Решения некотрых задач

6. Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На продолжении луча OC за точку C выбрана точка P. Прямая PD пересекается с прямой, проходящей через точку O параллельно стороне AB, в точке Q. Докажите, что $\angle AQO = \angle PBC$.

Доказательство. Зафиксируем ромб и будем двигать точку P по прямой OC проективно.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathcal{L}_A & \xrightarrow{A} & OC & \xrightarrow{D} & \mathcal{L}_D & \xrightarrow{D} & \ell & \xrightarrow{A} & \mathcal{L}_A & \xrightarrow{f} & \mathcal{L}_B \\ AP & & P & & DP & & Q & & AQ & & AP' \end{array}$$

Мы хотим проверить, что $AP = AP'$, где f сдвиг на вектор $\overrightarrow{A}B$ и поворот на угол $B2$ против чс. Положения $P = O, P = B, P = \inf$ очевидны. □

11. Отображение f из комплексной прямой $\mathbb{C}$ в себя задается в декартовых координатах как $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где P и Q — многочлены. Пусть дополнительно известно, что f биективно. Докажите, что f сохраняет двойные отношения любой четверки комплексных чисел.

Доказательство. НУО многочены взаимно просты. Известно, что для любого $c \in \mathbb{C}$ уравнение $P(z) - cQ(z) = 0$ имеет ровно один корень. Выберем c так, чтобы член при старшей чтепени не сокрощался. Предположим, что P или Q степени хотя бы 2, тогда многочлен $P(z) - cQ(z)$ должен иметь кратные корни, то есть для единственного его корня z_0 выполненно $P(z_0) - cQ(z_0) = 0$ и $P'(z_0) - cQ'(z_0) = 0$. Домножим первое равенство на $Q'(z_0)$, второе на $Q(z_0)$ и вычтем. Получим $P(z_0)Q'(z_0) - P'(z_0)Q(z_0) = 0$, то есть, при $Q(z_0) \neq= 0$ (а это верно почти при всех c) $\left(\dfrac{P}{Q}\right)'(z_0) = 0$. Таким образом, для всех z кроме, быть может, конечного числа верно $\left(\dfrac{P}{Q}\right)'(z_0) = 0$, откуда $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = const$, что противоречит взаимной простоте многочленов. □

14. Проекция окружности на себя. a) Пусть Ω — окружность, S — произвольная точка плоскости, не лежащая на окружности. Каждой точке $X \in \Omega$ сопоставим вторую точку $\mathcal{F}(X)$ пересечения прямой SX с Ω. Тогда отображение $\mathcal{F}\colon \Omega \to \Omega$ проективно. **b)** Докажите, что отображение, сопоставляющие точке X прямую $SX \in \mathcal{L}$ НЕ проективно.

Доказательство.

Точка S вне Ω:

Заметим, что $SX \cdot SY = const$. Тогда проекцию окружности на себя можно представить как $Y = \mathcal{I}_S^{\sqrt{SX \cdot SY}}$

Точка S внутри Ω: Заметим, что $Y = \mathcal{S}_S \circ \mathcal{I}_S^{\sqrt{SX \cdot SY}}$

Пункт b) следует из того, что лююе проективное отображение должно быть проективно.

□

13. Перебрасывание окружности на касательную. Пусть точка X движется по прямой ℓ, которая касается окружности Ω. Обозначим основание второй касательной из X к Ω за $Y = \mathcal{F}(X)$. Тогда отображение $\mathcal{F}\colon \ell \to \Omega$ проективно.

Доказательство. $Y = \mathcal{H}_S^2 \circ \mathcal{I}_\Omega$, где S точка касания прямой ℓ с окружностью. □

14. Перебрасывание окружности на себя через прямую. a) Точка X лежит на окружности Ω, ℓ — фиксированная прямая, не касающаяся Ω. Пусть касательная к Ω, восстановленная в X, пересекает ℓ в точке Z, $Y = \mathcal{F}(X)$ — основание второй касательной из Z к Ω. Тогда отображение $\mathcal{F}\colon \Omega \to \Omega$ проективно. **b)** Докажите, что отображение, сопоставляющие точке X точку $Z \in \ell$ НЕ проективно.

