Точка Шифлера
Решения

Иван Кухарчук, Леонид Шатунов, Константин Щербаков

Часть 1. Радикальный центр окружностей Эйлера

Здесь и далее дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC и AB, не содержащих точки A, B и C соответственно, окружности Ω описанной около треугольника ABC, I — центр вписанной окружности этого треугольника, а O — центр Ω. Точки M_a, M_b и M_c — середины BC, AC и AB. Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается сторон BC, AC и AB в точках K_a, K_b и K_c.

Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, AC и AB соответственно. Точки E_a, E_b и E_c — середины отрезков IA_2, IB_2 и IC_2, E — середина IO.

Упр. 1. Докажите, что E — центр окружности девяти точек $\triangle A_1B_1C_1$

Решение. I и O — ортоцентр и центр описанной окружности соответственно.

Упр. 2. Докажите, что:
(a) $\triangle A_1OI \sim \triangle A_1IA_2$.
(b) Докажите, что $\angle C_1A_1E = \angle E_aA_1B_1$.
(c) Докажите, что прямые A_1E_a, B_1E_b, C_1E_c пересекаются в одной точке.

Решение. **(a)** $\angle A_1A_2B = \angle A_2A_1B = \angle OBA_1 \Rightarrow A_1O \cdot A_1A_2 = A_1B^2 = A_1I^2$.
(b) Из доказанного в п. а) подобия, A_1E и A_1E_a изогональны относительно угла $\angle IA_1O$. Кроме того, A_1O и A_1I изогональны относительно угла $\angle C_1A_1B_1$ как направления на центр описанной окружности и ортоцентр. Получаем требуемое.
(c) Эта точка изогонально сопряжена точке E относительно треугольника $A_1B_1C_1$.

Положим точки H_c, H_a и H_b — ортоцентры треугольников AIB, BIC и CIA соответственно.

Упр. 3. **(a)** Докажите, что A_2 — центр описанной окружности BH_aC.
(b) Докажите, что E_a центр окружности девяти точек треугольника BIC.

Решение. **(a)** При симметрии относительно BC окружность BH_aC переходит в окружность BIC, а A_2 — в её центр A_1.
(b) A_2 и I — центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle BH_aC$ соответственно. Тогда E_a — центр окружности девяти точек $\triangle BIC$, а равно и $\triangle BH_aC$.

Задача 1 (Точка Шиффлера)**.** Докажите, что прямые Эйлера треугольников AIB, BIC и CIA пересекаются в одной точке.

Решение. Следствие из упражнений 2c и 3b.

Обозначим точку Шиффлера треугольника ABC через Sh.

Пусть ω_a — вневписанная окружность треугольника ABC, касающаяся стороны BC в точке T и продолжений сторон AB и AC в точках L и N. Аналогично определяются окружности ω_b, ω_c. Точки I_a, I_b и I_c — центры ω_a, ω_b и ω_c соответственно.

Упр. 4. Пусть I' — центр вписанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$. Докажите, что середина отрезка AA_2 — центр окружности $(M_bI'M_c)$.

Решение. Сделаем гомотетию с коэффициентом 2 в точке A, а затем центральную симметрию относительно M_a (это преобразование совпадает с гомотетией в точке пересечения медиан с коэффициентом -2). Тогда треугольник $M_aM_bM_c$ перейдёт соответственно в треугольник ABC, поэтому I' перейдёт в I. Остаётся заметить, что середина AA_2 перейдёт в A_1 — центр окружности BIC.

Упр. 5. Докажите, что прямая Эйлера треугольника $M_bI'M_c$ параллельна прямой A_2I_a.

Решение. При том же преобразовании прямая Эйлера $M_bI'M_c$ перейдёт в прямую Эйлера треугольника BIC, то есть в A_1E_a. Но это — средняя линяя в треугольнике II_aA_2, поэтому обе прямые Эйлера параллельны A_2I_a.

Упр. 6. Окружность α_1 — образ окружности (I_bCA) при симметрии относительно I_bC, окружность α_2 — образ окружности (I_cBA) при симметрии относительно I_cB. Докажите, что точка A_2 лежит на радикальной оси α_1 и α_2.

