Уклонения многочленов и критические значения

Проект представляют

Navid Safaei, Ярослав Абрамов, Ольга Бурсиан и Константин Кохась

В этом проекте обсуждаются некоторые свойства многочленов. Вы можете без ограничений пользоваться теоремами из «начального» курса математического анализа, в частности, следующими теоремами.

Теорема (Больцано–Коши о промежуточном значении). Если непрерывная функция f имеет на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков, то у нее на этом отрезке имеется корень.

Теорема (Вейерштрасса). Любая непрерывная функция f, заданная на отрезке $[a,b]$ ограничена и достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

1 Несколько предварительных задач

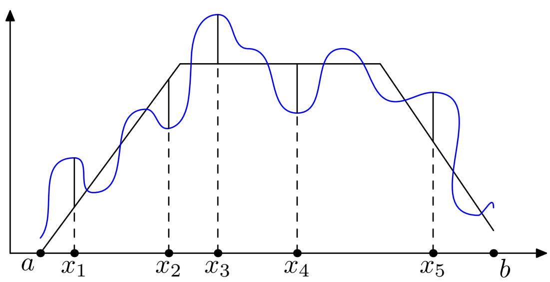
В этом разделе приведено несколько задач для знакомства с темой. Не все из этих задач простые и не обязательно решать их «в первую очередь».

1.1. Для произвольного многочлена $F(x)$ положим $F^{[n]}(x) = \underbrace{F(F(\ldots F}_{n \text{ раз}}(x)))$. Докажите, что существует такой кубический многочлен $P(x)$, что для каждого натурального N следующее уравнение имеет 3^N различных вещественных корней на отрезке $[-1,1]$ a) $P^{[N]}(x)=0$; b) $P^{[N]}(x)=x$.

1.2. Пусть $|ax^2+bx+c| \leqslant 1$ при всех $x \in [-1,1]$. Докажите, что $|2ax+b| \leqslant 4$ при $|x| \leqslant 1$.

1.3. Пусть n — натуральное число и на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция f (можно для простоты думать, что она кусочно-линейная, как на рисунке). Для каждого многочлена F степени n обозначим

$$M(F) = \max_{x\in[a,b]} |F(x)-f(x)|.$$



Допустим, что нашелся многочлен F_n степени n, для которого величина $M(F_n)$ принимает минимальное значение. Докажите, что на отрезке $[a,b]$ найдутся такие точки $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$, что при всех k

$$F_n(x_k) - f(x_k) = \pm M(F_n)$$

и для любой пары соседних точек x_k, x_{k+1} разность $F_n(x)-f(x)$ имеет противоположные знаки.

1.4. Докажите, что каковы бы ни были заданные n точек A_1, A_2, …, A_n на плоскости, произведение расстояний

$$MA_1 \cdot MA_2 \cdot \ldots \cdot MA_n$$

от них до точки M, пробегающий данный отрезок $[a,b]$ длины $b-a=2h$, не может оставаться все время менее $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.

1.5. Задача «о стакане». «Стакан» — это фигура на декартовой плоскости, изображенная на рисунке. Ширина стенок и донышка стакана равна δ. Существуют ли сколь угодно большие n, для которых график многочлена степени n проходит внутри «стеклянной» части стакана, если

a) $\delta = \frac{1}{n}$ b) $\delta = \frac{1}{n^3}$?

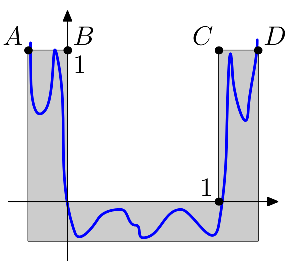


График должен заходить в закрашенную область, пересекая отрезок AB, и выходить из нее, пересекая CD.

2 Многочлены, мало отклоняющиеся от 0

Уклонением (от 0) многочлена F на отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ будем называть величину

$$M(F)=\max_{x\in[a,b]}|F(x)|.$$

Многочлен F, у которого $M(F)\leqslant 1$ на заданном отрезке, будем называть *малоуклоняющимся.* Напомним, что многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называется *унитарным.* В этом проекте мы рассматриваем многочлены только с вещественными коэффициентами (хотя в решениях можно использовать и комплексные числа).

