Точка Шифflера

Иван Кухарчук,
Леонид Шатунов и Константин Щербаков

Проект представляют:
И. Кухарчук, Л. Шатунов, П. Кожевников, В. Оганисян, А. Матвеева

> И, чтоб родиться звёздам, нужны миллиарды лет
> У нас нет времени их ждать
> А потому я провожу меж рыжих точек
> Сотни линий, чтобы сто новых созвездий
> Осветили всё вокруг, и я видел куда бежать
>
> pyrokinesis

Часть 4. Равнобокие гиперболы

Напомним основные факты из геометрии коник (конических сечений), которые нам пригодятся в этом разделе. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих фактов и сконцентрируемся на применении их к нашей задаче. Никакой другой теории, кроме той, что сформулирована ниже, нами не будет использоваться, поэтому читатель, незнакомый с кониками, может ограничиться лишь текстом нашего проекта.

Заинтересованным же в первом знакомстве с равнобокими гиперболами советуем обратиться к лекции Ф. Бахарева [9]. Для более глубокого погружения в теорию, связанную с равнобокими гиперболами и в целом кривыми второго порядка, рекомендуем книгу [10].

Для того чтобы начать разговор о кониках с геометрических позиций нам придется сказать пару слов о проективной геометрии.

Определение 1. Вещественная проективная плоскость (обозн. $\mathbb{R}P^2$) — пучок прямых в пространстве с центром в O (множество всех прямых в пространстве, проходящих через фиксированную точку O). *«Точки»* — прямые, проходящие через O, *«прямые»* — плоскости, проходящие через O.

Плоскость, не проходящую через O, будем называть *картой*. Тогда почти каждой «точке» можно поставить в соответствие точку в карте — пересечение прямой пучка, задающей «точку» с картой. Аналогично почти каждой «прямой» — прямую в карте.

Исходная задача обычно ставится не на проективной плоскости, а на обычной евклидовой. Поэтому, можно сказать, что геометрическая задача поставлена в некоторой фиксированной карте π плоскости $\mathbb{R}P^2$.

«Точки», которым нельзя сопоставить точку в карте π, называют *бесконечно-удаленными* карты π. Ясно, что они задаются теми прямыми пучка с центром в O, которые параллельны нашей карте π. Все такие прямые лежат в одной плоскости, параллельной π и проходящей через O. Значит, с точки зрения проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, все бесконечно удаленные точки расположены на одной «прямой» (называемой бесконечноудаленной «прямой» карты π).

Важный момент состоит в том, что без фиксации карты все «прямые» на проективной плоскости *равноправны* и вообще говоря никакой выделенной бесконечноудаленной прямой нет. То есть, если для каких то целей нам нужна бесконечноудаленная «прямая», то либо мы фиксируем карту и тогда бесконечноудаленная «прямая» у нас появляется автоматически, либо договариваемся заранее, что некоторую «прямую» будем считать бесконечноудаленной.

Бесконечноудаленная «точка» A_∞ ассоциируется в карте с пучком параллельных прямых. Эти прямые получаются при сечении карты «прямыми» проходящими через указанную бесконечноудаленную «точку» A_∞ .

Для практических целей полезно уметь соединять прямой в карте бесконечноудаленную «точку» A_∞ с точкой B лежащей в этой карте. Для этого, в свете сказанного в предыдущем абзаце, нам достаточно провести через точку B прямую параллельную фиксированному направлению, отвечающему A_∞.

Определение 2. Проективным преобразованием P плоскости $\mathbb{R}P^2$ мы будем называть то преобразование $\mathbb{R}P^2$, которое переводит «прямые» в «прямые».

Замечание 1. *Любое проективное преобразование* $\mathbb{R}P^2$ *сохраняет* **вещественные** *двойные отношения.*

Определение 3. Коникой на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ является образ при проективном преобразовании множества «точек» образующих в пересечении с некоторой картой евклидову окружность.