Решение. Заметим, что I принадлежит описанным окружностям треугольников AI_cB и AI_bC. Обозначим как K_b и K_c отражения I относительно I_bC и I_cB соответственно, тогда $K_b \in \alpha_1$ и $K_c \in \alpha_2$, K_bI_b — диаметр α_1 и K_cI_c — диаметр α_2. Так как $I_bC \perp IC$ и $I_cB \perp IB$, то B — середина IK_c, а C — середина IK_b. Заметим также, что точка I_a лежит на радикальной оси окружностей α_1 и α_2, так как четырёхугольник I_cBCI_b вписан, и значит $I_aB \cdot I_aI_c = I_aC \cdot I_aI_b$.

Сделаем гомотетию с центром в I и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда точка A_2 перейдёт в E_a, точка K_b перейдёт в C, K_c перейдёт в B, I_a перейдёт в A_1, I_b перейдёт в B_1, I_c перейдёт в C_1. Окружности α_1 и α_2 перейдут в окружности, построенные на B_1C и C_1B как на диаметрах (обозначим их β_1 и β_2).

Заметим, что H_a лежит на радикальной оси окружностей β_1 и β_2: обозначим $X = H_aB \cap CI$, $Y = H_aC \cap BI$, тогда $X \in \beta_2$, $Y \in \beta_1$ и, так как $H_aB \perp CI$, $H_aC \perp BI$, четырёхугольник $BXYC$ вписан, и значит $H_aX \cdot H_aB = H_aY \cdot H_aC$.

Таким образом, получаем, что H_aA_1 — радикальная ось окружностей β_1 и β_2, а из упражнения 3 мы знаем, что $E_a \in H_aA_1$, что равносильно утверждению задачи.

Задача 2 (J.-P. Ehrmann, P. Yiu, K. L. Nguyen)**.** Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников BI_aC, CI_bA и AI_cB является точкой Шиффлера для треугольника $M_aM_bM_c$.

Решение. $I_a = AI \cap CI_b \cap BI_c \Rightarrow \mathrm{pow}_{\alpha_1}(I_a) = \mathrm{pow}_{(CI_bA)}(I_a) = \mathrm{pow}_{(AI_cB)}(I_a) = \mathrm{pow}_{\alpha_2}(I_a) \Rightarrow A_2I_a$ — радикальная ось α_1 и α_2.

Сделаем гомотетию с центром в A и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда в условиях упр. 6 образы α_1 и α_2 — окружности девяти точек $\triangle CI_bA$ и $\triangle AI_cB$. Следовательно, образ A_2I_a лежит на рад-оси образов α_1 и α_2 и по упражнениям 4 и 5 является прямой Эйлера $\triangle M_bI'M_c$.

Рассмотрим треугольник Δ образованный прямыми аналогичными LN (т.е. соединяющими точки касания вневписанных окружностей с продолжениями соответствующих сторон) и треугольник Θ с вершинами в серединах дуг M_bM_c, M_cM_a и M_aM_b описанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$.

Упр. 7. Докажите, что треугольник Δ гомотетичен треугольнику Θ.

Решение. При гомотетии в M с коэффициентом -2 треугольник Θ переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, откуда видно, что стороны обоих треугольников перпендикулярны соответствующим биссектрисам треугольника ABC (см. упр. 10a).

Упр. 8. Докажите, что центр описанной окружности Δ совпадает с ортоцентром исходного треугольника ABC, а центр описанной окружности Θ совпадает с центром окружности Эйлера ABC.

Решение. Второе верно в силу построения Θ. Для доказательства первого сперва обозначим лемму:

Лемма 1. *Даны окружности ω_1 и ω_2 с проведенными к ним общими внешней касательной AB и двумя внутренними CD и EF ($A, C, E \in \omega_1$; $B, D, F \in \omega_2$). Прямые CD и EF пересекаются в точке P, а прямые AC и BF — в точке X. Докажите, что $PX \perp AB$.*