Доказательство. Пусть L полюс прямой ℓ относительно Ω. Заметим, что XZ поляра точки $Y \in \ell$, значит, $L \in XZ$, тогда $\mathcal{F}$ просто проекция окружности на себя с центром в фиксированной точке L.

Пункт b) следует из того, что люое проективное отображение должно быть проективно. □

22. Выпуклый шестиугольник $AQCPBR$ вписан в окружность Ω, и при этом треугольники ABC и PQR описаны около одной и той же окружности γ. Прямая ℓ, параллельная прямой BC и не совпадающая с ней, касается γ. Пусть P_1 — точка пересечения прямой ℓ и отрезка QR. Докажите, что $\angle PAB = \angle P_1AC$.

Доказательство.

1. Будем двигать P по Ω проективно, зафиксировав треугольник ABC, тогда треугольник PQR будет вращаться по Понселе. По доказанной лемме точка P_2 касания γ с отрезком QR это образ точки P при гомографии Понселе. Согласно лемме о перебрасывании на касательную, примененной к окружности γ и касательной ℓ получаем, что точка P_1 проективно зависит от точки P_2, обозначим соответствующую гомографию за $\mathcal{F}$, за g — внутреннюю биссектрису $\angle BAC$.
2. $\begin{matrix} \Omega & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \gamma & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \ell & \xrightarrow{A} & \mathcal{L}_A & \xrightarrow{\mathcal{S}_g} & \mathcal{L}_A & \xrightarrow{A} & \Omega \\ P & & P_2 & & P_1 & & AP_1 & & AP' & & P' \end{matrix}$
3. Утверждение задачи равносильно совпадению точек P и P', поэтому достаточно доказать его для каких-нибудь трех положений точки P. Положения $P = A, B, C$ очевидны.

□

28. a) Прямые a_t и b_t проективно вращаются вокруг точек A и B соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых a_t и b_t проективно движется по некоторой конике (возможно, вырожденной) b) Точки A_t и B_t проективно движутся по прямым a и b соответственно. Докажите, что прямая A_tB_t огибает некоторую конику (или все время проходит через фиксированную точку).

Доказательство. Рассмотрим три точки X, Y, Z, принадлежащие ГМТ. Проведем конику Ω через точки A, B, X, Y, Z. Пусть прямая l_T, проходящая через A пересекает конику в точке T, а соответствующая ей прямая, проходящая через B пересекает Ω в точке T'. Обозначим за l_i прямые, проходящие через A, k_i — через B. Тогда:$(X, Y; Z, T) = (\ell_X, \ell_Y; \ell_Z; \ell_T) = (k_X, k_Y; k_Z; k_{T'}) = (X, Y; Z, T')$

Откуда следует, что $T = T'$. Более того видно, что точка T движется по конике проективно.

Двойственное утверждение получектся полярным преобразованием.

□

32. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечены изогонально сопряжённые точки P и Q. Точка W — середина дуги BAC окружности (ABC). Прямые WP и WQ второй раз пересекают окружность (ABC) в точках X и Y соответственно. Через точки P и Q проведены прямые, параллельные прямой AW; эти прямые пересекают стороны AB, AC в точках P_B, P_C, Q_B, Q_C. Докажите, что точки X, Y, P_B, P_C, Q_B, Q_C лежат на одной окружности.

Доказательство. Точки P_B, P_C, Q_B, Q_C образуют равнобедренную трапецию, поэтому лежат на одной окружности. Мы докажем, что точки P_B, P_C, X, Y лежат на одной окружности; аналогично доказывается про точки Q_B, Q_C, X, Y. Если эти три окружности не совпадают, то их радикальные оси P_BP_C, Q_BQ_C и XY пересекаются в одной точке. Из соображений непрерывности можно понять, что окружности совпадают.

