях часто сопровождается техническими извращениями.

Следовательно,

$$|a_{2l}|+|a_{2l+1}| = \left|\sum_{i=0}^{k-1} y_i\cdot\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(P(y_i)+P(y_{n-i}))\right| + \left|\sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(P(y_i)-P(y_{n-i}))\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\left|\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}\right|\cdot|P(y_i)+P(y_{n-i})| + \sum_{i=0}^{k-1}\left|\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}\right|\cdot|P(y_i)-P(y_{n-i})| \leqslant$$
$$\underset{(*)}{\leqslant} 2\sum_{i=0}^{k-1}\left|\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}\right|.$$

Здесь в неравенстве $(*)$ мы воспользовались тем, что для любых вещественных $|z|,|t|\leqslant 1$ и неотрицательных A, B выполняется неравенство

$$A|z-t|+B|z+t|\leqslant 2\max\{A,B\}. \tag{20}$$

(Мы применили это неравенство для частного случая $A=B=|S_{n-2l,\widehat{i}}|$. Общее неравенство пригодится нам во второй части решения.)

Заметим теперь, что по той же интерполяционной формуле коэффициент многочлена $T_n(x)$ при x^{2l+1} на самом деле равен

$$2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(-1)^i.$$

Как мы помним, $\operatorname{sgn} Q'(y_i) = (-1)^i$ и, значит, этот коэффициент совпадает с правой частью нашей оценки

$$2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(-1)^i = 2\sum_{i=0}^{k-1}\left|\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}\right|.$$

Готово! В доказываемых неравенствах случай равенства возможен, только если $|P(y_i)|=1$ и $P(y_i)-P(y_{n-i})=2(-1)^i$ или $2(-1)^{i+1}$при всех i. В этом случае коэффициент при x^{2l} многочлена $P(x)$ должен быть равен нулю и одно из уравнений $P(x)=T_n(x)$ или $P(x)=-T_n(x)$ имеет $d+1$ корней. Это означает, что или $P(x)=T_n(x)$ или $P(x)=-T_n(x)$ при всех x.

II. Теперь разберем случай, когда n четно. В этом случае

$$Q(x)=(x-y_0)(x-y_1)\dots(x-y_n)=x(x^2-y_0^2)\cdot\dots\cdot(x^2-y_{k-1}^2),$$

функция $Q(x)$ нечетная, а $Q'(x)$ — четная. Таким образом $Q'(y_{n-i})=Q'(y_i)$ и $Q'(y_k)=Q'(0)$. Тогда дроби под знаком суммы в формуле Лагранжа мы можем преобразовать к виду

$$\frac{Q(x)}{(x-y_i)Q'(y_i)} = \begin{cases} x(x+y_i)\dfrac{(x^2-y_0^2)\dots\widehat{(x^2-y_i^2)}\dots(x^2-y_{k-1}^2)}{Q'(y_i)}, & \text{если } i\neq k\\[2ex] \dfrac{(x^2-y_0^2)\dots(x^2-y_{k-1}^2)}{Q'(0)}, & \text{если } i=k\end{cases}$$

Далее аналогично нечетному случаю имеем

$$(-1)^{n-2l-1}a_{2l+1}=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} y_iP(y_i)\cdot\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)} \qquad (-1)^{n-2l}a_{2l}=\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(0)}P(0)+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}P(y_i)\cdot\frac{S_{n-2l+2,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}.$$

И с учетом замечаний о четности, мы можем преобразовать это к виду

$$a_{2l+1}=-\sum_{i=0}^{k-1}y_i\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(P(y_i)-P(y_{n-i})) \qquad a_{2l}=\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(0)}P(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l+2,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(P(y_i)+P(y_{n-i})).$$

Заметим, что все коэффициенты многочлена Q при четных степенях равны 0. В частности коэффициент при y^{2l-2} равен 0. Этот коэффициент равен

$$S_{n-2l+2,\widehat{i}} + y_i^2 S_{n-2l,\widehat{i}} = 0$$

(здесь отдельно сгруппированы слагаемые, содержащие y_i и не содержащие), поэтому

$$|S_{n-2l+2,\widehat{i}}| = |y_i^2 S_{n-2l,\widehat{i}}| = |y_i^2| \cdot |S_{n-2l,\widehat{i}}| \leqslant |S_{n-2l,\widehat{i}}|.$$