Доказательство. Пусть Q — точка пересечения внешних касательных к ω_1 и ω_2, а Y — точка пересечения AE и BD. $AC \perp BD$, так как первая прямая перпендикулярная биссектрисе угла между AB и CD, а вторая параллельна. Аналогично $AE \perp BF$. Пусть Γ — окружность с диаметром AB. Тогда $\Gamma \perp \omega_1$ и $\omega_2 \Rightarrow P$ лежит на поляре Q относительно Γ, т.е. на прямой XY. Заметим, что A, B, X, Y — ортоцентрическая четверка. Получаем требуемое. $\square$

Продолжим решение упражнения 8. Обозначим вершины треугольника Δ соответственно A_d, B_d, C_d. Согласно Лемме 1 $AA_d \perp BC$. Пусть биссектриса $\angle ACB$ пересекает B_dA_d в точке H_d, H_a — основание высоты из вершины A треугольника ABC. Тогда четырехугольник $A_dH_dH_aC$ вписан и $\angle B_dA_dA = \frac{\angle C}{2} \Rightarrow A_dA$ — направление на центр описанной окружности в $\triangle A_dB_dC_d$. Получаем требуемое.

Упр. 9. Докажите, что вершины треугольника Δ лежат на радикальных осях соответствующих пар окружностей Эйлера треугольников BI_aC, CI_bA и AI_cB.

Для доказательства сперва обозначим леммы:

Лемма 2. *В треугольнике ABC проведены высоты AH_a, BH_b, CH_c. Точку H_a отразили относительно сторон AB и AC и получили точки P и Q соответственно. Докажите, что P, Q, H_b, H_c лежат на одной прямой.*

Доказательство. Положим $R := BP \cap CQ, X := BP \cap CH_c, Y := CQ \cap BH_b, H$ — ортоцентр $\triangle ABC$. X — образ C, а H — образ ортоцентра $\triangle ABX$ при симметрии относительно AB. Следовательно, $H \in (XAB)$, аналогично $H \in (YAC) \Rightarrow A$ — точка Микеля четырехугольника $BHCR$. Проекции точки Микеля на стороны четырехугольника лежат на одной прямой (доказывается последовательным применением теоремы Симсона). Получаем требуемое $\square$

Лемма 3. *В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. Из точки A_1 опущены перпендикуляры A_1A_b и A_1A_b на AB и AC соответственно. Точки B_a, B_c, C_a, C_b определяются аналогично. Докажите, что точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b лежат на одной окружности.*

Доказательство. Известный факт: A_bA_c антипараллельно BC относительно $\angle A$. B_cC_b антипараллельно H_bH_c, т.е. параллельно BC. Значит $A_bA_cB_cC_b$ — вписанный четырехугольник. $A_cC_a \parallel AC$ и $B_cC_b \parallel BC$. Так как C_aC_b антипараллельно AB относительно $\angle C$, то это же верно и относительно угла между прямыми A_cC_a и $B_cC_b \Rightarrow$ четырехугольник $A_cB_cC_aC_b$ — вписанный. Из двух вписанностей заключаем вписанность пятиугольника $A_cB_cC_aC_bA_b$ и аналогично вписанность всего шестиугольника. $\square$

Вернемся к решению упражнения 9. Применяя Лемму 2 для $\triangle ACI_b$ имеем, что прямая A_dC_d содержит основания высот этого треугольника на стороны AI_b и CI_b. Аналогично прямая A_dB_d содержит основания высот $\triangle ABI_c$ на стороны AI_c и BI_c. По Лемме 3, применяемой для $\triangle I_aI_bI_c$, 4 таких основания лежат на одной окружности. Получаем требуемое.

Задача 3. Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников BI_aC, CI_bA и AI_cB лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

Решение. Сделаем гомотетию h, переводящую треугольник δ в треугольник θ. По упражнению 8, центр окружности 9 точек $\triangle ABC$ — образ ортоцентра $\triangle ABC$ при h. Радикальная ось окружностей (I_bAC) и (I_cAB) перейдет в направление на точку Шиффлера треугольника $M_aM_bM_c$ из середины дуги M_bM_c. Согласно задаче 2 и наблюдению выше имеем, что точка Шиффлера $\triangle M_aM_bM_c$ неподвижна при такой гомотетии, т.е. является ее центром. Значит она лежит на прямой, содержащей центр окружности 9 точек и ортоцентр $\triangle ABC$, т.е. прямой Эйлера.