Фиксируем треугольник ABC и точки P_B, P_C и двигаем точку P по прямой P_BP_C. Тогда точка Q движется по конике, проходящей через вершины треугольника ABC, а также точку W, изогонально сопряженную бесконечно удаленной точке прямой P_BP_C. Поэтому прямые WP, WQ, а значит, и точки X, Y двигаются проективно. Пусть XP_B и YP_C вторично пересекают окружность (ABC) в точках S и T. Достаточно доказать, что $ST \parallel P_BP_C$. Поскольку точки S и T движутся проективно, то достаточно проверить 3 положения. Положения, когда $P = P_B$, $P = P_C$, и когда P на окружности (ABC), очевидны. □

36. Точки A и B движутся с постоянными скоростями по двум прямым. Докажите, что направление прямой AB проективно.

Доказательство. Напомним, что направление прямой AB — бесконечно удаленная точка прямой AB. Выберем неподвижную точку O и отложим от нее вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$. Поскольку точка C движется линейно, то направление прямой OC зависит от времени проективно, что и требовалось. □

37. Три точки движутся проективно. Сколько положений достаточно проверить, чтобы убедиться, что они всегда лежат на одной прямой? Тот же вопрос для трех проективно вращающихся прямых.

Доказательство. Проективно движущиеся по прямым точки имеют степень зависимости 1. Проведем прямую через две из данных точек, она имеет степень зависимости не выше 2. Чтобы проверить, что на ней лежит оставшаяся точка степени 1, нужно проверить 4 положения. Рассуждение для проективно вращающихся прямых двойственно рассуждению для точек. □

38. Точки X и Y движутся со степенями a и b. Докажите, что середина отрезка, их соединяющего, движется со степенью не выше, чем $a + b$.

Доказательство. Пусть точки имеют однородные координаты $[x_1 : y_1 : z_1]$ и $[x_2 : y_2 : z_2]$. Тогда их декартовы координаты $(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1})$ и $(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2})$, а декартовы координаты середины имеют вид $(\frac{x_1z_2+x_2z_1}{2z_1z_2}, \frac{y_1z_2+y_2z_1}{2z_1z_2})$. Тогда однородные координаты середины $[x_1z_2 + x_2z_1 : y_1z_2 + y_2z_1 : 2z_1z_2]$ — многочлены степени $a + b$ от времени. □

40. Полярное преобразование не меняет степень зависимости.

Доказательство. Проективные преобразования плоскости линейны в однородных координатах, поэтому не меняют степень зависимости. Сделаем проективное преобразование, переводящее конику в единичную окружность $x^2 + y^2 = z^2$. Несложно видеть, что поляра точки $[x : y : z]$ относительно этой окружности — прямая с координатами $[x : y : -z]$, откуда следует, что степень зависимости сохраняется. $\square$

47. На прямой Эйлера неравнобедренного треугольника ABC отмечена точка X, лежащая внутри треугольника; точка O — центр окружности (ABC). Прямые AX, BX, CX пересекают соответственные стороны треугольника ABC, в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что окружности (AOA_1), (BOB_1), (COC_1) имеют две общие точки.

Доказательство. Считаем, что треугольник неравнобедренный. Пусть A_2, B_2, C_2 — образы A_1, B_1, C_1 при инверсии относительно описанной окружности. Будем доказывать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке. Фиксируем треугольник ABC и двигаем X по прямой Эйлера. Заметим, что A_2, B_2, C_2 двигаются проективно по окружностям, поэтому их степени зависимости равны 2. Нужно проверить 7 положений. Если X лежит на одной из сторон треугольника, утверждение очевидно. Положения, когда X — ортоцентр, точка пересечения медиан и центр описанной окружности, легко проверяются. Найдем 7-ое положение: пусть окружность (BOC) пересекает AB и AC в точках X и Y; и пусть M и N — середины AB и AC. Тогда XN и YM пересекаются в точке O, и по теореме Паппа точка X пересечения CX и BY лежит на прямой Эйлера. Она и будет седьмым положением. $\square$