# Точка Шиффлера

Иван Кухарчук,
Леонид Шатунов и Константин Щербаков

Проект представляют:
И. Кухарчук, Л. Шатунов, П. Кожевников, В. Оганисян, А. Матвеева

И, чтоб родиться звёздам, нужны миллиарды лет
У нас нет времени их ждать
А потому я провожу меж рыжих точек
Сотни линий, чтобы сто новых созвездий
Осветили всё вокруг, и я видел куда бежать

pyrokinesis

## Вступление

Проект предназначен для любителей классической планиметрии. Мы будем исследовать свойства загадочной точки Шиффлера $Sh$. Определяется она так: пусть $I$ — инцентр произвольного треугольника $ABC$, тогда прямые Эйлера треугольников $AIB$, $BIC$, $AIC$ и $ABC$ пересекаются в этой самой точке $Sh$.

В нашем проекте на протяжении первых двух частей мы будем придерживаться доказательств при помощи исключительно «синтетических методов» (без привлечения тригонометрического и любого другого счета, техники кубических кривых и знаний из области проективной геометрии).

При помощи такого ограниченного арсенала средств нам удастся получить целую серию ярких результатов: найти местоположение точки Шиффлера относительно других замечательных точек, лежащих на прямой Эйлера треугольника $ABC$; поймать направления на точку Шиффлера из вершин треугольника $ABC$; связать точку Шиффлера с радикальным центром окружностей 9 точек треугольников вида $BI_aC$ (где $I_a$ — центр вневписанной окружности треугольника $ABC$, касающейся отрезка $BC$).

Часть 3 проекта содержит факты о внешних точках Шиффлера. Внешней точкой Шиффлера $Sh_a$ мы называем ту точку, которая получается, если в определении точки $Sh$ заменить всюду точку $I$ на точку $I_a$. Поскольку доказательства фактов про точку $Sh_a$ абсолютно аналогичны доказательствам фактов про точку $Sh$, Часть 3 предлагается читателям не для непосредственного решения, а лишь для ознакомления. В рамках проекта на конференции факты из этой части не принимаются и не оцениваются.

При взгляде на конструкцию, которая будет использована нами для поиска направлений из вершин треугольника $ABC$ на точку Шиффлера, сразу возникает вопрос, а какова ее геометрическая природа, — настолько неочевидной выглядит ее сущность. Ответ на этот вопрос будет дан в Части 4.

Оказывается, что точка Шиффлера есть не что иное, как полюс прямой $IO$ (где $O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$), а конструкция, о которой идет речь, — есть лишь построение полюса при помощи одной линейки.

Правда, полюс здесь рассматривается относительно некоторой гиперболы. Поэтому в Части 4 мы приводим всю необходимую для дальнейшей работы с кониками в рамках нашего проекта теорию. Предполагается, что у читателя, столкнувшегося с кониками впервые, никаких проблем при решении задач этой части не возникнет и для работы по проекту дополнительные знания не потребуются.

Оказывается, что почти все доказательства задач Части 4 имеют проективную природу. Поэтому в Части 5 мы приводим красивое проективное обобщение точки Шиффлера, в котором обобщенный «инцентр» $I$ и обобщенные «центры вневписанных окружностей» $I_a$, $I_b$ и $I_c$ играют одинаковую роль, а значит и точка Шиффлера вместе с внешними точками Шиффлера в этом обобщении становятся равноправными.

Часть 6 посвящена другому обобщению задачи о существовании точки Шиффлера: найти ГМТ всех точек $P$ плоскости, для которых прямые Эйлера треугольников $APB$, $BPC$, $APC$ пересекаются в одной точке. Оказывается, что это довольно сложный объект — на проективной плоскости $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ на него можно смотреть как на кривую шестой степени, однако она распадается в произведение кубики, бесконечно удаленной прямой и описанной окружности исходного треугольника.

Кубика, о которой идет речь, носит имя люксенбуржца Жозефа Нойберга и в «Энциклопедии кубик треугольника» [6] занимает первое место! Мы совсем чуть-чуть затронем этот объект и получим различные альтернативные красивые описания. Больше свойств кубики Нойберга можно найти в проекте ЛКТГ-2017 [8].

Факт о существовании точки Шиффлера был предложен в качестве задачи американским инженером, бизнесменом и геометром – любителем Куртом Шиффлером в феральском номере журнала Crux Mathematicorum [1] в 1985 году. Тем самым точка Шиффлера стала одним из самых ярких относительно новых открытий в планиметрии треугольника. В «Энциклопедии центров треугольника» [2] точка Шиффлера занимает почетное 21 место.

Первое доказательство существования привели голландцы Г.Р. Вельдкамп и В.А. ван дер Спек в июньском номере журнала Crux Mathematicorum [3] за 1986 год (то есть задача была нерешенной более года!). Как отмеченно в [5], независимо сходное геометрическое доказательство было получено одним из самых известных современных задачных композиторов и геометров И.Ф. Шарыгиным.