Определение 4. Рассмотрим евклидову плоскость π как некоторую карту ξ проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Тогда коникой $\mathcal{C}$ на евклидовой плоскости π называется множество всех тех точек карты ξ для которых существует проективная коника $\overline{\mathcal{C}}$ такая, что $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} \cap \xi$.

Замечание 2. *«Точки»* $\overline{\mathcal{C}}$*, которые не пересекают* ξ *являются бесконечноудаленными для карты* ξ*. Направления, отвечающие этим «точкам» в карте* ξ*, называют асимптотическими направлениями коники* $\mathcal{C}$*.*

Упр. 1. Пусть в пространстве зафиксирована прямоугольная декартова система координат с началом координат в точке O. Рассмотрим проективную плоскость как пучок прямых с центром в O и карту π, заданную уравнением $z = 1$. Пусть в карте π задана окружность ω уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Нарисуйте в карте π евклидову конику $\mathcal{C}$ в которую ω переходит при вращении вокруг оси OX на $90°$.

(b) Укажите асимптотические направления коники $\mathcal{C}$.

Факты ниже можно использовать для доказательства существования коники.

Утверждение 1. *Коника на плоскости однозначно восстанавливается по пяти точкам (возможно бесконечноудаленным) никакие три из которых не лежат на одной прямой.*

Утверждение 2 (Обратная теорема Паскаля). *Пусть даны такие точки X_i, $i = 1, \ldots, 6$, что точки пересечения прямых X_1X_2 и X_4X_5, X_2X_3 и X_5X_6, X_3X_4 и X_6X_1 лежат на одной прямой. Тогда существует коника, проходящая через все точки X_i.*

Если же некоторые из рассматриваемых пар прямых параллельны, то теорема сохраняет силу, в том смысле, что точка пересечения понимается как бесконечноудаленная соответсвующая пучку этих параллельных прямых.

Утверждение 3. *Образ прямой при изогональном сопряжении относительно треугольника — коника проходящая через вершины этого треугольника. Образ коники проходящей через вершины треугольника при изогональном сопряжении относительно этого треугольника — прямая (возможно, бесконечноудаленная).*

Определение 5. Равнобокой (прямоугольной, равносторонней, равнобочной) гиперболой называют ту конику в карте, которая имеет две бесконечноудаленные точки, направления на которые перпендикулярны.

Утверждение 4. *Любая коника проходящая через вершины треугольника является равнобокой гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр этого треугольника.*

Упр. 2. (Гипербола Фейрбаха). Докажите, что точки A, B, C, I, H, H_a, H_b и H_c лежат на одной равнобокой гиперболе $\mathcal{F}$, которая касается прямой OI.

Определим точку Sh' как второе пересечение прямой OH с гиперболой $\mathcal{F}$.

Упр. 3. Применив теорему Паскаля докажите, что Sh' лежит на прямой Эйлера треугольника $\triangle BIC$.

Тем самым, мы получили еще одно, альтернативное доказательство существования точки Шиффлера. Кроме того, мы выяснили простой способ построения точки Шиффлера: достаточно лишь пересечь гиперболу $\mathcal{H}$ с прямой Эйлера $\triangle ABC$.

Задача 1. Точка Sh лежит на пересечении гиперболы $\mathcal{H}$ с прямой Эйлера $\triangle ABC$.

Приведем проективное определение поляры (еще называемое построением поляры линейкой) относительно коники и ее основные свойства полезные для нас.

Определение 6. Пусть две секущие P_1Q_1 и P_2Q_2 коники $\mathcal{C}$ (P_1, Q_1, P_2, Q_2 лежат на $\mathcal{C}$) проходят через точку A. Тогда прямая l, проходящая через точки пересечения прямой P_1P_2 с прямой Q_1Q_2 и прямой P_1Q_2 с прямой Q_1P_2, называется полярой точки A. Точка A в этом случае называется полюсом прямой l.

