Движение точек

Давид Бродский

Проект представляют: Давид Бродский, Алексей Заславский
Олег Заславский, Иван Фролов и Фёдор Нилов

Движение — это жизнь,
а жизнь — это движение!

Аристотель

1 Проективное движение

Все утверждения, сформулированные в этом параграфе в качестве лемм и теорем можно использовать без доказательства. В основном это стандартные утверждения проективной геометрии — желающие могут самостоятельно осознать их истинность.

Определение 1.1. Проективная плоскость. *Проективной плоскостью* $\mathbb{RP}^2$ *мы будем называть обычную плоскость, дополненную бесконечно удаленными точками, в каждой из которых пересекается свой класс параллельных прямых. Таким образом, на каждой прямой появляется новая бесконечно удаленная точка, общая для всех параллельных между собой прямых. Все бесконечно удаленные точки образуют бесконечно удаленную прямую. Прямая, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется проективной.*

Определение 1.2. Двойное отношение четверки точек на проективной прямой. *Пусть точки* A, B, C, D *лежат на проективной прямой* ℓ. *Двойным отношением точек* $(A, B; C, D)$ *на прямой* ℓ *будем называть величину*

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$$

Будем считать, что бесконечно удаленная точка делит любой отрезок в отношении $1 : 1$.

Определение 1.3. Пучок прямых. *Пучком прямых* $\mathcal{L}_A$ *точки* A *будем называть множество всех прямых, проходящих через точку* A.

Отметим, что множество всех прямых одного направления образуют пучок бесконечно удаленной точки.

Определение 1.4. Двойное отношение четверки прямых одного пучка. *Пусть прямые* a, b, c, d *проходят через точку* O *(множество прямых, проходящих через точку* O*, называется пучком). Выберем произвольным образом на этих прямых направляющие векторы* $\overrightarrow{v}_a, \overrightarrow{v}_b, \overrightarrow{v}_c, \overrightarrow{v}_d$. *Двойным отношением прямых* $(a, b; c, d)$ *будем называть величину*

$$\frac{\sin\angle(\overrightarrow{v}_c, \overrightarrow{v}_a)}{\sin\angle(\overrightarrow{v}_c, \overrightarrow{v}_b)} : \frac{\sin\angle(\overrightarrow{v}_d, \overrightarrow{v}_a)}{\sin\angle(\overrightarrow{v}_d, \overrightarrow{v}_b)}$$

Замечание: *Вообще говоря, знак* $\sin\angle(\overrightarrow{v}_x, \overrightarrow{v}_y)$ *не определяется прямыми* x *и* y *однозначно, так как направляющий вектор можно выбрать двумя способами. Однако, если поменять направление одного из векторов, то знак инвертируется сразу у двух синусов, и значение двойного отношения не изменится.*

Определение 1.5. Двойное отношение точек на окружности. *Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности Ω. Отметим еще одну точку O* **на окружности**. *Двойным отношением на окружности Ω точек $(A, B; C, D)$ будем называть двойное отношение прямых $(OA, OB; OC, OD)$. Корректность определения следует из того, что величина вписанного угла постоянна.*

Лемма 1.1. *Пусть точки A, B, C, D лежат на прямой ℓ, точка O вне этой прямой. Тогда*

$$(A, B; C, D) = (OA, OB; OC, OD).$$

1. Убедитесь, что если завести на плоскости комплексные координаты, то двойное отношение четырех точек на прямой или окружности с координатами a, b, c, d считается как $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$.

В дальнейшем мы определим двойное отношение четырех точек на произвольной конике. Для них результат последней задачи **НЕ ВЕРЕН**.

Определение 1.6. Гомография. *Будем называть отображение $\mathcal{F}$ проективным (или гомографией), если*

$$(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B); \mathcal{F}(C), \mathcal{F}(D)) = (A, B; C, D).$$

Отображение может действовать между прямыми, пучками и окружностями (кониками).