Докажем, что среди всех унитарных многочленов степени n существует многочлен F_n, уклонение которого $M(F_n)$ на отрезке $[-1,1]$ принимает наименьшее возможное значение.

Допустим, что для некоторого числа c мы нашли унитарный многочлен F_n, для которого $M(F_n)=c$ и при этом (как в задаче 1.3) *существуют такие точки* $-1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}\leqslant 1$, *что при всех* k

$$F_n(x_k)=\pm M(F_n),$$

причем для любой пары соседних точек x_k, x_{k+1} *значения* $F_n(x_k)$ *и* $F_n(x_{k+1})$ *имеют противоположные знаки.* Проверим, что тогда c — это минимально возможное уклонение для всех унитарных многочленов степени n.

Действительно, допустим, что нашелся многочлен Q с меньшим уклонением. Тогда в пределах отрезка $[-1,1]$ график многочлена F_n лежит в горизонтальной полосе ширины $2c$ и выходит на ее границу в точках $(x_k,F_n(x_k))$, а график многочлена Q лежит строго внутри полосы, см. рис. 1. Проведем через точки x_k вертикальные (пунктирные) прямые, они вырежут из полосы n прямоугольников. Внутри каждого прямоугольника графики P_n и Q имеют хотя бы одну точку пересечения. Но это невозможно, поскольку многочлен P_n-Q имеет степень не больше $n-1$ и не может иметь n корней.

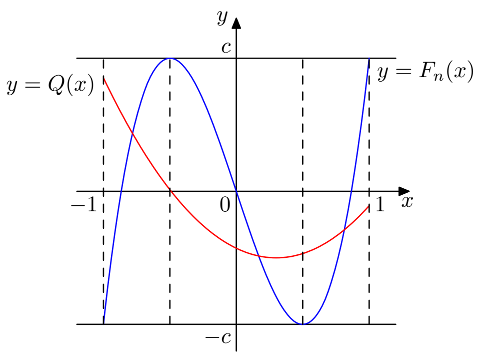


Рис. 1.

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2-1$
3	$4x^3-3x$
4	$8x^4-8x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$

Рис. 2. Полиномы Чебышева

Более того, в описанной ситуации F_n — единственный унитарный многочлен, уклонение которого равно c.

Таким образом, осталось «угадать» многочлен, удовлетворяющий свойству, выделенному выше курсивом. Эта конструкция широко известна. Заметим, что при натуральных n функция $\cos nx$ с помощью тригонометрических преобразований может быть выражена через $\cos x$ и получаемая формула как раз полиномиальная: $\cos 2x=2(\cos x)^2-1$, $\cos 3x=4(\cos x)^3-3\cos x$ и т. д. Таким образом, функция

$$T_n=\cos(n\arccos x)$$

является многочленом (степени n). Он называется *многочленом Чебышева* первого рода. Сразу по определению получаем, что $|T_n(x)|\leqslant 1$ при $x\in[-1,1]$ и

$$T_n(x_k)=(-1)^k,\quad \text{при } x_k=\cos\frac{k\pi}{n},\qquad k=0,1,\ldots,n.$$

Значит, $M(T_n)=1$, а в качестве многочленов F_n из предыдущего рассуждения следует взять $F_n=\frac{1}{2^{n-1}}T_n$, при этом $c=M(F_n)=\frac{1}{2^{n-1}}$.

Несколько первых многочленов Чебышева приведены в таблице (рис. 2). Приведем еще несколько полезных формул.

$$T_n(x) = 2^{n-1}\Big(x - \cos\frac{\pi}{2n}\Big)\Big(x - \cos\frac{3\pi}{2n}\Big)\Big(x - \cos\frac{5\pi}{2n}\Big)\dots\Big(x - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\Big) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\big(x + \sqrt{x^2-1}\,\big)^n + \frac{1}{2}\big(x - \sqrt{x^2-1}\,\big)^n \qquad \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \tag{2}$$

$$2T_n(x) = (2x)^n - \frac{n}{n-1}\cdot C_{n-1}^1(2x)^{n-2} + \frac{n}{n-2}\cdot C_{n-2}^2(2x)^{n-4} - \frac{n}{n-3}\cdot C_{n-3}^3(2x)^{n-6} + \dots \tag{3}$$

2.1. Докажите, что многочлен F_n из приведенного выше рассуждения определен однозначно.