Большой вклад в изучение точки Шиффлера внес наш современник — российский геометр Л. А. Емельянов ([4] и [5]). Авторы благодарят Л. А. Емельянова за то, что он побудил авторов создать этот проект.

Желаем успехов участникам конференции при решении задач!

# Часть 1. Радикальный центр окружностей Эйлера

*Здесь и далее дан треугольник $ABC$. Точки $A_1, B_1, C_1$ — середины дуг $BC, AC$ и $AB$, не содержащих точки $A$, $B$ и $C$ соответственно, окружности $\Omega$, описанной около треугольника $ABC$, $I$ — центр вписанной окружности этого треугольника, а $O$ — центр $\Omega$. Точки $M_a$, $M_b$ и $M_c$ — середины $BC$, $AC$ и $AB$. Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается сторон $BC$, $AC$ и $AB$ в точках $K_a$, $K_b$ и $K_c$.*

*Точки $A_2, B_2, C_2$ симметричны точкам $A_1, B_1, C_1$ относительно сторон $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно. Точки $E_a, E_b$ и $E_c$ — середины отрезков $IA_2, IB_2$ и $IC_2$, $E$ — середина $IO$.*

**Упр. 1.** Докажите, что $E$ — центр окружности девяти точек $\triangle A_1B_1C_1$.

**Упр. 2.** Докажите, что:
**(a)** $\triangle A_1OI \sim \triangle A_1IA_2$;
**(b)** $\angle C_1A_1E = \angle E_aA_1B_1$;
**(c)** прямые $A_1E_a, B_1E_b, C_1E_c$ пересекаются в одной точке.

*Пусть точки $H_c, H_a$ и $H_b$ — ортоцентры треугольников $AIB$, $BIC$ и $CIA$ соответственно.*

**Упр. 3.** **(a)** Докажите, что $A_2$ — центр описанной окружности $BH_aC$.
**(b)** Докажите, что $E_a$ — центр окружности девяти точек треугольника $BIC$.

**Задача 1** (Точка Шиффлера)**.** Докажите, что прямые Эйлера треугольников $AIB$, $BIC$ и $CIA$ пересекаются в одной точке.

*Обозначим точку Шиффлера треугольника $ABC$ через $Sh$.*

Мы пока не доказали, что через точку $Sh$ проходит прямая Эйлера треугольника $ABC$. Отложим это, а пока докажем интересный факт, но прежде снова придется преодолеть несколько вспомогательных утверждений.

*Пусть $\omega_a$ — вневписанная окружность треугольника $ABC$, касающаяся стороны $BC$ в точке $T$ и продолжений сторон $AB$ и $AC$ в точках $L$ и $N$. Аналогично определяются окружности $\omega_b$, $\omega_c$. Точки $I_a$, $I_b$ и $I_c$ — центры $\omega_a$, $\omega_b$ и $\omega_c$ соответственно.*

**Упр. 4.** Пусть $I'$ — центр вписанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$. Докажите, что середина отрезка $AA_2$ — центр окружности $(M_bI'M_c)$.

**Упр. 5.** Докажите, что прямая Эйлера треугольника $M_bI'M_c$ параллельна прямой $A_2I_a$.

**Упр. 6.** Окружность $\alpha_1$ — образ окружности $(I_bCA)$ при симметрии относительно $I_bC$, окружность $\alpha_2$ — образ окружности $(I_cBA)$ при симметрии относительно $I_cB$. Докажите, что точка $A_2$ лежит на радикальной оси $\alpha_1$ и $\alpha_2$.

**Задача 2** (J.-P. Ehrmann, P. Yiu, K. L. Nguyen)**.** Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников $BI_aC$, $CI_bA$ и $AI_cB$ является точкой Шиффлера для треугольника $M_aM_bM_c$.

В работе [7] доказаны и другие любопытные свойства радикальной оси окружностей Эйлера треугольников $CI_bA$ и $AI_cB$. В частности, утверждается, что на ней лежит внешняя точка Фейрбаха $F_a$ треугольника $ABC$. Заинтересованные читатели могут самостоятельно попробовать доказать этот факт или разобраться в его решении в источнике.

*Рассмотрим треугольник $\Delta$, образованный прямыми, аналогичными $LN$ (т.е. соединяющими точки касания вневписанных окружностей с продолжениями соответствующих сторон) и треугольник $\Theta$ с вершинами в серединах дуг $M_bM_c$, $M_cM_a$ и $M_aM_b$ описанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$.*

**Упр. 7.** Докажите, что треугольник $\Delta$ гомотетичен треугольнику $\Theta$.

**Упр. 8.** Докажите, что центр описанной окружности $\Delta$ совпадает с ортоцентром исходного треугольника $ABC$, а центр описанной окружности $\Theta$ совпадает с центром окружности Эйлера $ABC$.