Утверждение 5. *Если из точки A существует две касательные к конике $\mathcal{C}$, то поляра — прямая соединяющая точки касания.*

Утверждение 6 (Двойственность полярного соответствия)**.** *Точка A лежит на поляре точки B относительно коники $\mathcal{C}$ $\iff$ точка B лежит на поляре точки A относительно коники $\mathcal{C}$.*

Пусть $Q'_a := OI_a \cap BC$.

Упр. 4. **(a)** (Гипербола Стаммлера) Докажите, что точки I, I_a, I_b, I_c и O лежат на одной равнобокой гиперболе $\mathcal{S}$.

Докажите, что

(b) BC это поляра A относительно $\mathcal{S}$;

(c) полюс IO относительно $\mathcal{S}$ лежит на AQ'_a *(подсказка: сотрите с картинки все точки, кроме A, I, O, I_a).*

Для дальнейшей работы над проектом нам потребуется понятие двойного отношения точек на прямой. Определятся оно следущим образом

Определение 7. Двойным отношением четверки точек A, B, C, D на прямой называется следующая величина

$$[A, B; C, D] = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{AD}}$$

Определение 8. Двойным отношением четверки прямых a, b, c, d проходящих через точку O, называется следующая величина

$$[a, b; c, d] = \frac{\sin \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})}{\sin \angle(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})} \cdot \frac{\sin \angle(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b})}{\sin \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d})}, \tag{1}$$

где $\vec{l}$ — направляющий вектор прямой l.

Углы в формуле (1) понимаются как **ориентированные** углы, то есть углы между векторами. Угол $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ это тот, на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$, чтобы получить $\vec{b}$. Притом, если поворот осуществлялся против часовой стрелки, то значение соответствующего угла мы берем со знаком «плюс», а если по часовой — со знаком «минус».

Формулировка определения 8 требует дополнительной проверки корректности. В самом деле, мы определяем двойное отношение четверки прямых, а в формуле (1) используется направляющий вектор каждой из этих прямых (т. е. формально, величина двойного отношения может зависеть от выбора направления вектора $\vec{l}$, но в реальности так не происходит).

Подробнее о свойствах двойных отношений читайте в проекте ЛКТГ про движение точек [11].

При решении следующего упражнения нам потребуется использовать некоторые проективные инволюции. Кроме того, проективные инволюции будут полезны нам в следующей части проекта. Потому приведем определение.

Определение 9. Вещественная проективная прямая ($\mathbb{R}P^1$) — пучок прямых на плоскости с центром в некотрой точке O (т.е. множество проходящих через O прямых). «Точки» — прямые проходящие через O.

Определение 10. Преобразование F вещественной проективной прямой l называется проективной инволюцей, если

- F сохраняет двойные отношение, то есть: $\forall A, B, C$ и $D \in l$ верно, что
$$[A, B; C, D] = [F(A), F(B); F(C), F(D)];$$
- F инволюция, то есть: $\forall A \in l$ верно, что $F(F(A)) = A$.

Приведем один из самых сильных результатов классической планиметрии, который используют при работе с инволюциями.

Утверждение 7 (Теорема Дезарга об инволюции)**.** *Даны четыре точки A_1,A_2,A_3 и A_4 общего положения и прямая l, не инцидентная им. Пусть l пересекает прямые A_1A_2, A_3A_4, A_2A_3, A_4A_1, A_1A_3, A_2A_4 в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно и конику, проходящую через A_1,A_2,A_3 и A_4 в точках W, W'. Тогда на прямой l существует проективная инволюция $f : X \leftrightarrow X', Y \leftrightarrow Y', Z \leftrightarrow Z', W \leftrightarrow W'$.*

Инволюцию f иногда называют инволюцией Дезарга порожденной четверкой точек A_1,A_2,A_3 и A_4 на прямой l.

Упр. 5. **(a)** Пусть даны две проективные инволюции $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ проективной прямой l. Каждая из них имеет по две неподвижные точки. Известно, что неподвижные точки инволюции $\mathcal{I}$ меняются местами при инволюции $\mathcal{J}$. Докажите, что что неподвижные точки инволюции $\mathcal{J}$ меняются местами при инволюции $\mathcal{I}$.