2.2. Докажите, что для любого многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_dx^d$ выполняется неравенство

$$\max_{x\in[a,b]} |P(x)| \ \geqslant \frac{|a_d|}{2^{2d-1}}(b-a)^d.$$

Причем равенство достигается только для многочлена $P(x) = \dfrac{a_d(b-a)^d}{2^{2d-1}} \cdot T_d\Big(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\Big)$. Заодно докажите, что в случае равенства

$$P(x) = \frac{a_d}{2^{d-1}}\cdot \sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor} C_d^{2k}(x-a)^k(x-b)^k\Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)^{d-2k}.$$

2.3. Докажите следующее экстремальное свойство многочленов Чебышева. Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени не выше n, причем

$$\max_{x\in[-1,1]} |F_n(x)| = 1.$$

Тогда при всех вещественных x, $|x| > 1$, выполняется неравенство $|F_n(x)| \leqslant |T_n(x)|$.

2.4. Пусть $P(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}x^iy^j$ для некоторых натуральных m, n.

a) Пусть $a_{mn} = 2^{m-1}2^{n-1}$. Докажите, что $\max\limits_{-1\leqslant x,y\leqslant 1} |P(x,y)| \ \geqslant 1$, причем равенство имеет место только для $P(x,y) = T_m(x)T_n(y)$.

b) Пусть многочлен $P(x,y)$ имеет целочисленные коэффициенты и не является константой ни по x, ни по y. Докажите, что $\max\limits_{-2\leqslant x,y\leqslant 2} |P(x,y)| \ \geqslant 4$.

2.5. Пусть x_k — корни многочлена Чебышева T_n, где n — четно. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} = n^2$.

2.6. Докажите, что при всех натуральных m, n (где $m > n$) и целых x число

$$(T_{m+n}(x) - 1)(T_{m-n}(x) - 1)$$

является точным квадратом.

3 Свойства малоуклоняющихся полиномов

3.1. Пусть $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ при $x \in [-1,1]$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 5$.

3.2. Пусть $|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leqslant 1$ при $x \in [-1,1]$. Докажите, что $|a| \leqslant 4$, $|a| + |b| \leqslant 4$, $|c| \leqslant 3$, $|a| + |b| + |c| + |d| \leqslant 7$.

3.3. Пусть $P(x)$ — многочлен степени d, такой что $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1,1]$. Докажите, что

$$|P(2)| < 4^d.$$

3.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не более 2018, такой что $|P(x)| \leqslant \frac{1}{|x-\sqrt{3}|}$ при $x \in [-2,2]$. Докажите, что $|P(\sqrt{3})| \leqslant 2019$.

3.5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не более n, такой что $|P(x)| < \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $0 < x < 1$. Докажите, что $|P(0)| \leqslant 2n+1$.

3.6. Пусть $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$ — малоуклоняющийся многочлен: $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что

$$|a_d| + |a_{d-1}| \leqslant 2^{d-1}.$$

3.7. Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ — многочлен степени не более n, такой что $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$. И пусть $T_n(x) = t_n x^n + \ldots + t_0$ — это n-й многочлен Чебышева. Докажите, что

a) $|a_{n-2m}| \leqslant |t_{n-2m}|$ при $m = 0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Равенство достигается при $P(x) = \pm T_n(x)$.

b) $|a_{n-2m}| + |a_{n-2m-1}| \leqslant |t_{n-2m}|$ при $m = 0, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Равенство только при $P(x) = \pm T_n(x)$.

3.8. (Неравенство Бернштейна) Если $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени n и $|P(x)| \leqslant 1$ на $[-1, 1]$, то $|P'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$ на $(-1, 1)$.

3.9. (Теорема Маркова) Пусть многочлен n-й степени $P(x)$ удовлетворяет неравенству $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что

$$|P'(x)| \leqslant n^2.$$

Равенство достигается только для многочленов $P = \pm T_n$ и только в точках $x = \pm 1$.