Лемма 1.2. *Пусть $A, B, C \in \ell, k \in \mathbb{R}$, тогда существует единственная точка $D \in \ell$ такая, что $(A, B, C, D) = k$.*

Теорема 1.1. *Любую гомографию прямых можно разложить в композицию нескольких центральных проекций и параллельных переносов.*

Определение 1.7. Проективное движение. *Зафиксируем некоторую проективную прямую $\mathcal{T}$. Будем говорить, что переменная точка X движется по проективной прямой или окружности ℓ проективно, если существует проективное отображение $\mathcal{F}\colon \mathcal{T} \to \ell$ такое, что $X = \mathcal{F}(t \in \mathcal{T})$. Прямая $\mathcal{T}$ играет роль параметра времени.*

Давайте поясним простыми словами, что в этом определении имеется в виду. Что означает, что точка X движется с течением времени? Формально это значит, что для каждого момента t существует положение точки X на плоскости, соответствующее этому моменту. Такое соответствие может быть выражено функцией $\mathcal{F}(t)$, которая по сути действует из координатной прямой в плоскость. Однако нам иногда будет удобно подставлять «бесконечное» время, и, для того чтобы формализовать эту идею, вместо обычной прямой времени мы будем брать проективную. Так вот проективное движение с течением времени это любое движение точки по прямой или окружности, при котором выполняется странное условие на сохранение двойных отношений. То есть, если взять любые четыре момента времени (как точки на проективной прямой), то их двойное отношение должно быть равно двойному отношению четырех положений точки X, соответствующих этим моментам времени.

Аналогично определим прямую, проективно вращающуюся в пучке:

Определение 1.8. Проективно вращающаяся прямая. *Будем говорить, что переменная прямая ℓ вращается в пучке $\mathcal{L}$ проективно, если существует проективное отображение $\mathcal{F}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{L}$ такое, что $\ell = \mathcal{F}(t \in \mathcal{T})$.*

Договоримся о некоторых обозначениях специальных гомографий, которые в дальнейшем будем использовать.

- $\ell \xrightarrow{S} \mathcal{L}_S$ проекция с центром в точке S, отображающая прямую ℓ в пучок прямых $\mathcal{L}_S$.
- $\mathcal{R}_S^{\psi}$ — поворот с центром в точке S против часовой стрелки на угол ψ.
- $\mathcal{H}_S^k$ — гомотетия с центром в точке S и коэффициентом k.

Покажем, как проективное движение помогает решать задачи.

Пример 1.1. *Пусть A_1 — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC, D — произвольная точка на BC. Обозначим за I_B и I_C центры вписанных окружностей $\Delta ABD, \Delta ACD$ соответственно. Докажите, что $\angle I_B A_1 I_C = 90°$*

Доказательство. Разобьем решение на несколько типовых шагов.

1. Зафиксируем $\triangle ABC$ и будем проективно двигать точку I_B по биссектрисе $\angle ABC$.
2. Построим гомографию $\mathcal{F}\colon BI \to BI$, тождественность которой равносильна задаче.

   Оформим «цепочку» гомографий в виде таблички, за ℓ_b, ℓ_c обозначены биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ соответственно:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ell_b & \xrightarrow{A} & \mathcal{L}_A & \xrightarrow{\mathcal{R}_A^{\frac{\alpha}{2}}} & \mathcal{L}_A & \xrightarrow{A} & \ell_c & \xrightarrow{A_1} & \mathcal{L}_{A_1} & \xrightarrow{\mathcal{R}_{A_1}^{\frac{\pi}{2}}} & \mathcal{L}_{A_1} & \xrightarrow{A_1} & \ell_b \\ I_B & & AI_B & & AI_C & & I_C & & A_1 I_C & & A_1 I'_B & & I'_B \end{array}$$

   В верхней строке указаны прямые и пучки, переводящиеся друг в друга гомографиями, в нижней — объекты, которые по ним движутся. Очевидно, что задача равносильна проверке того, что $I_B = I'_B$.
3. Проверим, что задача верна в каких-нибудь трех положениях точки I_B. Положения обычно удобно выбирать вырожденные. В этой задаче мы рассмотрим $I_B = B, I_B = I, I_B = P$, где P центр вписанной окружности треугольника ABA_1. В каждом из них задача очевидна.

Поскольку гомография однозначно восстанавливается по образам трех точек, построенное отображение из прямой ℓ_1 в себя тождественно, поэтому задача верна и при любом другом положении точки I_B. □

Давайте потренируемся решать задачи, используя проективное движение. Во многих задачах полезно помнить, что направления суть точки бесконечно удаленной прямой.