**Упр. 9.** Докажите, что вершины треугольника $\Delta$ лежат на радикальных осях соответствующих пар окружностей Эйлера треугольников $BI_aC$, $CI_bA$ и $AI_cB$.

**Задача 3.** Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников $BI_aC$, $CI_bA$ и $AI_cB$ лежит на прямой Эйлера треугольника $ABC$.

В частности, отсюда следует, что точка Шиффлера лежит и на прямой Эйлера треугольника $ABC$. Однако, есть и более простой способ доказать это, который мы обсудим в следующей части.

# Часть 2. Направления на точку Шиффлера

Напомним одно полезное утверждение, которое часто будет помогать ниже.

**Утверждение 1.** *Два неравных треугольника гомотетичны тогда и только тогда, когда их соответственные стороны параллельны.*

Приведем одно из самых известных применений этого факта.

**Упр. 10.** Докажите, что:
**(a)** $A_1C_1 \perp BI$
**(b)** треугольники $A_1B_1C_1$ и $K_aK_bK_c$ гомотетичны;
**(c)** точка $I$ лежит на прямых Эйлера $A_1B_1C_1$ и $K_aK_bK_c$;
**(d)** $A_1K_a$, $B_1K_b$, $C_1K_c$ и $IO$ пересекаются в одной точке.

Похожим способом можно доказать следующий «близкий родственник» предыдущего утверждения, который пригодится нам далее.

**Упр. 11.** Докажите, что
**(a)** $O$ — центр окружности девяти точек треугольника $I_bII_c$;
**(b)** $I_aO$ является прямой Эйлера треугольников $LTN$ и $I_bII_c$.

Перейдем теперь к доказательству ключевой теоремы этой части.

**Упр. 12.** Точки $X$ и $Y$ таковы, что $I \in XY$, $XA \parallel IB$, $YA \parallel IC$ и $XY \parallel BC$. Докажите, что
**(a)** треугольники $XAY$ и $BIC$ гомотетичны;
**(b)** у треугольников $XAY$ и $BIC$ совпадают центры описанных окружностей;
**(c)** прямая, соединяющая точки пересечения медиан $\triangle XAY$ и $\triangle BIC$, содержит центр описанной окружности $\triangle XAY$.

*Пусть $M$ — точка пересечения медиан, $r$ — радиус вписанной окружности, $R$ — радиус описанной окружности треугольника $ABC$.*

**Упр. 13.** Пусть $M_1$ — точка пересечения медиан треугольника $XAY$. Докажите, что $MM_1 = \frac{2}{3}r$.

Задача ниже является следствием доказанных только что утверждений. Она дает нам информацию о том, в каком отношении точка Шиффлера делит отрезок $MO$ и, заодно, является альтернативным способом доказать существование точки Шиффлера.

**Задача 4** (Г.Р. Вельдкамп, В.А. ван дер Спек, И. Ф. Шарыгин)**.** Докажите, что прямая Эйлера треугольника $BIC$ делит отрезок $MO$ в отношении $\frac{2r}{3R}$, считая от точки $M$.

Приведем полезное простое следствие этого факта, которое поможет нам доказать ряд свойств точки Шиффлера.

*Пусть $ASh$ пересекает прямую $OM_a$ в точке $Z_a$.*

**Упр. 14.** Докажите, что $\dfrac{M_aZ_a}{Z_aO} = \dfrac{r}{R}$.

*Пусть $U \neq L$ — точка на прямой $LN$ такая, что $BL = BU$. Пусть $V \neq N$ — точка на прямой $LN$ такая, что $CN = CV$.*

**Упр. 15.** Докажите, что $\triangle UTV$ и $\triangle K_bK_aK_c$ симметричны относительно $M_a$.

**Упр. 16.** Докажите, что $\triangle I_aI_bI_c$ подобен $\triangle UTV$ с коэффициентом $\dfrac{2R}{r}$.

*Пусть точка $P_a$ симметрична точке $T$ относительно $LN$. Аналогично определяются точки $P_b$ и $P_c$. Пусть $W$ — пересечение прямых $I_aT$ и $AP_a$.*

*Пусть точка $Q_a$ — точка пересечения прямых $OI_a$ (по Упр. 11б — это прямая Эйлера $LTN$) и $BC$. Аналогично определяются точки $Q_b$ и $Q_c$.*

**Упр. 17.** Докажите, что $\dfrac{TW}{WI_a} = \dfrac{r}{R}$ *(подсказка: см. предыдущее упражнение).*

Как мы видим, мы получили отношение, похожее на то, что было в Упр. 14. Этим мы воспользуемся чуть позже, а пока докажем еще один вспомогательный результат.