Пусть l — касательная к гиперболе $\mathcal{S}$ в точке O.

(b) Докажите, что l — прямая Эйлера треугольника ABC.

Указание: рассмотрите симметрию отонсительно биссектрисы угла BAC как инволюцию $\mathcal{I}'_A$ пучка прямых, проходящих через A. Постройте при помощи $\mathcal{I}'_A$ инволюцию $\mathcal{I}_A$ на l.

Определение 11. Двойным отношением четверки точек $[A, B; C, D]$, лежащих на конике $\mathcal{C}$, называется двойное отношение $[PA, PB; PC, PD]$ для любой точки P на этой же конике $\mathcal{C}$.

Упр. 6. Пусть Sh'' — второе пересечение AQ_a с гиперболой $\mathcal{F}$. Докажите, что
(a) $Sh''I$ касается гиперболы $\mathcal{S}$ (проектируйте с гиперболы на гиперболу);
(b) $Sh = Sh''$.

Таким образом, нами получено не только альтернативное доказательство одного из ключевых результатов Части 2: описание точки Шиффлера при помощи фиксации направлений на нее из вершин треугольника ABC, но и установлен «истиный» — «проективный» смысл этого описания. Сформулируем это в виде задачи.

Задача 2. Точка Sh это полюс прямой OI относительно гиперболы $\mathcal{S}$.

Из упражнений выше фактически следует, что конструкция Емельяновых это просто построение одной линейкой направлений на полюс некоторой прямой.

Теперь нас останавливают только небольшие технические детали от того, чтобы получить полноценное проективное обобщение исходной задачи. Постараемся пробраться сквозь терни проективной геометрии к красивому «симметричному» обобщению точки Шиффлера в следующей части.

Часть 7. Список литературы

[1] K. Schiffler (1985) Problem 1018 `https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v11n02_Feb.pdf` *Crux Mathematicorum* 11: 51. Retrieved September 24, 2023.

[2] C. Kimberling X0021: Schiffler point `https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html` *Triangle centers and central triangles*

[3] G. R. Veldkamp, W. A. van der Spek (1986) Solution to Problem 1018. `https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v12n06_Jun.pdf` *Crux Mathematicorum* 12: 150–152. Retrieved September 24, 2023.

[4] L.Emelyanov and T. Emelyanova (2003) A Note on the Schiffler Point. `https://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200312.pdf` *Forum Geometricorum* Vol. 3, 113-116.

[5] Л.Емельянов (2006) Точка Шиффлера. Памяти И.Ф. Шарыгина. `https://geometry.ru/persons/emelyanov/shiffler.pdf` *Математика в школе* № 6, 58 - 60.

[6] B. Gilbert K001: Neuberg cubic `http://bernard-gibert.fr/Exemples/k001.html` *Cubics in the Triangle Plane.*

[7] K. Nguyen (2005) On the Complement of the Schiffler Point. `https://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200521.pdf` *Forum Geometricorum* 5: 149–164.

[8] Н. Белухов, А. Заславский (2017) Точки Ферма, прямые Эйлера и кое-что еще. https://turgor.ru/lktg/2017/2/2-1ru.pdf *Летняя конференция Турнира Городов* 2017.

[9] Ф. Бахарев (2021) Разговор про равнобокие (равносторонние, прямоугольные) гиперболы. https://www.youtube.com/watch?v=xapJu-mT86c

[10] А. Акопян, А. Заславский (2007) Геометрические свойства кривых второго порядка. https://old.mccme.ru/free-books/akopyan/Zaslavky-Akopyan.pdf *Издательство МЦНМО*

[11] Д. Бродский (2022) Движение точек. https://turgor.ru/lktg/2022/4/4-1-moving-rus.pdf *Летняя конференция Турнира Городов* 2022.