4 Интерполяционная формула Лагранжа

Многочлен степени n однозначно задается своими значениями в $n+1$ точке, причем можно выписать явную формулу. Пусть мы выбрали (попарно различные) точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ и ищем многочлен $F(x)$, который в точках x_k принимает значения y_k:

$$F(x_k) = y_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Положим $G(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})$. В произведении, задающем $G(x)$, пропустим k-ю скобку и рассмотрим дробь, в которой числитель содержит остальные скобки, а знаменатель содержит те же скобки, но в них вместо x подставлено x_k:

$$\Pi_k(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_{n+1})}.$$

Очевидно, что $\Pi_k(x_k) = 1$ и $\Pi_k(x_j) = 0$ при $j \neq k$. Произведение $\Pi_k(x)$ можно записать в более коротком виде

$$\Pi_k(x) = \frac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}.$$

Тогда для интересующий нас многочлен $F(x)$ задается формулой (*интерполяционная формула Лагранжа*):

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \cdot \frac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}. \tag{4}$$

Её можно использовать также и для изучения коэффициентов многочлена F, отслеживая коэффициенты при x^k в обеих частях этого тождества.

4.1. Докажите, что $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(k-1)\pi}{n-1}} = \frac{n(n-2)}{3}$.

4.2. Пусть $\theta_k = (k - \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$, где $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = 2n^2$.

4.3. Пусть $x_k = \cos\theta_k$, $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что любой многочлен $P(x)$ степени не выше $n-1$ удовлетворяет тождеству

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} P(x_k) \sqrt{1 - x_k^2} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k}.$$

4.4. Пусть $x_k = \cos\theta_k$, $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1 - x x_k) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_k)} \right)^2 = 1.$

5 Уклонение на других множествах

5.1. Пусть $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$ — многочлен, малоуклоняющийся на двух отрезках: $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [0,1] \cup [99,100]$. Найдите наибольшее возможное значение $P(50)$

a) при $d = 2$; b) при $d = 100$.

5.2. Пусть A — объединение конечного количества отрезков на вещественной прямой. Илья нашел непостоянный многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами со старшим коэффициентом 1 такой, что $|Q(x)| < 1{,}999$ при всех $x \in A$. Докажите, что *Навид* может найти непостоянный многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами со старшим коэффициентом 1 такой, что $|P(x)| < 1$ при всех $x \in A$.

5.3. На вещественной прямой даны три непересекающихся отрезка $[-b;-a]$, $[-c;c]$ и $[a;b]$, причем $b^2 = a^2 + c^2$. Докажите, что многочлен $f(x)$ степени $2n$ с единичным старшим коэффициентом не может на этих отрезках по абсолютному значению быть меньше чем $2\left(\frac{ac}{2}\right)^n$.

5.4. Теорема Пойя. Пусть S — подмножество $\mathbb{R}$, представляющееся в виде объединения конечного числа непересекающихся отрезков, ℓ — сумма длин этих отрезков. Тогда для любого многочлена $f(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом найдется такое число $y \in S$, что

$$|f(y)| \geqslant 2\left(\frac{\ell}{4}\right)^n .$$

Причем, если S не является отрезком, то знак в неравенстве строгий.

5.5. Найдите унитарный многочлен степени n, имеющий наименьшее уклонение на множестве $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

6 После промежуточного финиша

6.1. Докажите следующее усиление задачи 2.3. Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени n, причем

$$\max_{x\in[-1,1]} |F_n(x)| = 1.$$

Тогда при всех вещественных x, $|x| > 1$, и всех $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ выполняется неравенство для производных: $|F_n^{(j)}(x)| \leqslant |T_n^{(j)}(x)|$.

6.2. Докажите следующее усиление задачи 3.7. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени не более n, такой что

$$|P(\alpha_i)| \leqslant 1, \qquad \text{где}\ \ \alpha_i = \cos\frac{i\pi}{n}\ ,\ i = 0,\ \ldots,\ n.$$

Тогда верны оба утверждения a) и b) задачи 3.7.

6.3. Докажите тригонометрическую модификацию задачи 3.8. Пусть

$$P(\varphi) = a_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \big(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\big)$$

— тригонометрический многочлен порядка n с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$. Положим $M = \max\limits_{\varphi\in\mathbb{R}} |P(\varphi)|$. Докажите, что

$$|P'(\varphi)| \leqslant nM \qquad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

6.4. Докажите, что для любого натурального n существует многочлен $P(x)$ степени не больше $100n$, такой что

$$|P(0)| > |P(1)| + \ldots + |P(n^2)|.$$