*Пусть $D$ — пересечение $AI_a$ и $BC$. Серединный перпендикуляр к $AD$ пересекает прямые $BI_a$ и $CI_a$ в точках $G$ и $F$.*

**Упр. 18.** Докажите, что треугольник $DGF$ гомотетичен треугольнику $TNL$ и центр их гомотетии лежит на пересечении прямых $BC$ и $AP_a$.

**Упр. 19.** Докажите, что $AP_a$ проходит через $Q_a$.

**Задача 5** (Л. А. Емельянов и Т. Л. Емельянова)**.** Докажите, что

- $AQ_a$, $BQ_b$ и $CQ_c$ пересекаются в точке Шиффлера треугольника $ABC$;
- $AP_a$, $BP_b$ и $CP_c$ пересекаются в точке Шиффлера треугольника $ABC$.

*Пусть $H'$ — ортоцентр треугольника $K_aK_bK_c$.*

**Упр. 20.** Докажите, что четырехугольники $K_cAK_bH'$ и $NALP_a$ подобны.

**Задача 6.** Докажите, что точка Шиффлера изогонально сопряжена относительно треугольника $ABC$ точке $H'$.

## Часть 3. «Внешние» точки Шиффлера

Поговорим теперь об аналогах точки Шиффлера. Давайте в задачах, предложенных выше, заменим инцентр на эксцентр и проведем аналогичные рассуждения. Факты, приведенные в этой части, необязательны для решения, не будут оцениваться и даны лишь в ознакомительных целях.

**Факт 1** («Внешняя» точка Шиффлера)**.** *Докажите, что прямые Эйлера треугольников $ABC, AI_aB, AI_aC, BI_aC$ имеют общую точку, которая делит отрезок $MO$ внешним образом в отношении $\frac{2r_a}{3R}$, считая от точки $M$.*

*Обозначим внешнюю $A$-точку Шиффлера через $Sh_a$. Аналогично определим $Sh_b$ и $Sh_c$.*

**Факт 2.** *Точка, симметричная $K_a$ относительно $K_bK_c$, лежит на $ASh_a$.*

**Факт 3.** *Точка пересечения $IO$ и $BC$ лежит на $ASh_a$.*

**Факт 4.** *$BSh_a, I_cO$ и $AC$ пересекаются в одной точке.*

Пусть $A_0$, $B_0$, $C_0$ — середины больших дуг $BC$, $CA$, $AB$ описанной окружности треугольника $ABC$ соответственно.

**Факт 5.** *$Sh_a$ изогонально сопряжена середине $OI_a$ относительно треугольника $A_1B_0C_0$.*

**Факт 6.** *Радикальный центр окружностей Эйлера $ACI_c$, $ABI_b$ и $BIC$ является $M_a$-точкой Шиффлера $\triangle M_aM_bM_c$*

# Часть 4. Список литературы


[1] K. Schiffler (1985) Problem 1018 https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v11n02_Feb.pdf *Crux Mathematicorum* 11: 51. Retrieved September 24, 2023.

[2] C. Kimberling X0021: Schiffler point https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html *Triangle centers and central triangles*

[3] G. R. Veldkamp, W. A. van der Spek (1986) Solution to Problem 1018. https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v12n06_Jun.pdf *Crux Mathematicorum* 12: 150–152. Retrieved September 24, 2023.

[4] L.Emelyanov and T. Emelyanova (2003) A Note on the Schiffler Point. https://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200312.pdf *Forum Geometricorum* Vol. 3, 113-116.

[5] Л.Емельянов (2006) Точка Шиффлера. Памяти И.Ф. Шарыгина. https://geometry.ru/persons/emelyanov/shiffler.pdf *Математика в школе* № 6, 58 - 60.

[6] B. Gilbert K001: Neuberg cubic http://bernard-gibert.fr/Exemples/k001.html *Cubics in the Triangle Plane.*

[7] K. Nguyen (2005) On the Complement of the Schiffler Point. https://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200521.pdf *Forum Geometricorum* 5: 149–164.

[8] Н. Белухов, А. Заславский (2017) Точки Ферма, прямые Эйлера и кое-что еще. https://turgor.ru/lktg/2017/2/2-1ru.pdf *Летняя конференция Турнира Городов* 2017.

[9] Ф. Бахарев (2021) Разговор про равнобокие (равносторонние, прямоугольные) гиперболы. https://www.youtube.com/watch?v=xapJu-mT86c

[10] А. Акопян, А. Заславский (2007) Геометрические свойства кривых второго порядка. https://old.mccme.ru/free-books/akopyan/Zaslavky-Akopyan.pdf *Издательство МЦНМО*

[11] Д. Бродский (2022) Движение точек. https://turgor.ru/lktg/2022/4/4-1-moving-rus.pdf *Летняя конференция Турнира Городов* 2022.