2. Прямая ℓ проективно вращается вокруг фиксированной точки P. Точка $S \neq P$ — фиксирована. Докажите, что основание перпендикуляра из точки S на ℓ движется проективно. Какова будет траектория движения этой точки?

3. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I_A. Прямая ℓ, проходящая через I_A, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые, симметричные прямым BY и CX относительно BB_1 и CC_1, пересекаются на B_1C_1.

4. Дан треугольник ABC и точки B_1, C_1 на сторонах AC, AB такие, что прямые BB_1, CC_1 пересекаются на высоте треугольника AA_1. Докажите, что прямые A_1B_1 и A_1C_1 симметричны относительно AA_1.

5. На чевианах AA_1, BB_1, CC_1 (то есть, пересекающихся в одной точке) треугольника ABC выбраны точки A_2, B_2 и C_2 соответственно. Положим $A_3 = BC_2 \cap B_2C$. Точки B_3 и C_3 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_3, BB_3 и CC_3 пересекаются в одной точке.

6. Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На продолжении луча OC за точку C выбрана точка P. Прямая PD пересекается с прямой, проходящей через точку O параллельно стороне AB, в точке Q. Докажите, что $\angle AQO = \angle PBC$.

7. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан около окружности ω. Точка P выбирается на отрезке, соединяющим центры Ω и ω. Обозначим за A', B' и C' вторые пересечения прямых AP, BP и CP с Ω. Докажите, что внутренние биссектрисы $\angle BA'C, \angle CB'A$ и $\angle AC'B$ пересекаются на линии центров Ω и ω.

8. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I, на прямых AI и CI выбраны точки P и Q соответственно так, что угол $\angle PBQ = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что угол $\angle PDQ = \frac{1}{2}\angle ADC$.

9. Обозначим за S проекцию ортоцентра треугольника ABC на его медиану AM. Окружность ω проходит через точки A и S и пересекает отрезки AB и AC в точках Q и P соответственно. Докажите, что отрезки BP и CQ пересекаются на ω.

10. **(a)** Пусть f — гомография проективной прямой ℓ в себя. Параметризуем конечные точки прямой переменной x. Докажите, что отображение f *дробно-линейно*, то есть $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где числа a, b, c и d фиксированы. **(b)** Пусть f — гомография прямых ℓ_1 и ℓ_2. Заведем на конечной части плоскости декартовы координаты. Докажите, что $f(x,y) = \left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{dx+ey+f}, \dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{dx+ey+f}\right)$, где числа $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, f$ — фиксированы. **(c)** Докажите, что любое отображение плоскости $\mathbb{R}^2$ такого вида, который описан в пункте (b) может быть однозначно продолжено до проективного преобразования проективной плоскости.

11. Отображение f из комплексной прямой $\mathbb{C}$ в себя задается в декартовых координатах как $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где P и Q — многочлены. Пусть дополнительно известно, что f биективно. Докажите, что f сохраняет двойные отношения любой четверки комплексных чисел.

2 Проективное движение +

Удивительным образом оказывается, что инверсия, суженная на окружность или прямую, также сохраняет двойные отношения!

Теорема 2.1. *Пусть при инверсии $\mathcal{I}$ окружность или прямая Ω переходит в окружность или прямую $\widetilde{\Omega}$. Тогда для любых четырех точек $A, B, C, D \in \Omega$ верно $(A, B; C, D) = (\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B); \mathcal{I}(C), \mathcal{I}(D))$.*

Доказательство. Ранее было доказано, что двойное отношение четвёрки точек на прямой или окружности равно двойному отношению комплексных координат этих точек. Воспользуемся этим.