Так же, как раньше, пользуясь неравенством (20) при $A = |S_{n-2l+2,\widehat{i}}|$, $B = |S_{n-2l,\widehat{i}}|$, находим, что

$$|a_{2l}| + |a_{2l+1}| \leqslant \left|\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(0)}P(0)\right| + 2\left|\sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}\right|.$$

Коэффициент при x^{2l} многочлена $T_n(x)$ в действительности равен

$$\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(0)}(-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(2(-1)^i).$$

Аналогично нечетному случаю $\operatorname{sgn} Q'(y_i) = (-1)^i$, для всех $i = 0, \ldots, k-1$. Отсюда

$$\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(0)}(-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}(2(-1)^i) = \left|\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(0)}\right| + 2\left|\sum_{i=0}^{k-1}\frac{S_{n-2l,\widehat{i}}}{Q'(y_i)}\right|$$

Итого, достигнут случай равенства в неравенстве треугольника и мы получили желаемый результат. Случай равенства достигается, когда $|P(y_i)| = 1$ и $P(y_i) + P(y_{n-i}) = 2(-1)^i$ или $2(-1)^{i+1}$ для всех i. В этом случае коэффициент при x^{2l} в $P(x)$ должен быть нулевым, или уравнение $P(x) = T_n(x)$ или $P(x) = -T_n(x)$ имеет $n+1$ решений. Это означает, что или $P(x) = T_n(x)$, или $P(x) = -T_n(x)$ для всех x.

6.3. Мы взяли эту задачу в [3], гл. I, задача 2.22.

6.4. Начнем с неудачной, но полезной попытки. Будем интересоваться аналогичным неравенством

$$|P(0)| + |P(1)| + \ldots + |P(n^2-1)| \leqslant |P(n^2)|. \tag{21}$$

Воодушевившись задачей 1.5 о стакане, попробуем взять в качестве P отмасштабированный многочлен Чебышева. Пусть $P(x) = T_{100n}(\frac{x}{n^2-1})$. Тогда по формуле (2)

$$P(n^2) = T_{100n}\Big(1 + \frac{1}{n^2-1}\Big) \geqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2-1} + \sqrt{\frac{2}{n^2-1} + \frac{1}{(n^2-1)^2}}\ \right)^{100n} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2-1}}\ \right)^{100n} \geqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100n} \approx \frac{1}{2}e^{100}.$$

Как видим, правая часть (21) может быть весьма крупной константой, но проблема в том, что левая часть (21) с ростом n стремится к бесконечности, по-видимому, как некрупная линейная функция.

Начнем сначала. Пусть $P_0(x) = T_0(x) + T_1(x) + \ldots + T_{2n}(x)$. Тогда $P_0(1) = 2n+1$. А внутри промежутка $(-1, 1)$ мы можем надеяться на то, что значения $T_k(x)$ при разных k достаточно хаотически меняются, из-за чего сумма таких величин в каждой точке x относительно невелика. Действительно, при $t \in (0, \pi]$ выполнена формула

$$P_0(\cos t) = \cos 0t + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos 2nt = \frac{\sin(2n+\frac{1}{2})t + \sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(2n+\frac{1}{2})t + \sin\frac{1}{2}t}{\sqrt{2(1-\cos t)}}.$$

Значит, при всех $x \in (-1, 1)$ верно неравенство

$$|P_0(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}.$$

Положим тогда $P(x) = \left(P_0(1 - \frac{2x}{n^2})\right)^4$, $\deg P = 8n$. В этом случае $P(0) = (2n+1)^4$ и

$$|P(1)| + \ldots + |P(n^2)| \leqslant \sum_{i=1}^{n^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2i}{n^2}}} \right)^4 = n^4 \cdot \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i^2} \leqslant 2n^4 < P(0).$$

Список литературы

[1] Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. М.: Мир, 2006.

[2] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. Л., М.: ОНТИ, 1937.

[3] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. М.: МЦНМО, 2024.

[4] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М: Наука, 1978.

[5] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2005.

[6] Табачников С.Л., Фукс Д.Б. Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011.

[7] Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М: ГИТТЛ, 1954.