Введём комплексные координаты так, что окружность, относительно которой строится инверсия $\mathcal{I}$, задаётся уравнением $z\overline{z} = 1$. Образ $\mathcal{I}(z)$ произвольной точки z плоскости будет $\mathcal{I}(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

Обозначим за a, b, c и d комплексные координаты точек и напишем:

$$(a^*, b^*; c^*, d^*) = \left(\frac{1}{\overline{a}}, \frac{1}{\overline{b}}; \frac{1}{\overline{c}}, \frac{1}{\overline{d}}\right) = \frac{\frac{1}{\overline{c}} - \frac{1}{\overline{a}}}{\frac{1}{\overline{c}} - \frac{1}{\overline{b}}} : \frac{\frac{1}{\overline{d}} - \frac{1}{\overline{a}}}{\frac{1}{\overline{d}} - \frac{1}{\overline{b}}} =$$

$$= \frac{\overline{c} - \overline{a}}{\overline{c} - \overline{b}} : \frac{\overline{d} - \overline{a}}{\overline{d} - \overline{b}} = \overline{\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = (a, b; c, d).$$

□

Теорема позволяет сделать следующие крайне полезное наблюдение:

12. Проекция окружности на себя. a) Пусть Ω — окружность, S — произвольная точка плоскости, не лежащая на окружности. Каждой точке $X \in \Omega$ сопоставим вторую точку $\mathcal{F}(X)$ пересечения прямой SX с Ω. Тогда отображение $\mathcal{F}\colon \Omega \to \Omega$ проективно. **b)** Докажите, что отображение, сопоставляющие точке X прямую $SX \in \mathcal{L}$ НЕ проективно.

13. Перебрасывание окружности на касательную. Пусть точка X движется по прямой ℓ, которая касается окружности Ω. Обозначим основание второй касательной из X к Ω за $Y = \mathcal{F}(X)$. Тогда отображение $\mathcal{F}\colon \ell \to \Omega$ проективно.

14. Перебрасывание окружности на себя через прямую. a) Точка X лежит на окружности Ω, ℓ — фиксированная прямая, не касающаяся Ω. Пусть касательная к Ω, восстановленная в X, пересекает ℓ в точке Z, $Y = \mathcal{F}(X)$ — основание второй касательной из Z к Ω. Тогда отображение $\mathcal{F}\colon \Omega \to \Omega$ проективно. **b)** Докажите, что отображение, сопоставляющие точке X точку $Z \in \ell$ НЕ проективно.

Доказанные выше леммы часто помогают решать задачи проективным движением.

15. Пусть γ_A, γ_B, γ_C — вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BC, CA, AB соответственно. Обозначим через ℓ_A общую внешнюю касательную окружностей γ_B и γ_C, отличную от BC. Аналогично определим прямые ℓ_B, ℓ_C. Из точки P, лежащей на ℓ_A, проведем отличную от ℓ_A касательную к γ_B и найдем точку X ее пересечения с ℓ_C. Аналогично найдем точку Y пересечения касательной из P к γ_C с ℓ_B. Докажите, что прямая XY касается γ_A.

16. Остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H вписан в окружность ω с центром O. Прямая l проходит через H и пересекает меньшие дуги AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть AA' — диаметр окружности ω. Прямые $A'P$ и $A'Q$ пересекают BC в точках K и L соответственно. Докажите, что точки O, K, L и A' лежат на одной окружности.

17. Пусть S — проекция центра I окружности на диагональ AC описанного около нее четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BSA = \angle DSA$.

18. Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности ω. Пары лучей EA и CB, AE и CD, AB и DC, BC и ED пересекаются в точах P, Q, X, Y соответственно. Окружность ω касается AE в точке R. Оказалось, что $XY \parallel AE$. Пусть окружности $(AXQ), (PYE)$ пересекаются в точках S, T. Докажите, что точки S, T, R лежат на одной прямой.

19. Прямая ℓ проходит через центр O описанной около треугольника ABC окружности, пересекая стороны AB, AC треугольника в точках P, Q. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, построенных на отрезках BQ, CP как на диаметрах, лежит на окружности девяти точек треугольника ABC, а вторая — на описанной около него окружности.

20. 2023 прямые пересекаются в одной точке. В каждый из 4026-и углов вписано по окружности; окружности касаются друг друга по циклу. На сторонах углов отмечено по точке. Известно, что для всех углов, кроме одного, отрезок, соединяющий отмеченные точки на сторонах, касается вписанной в угол окружности. Докажите, что для оставшегося угла это также верно.

21. Зафиксируем стороны AB и AC треугольника ABC, а также вписанную в него окружность ω. Докажите, что точка касания ω с отрезком BC проективно зависит от точки Фейербаха этого треугольника.

Теорема 2.2. Частный случай теоремы Понселе, можно использовать без доказательства. *Треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан около окружности ω (возможно, внешним образом). Пусть точка A' также лежит на Ω, касательные из нее к ω вторично пересекают Ω в точках B' и C'. Тогда прямая $B'C'$ касается ω.*

Давайте заметим, что в данной конфигурации имеется пара биективно зависящих друг от друга точек: каждой точке A описанной окружности соответствует точка касания стороны BC со вписанной окружностью. Возникает подозрение, что подобное отображение с описанной окружности на вписанную также проективно.

Лемма 2.1. Гомографии конфигурации Понселе. *Пусть треугольник ABC вращается по Понселе с сохранением вписанной окружности. Тогда точка A_1 — касание отрезка BC со вписанной окружностью, точки S_A и T_A — середины дуг, стягивающих хорду BC, точка I_A — центр вневписанной окружности, касающейся отрезка BC; все перечисленные точки проективно зависят от точки A.*

Отображение, переводящую точку A в точку A_1, будем называть *гомографией Понселе* и обозначать ее $\mathcal{P}$.

Доказательство. Обозначим через I и O центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Заметим, что

- Середина S_A дуги BC есть образ точки A при проекции описанной окружности на себя с центром в точке I.
- Точка T_A диаметрально противоположна точке S_A.
- Точка A_1 — образ точки S_A при положительной гомотетии, переводящей описанную окружность во вписанную.
- В силу леммы о трезубце точка I_A — образ середины S_A дуги BC при гомотетии с центром в точке I и коэффициентом 2.

Явно предъявлены гомографии, по точке A строящие точки S_A, T_A, A_1, I_A, а значит они действительно проективно зависят от A. □

Обычно гомографии Понселе очень хорошо работают вместе на пару с методом полиномиального движения точек, который обобщает проективное движение. Но некоторые трудные задачи удается решить лишь уже известным нам аппаратом.

22. Выпуклый шестиугольник $AQCPBR$ вписан в окружность Ω, и при этом треугольники ABC и PQR описаны около одной и той же окружности γ. Прямая ℓ, параллельная прямой BC и не совпадающая с ней, касается γ. Пусть P_1 — точка пересечения прямой ℓ и отрезка QR. Докажите, что $\angle PAB = \angle P_1AC$.

23. Треугольники ABC и DEF описаны около окружности ω и вписаны в окружность γ. Обозначим за K и L точки касания отрезков BC и EF с окружностью ω. Положим N и M — вторые пересечения AL и DK с γ соответственно. Докажите, что прямые AM, EF, BC, ND пересекаются в одной точке.

24. Пусть оказалось, что в конфигурации Понселе вершины A и B вращающегося треугольника зависят друг от друга проективно. Докажите, что вращающийся треугольник — правильный.

Возможно, последняя задача пока покажется вам сложной. Предлагаем вернутся к ней после того, как Вы разберетесь с *принципом относительности*.

Хорошо известно, что теорема Понселе верна не только для треугольника, но и для любого n-угольника. В связи с этим возникает такой естественный вопрос:

25. Пусть многоугольник $A_1A_2\dots A_{2k+1}$ вращается по Понселе. Верно ли, что точка A_{k+1} проективно зависит от точки касания звена A_1A_{2k+1} со вписанной окружностью?

Нам не известно элементарное доказательство этого утверждения.

3 Коники

Определение 3.1. Коника. *Невырожденной коникой мы будем называть образ окружности после проективного преобразования. Вырожденной коникой называется пара прямых или прямая.*

Можно без доказательства пользоваться тем, что любая невырожденная коника это окружность, эллипс, парабола или гипербола; а также тем, что любая коника является множеством точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$, где a, b, c, d, e, f — фиксированные вещественные числа.

Без доказательства разрешается использовать следующее утверждение:

Теорема 3.1. *Через любые пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно провести невырожденную конику, причем единственным образом.*

Определение 3.2. Двойное отношение четырех точек на конике. *Пусть A, B, C, D — точки на конике Ω, а S — еще одна точка на ней же. Будем называть двойным отношением четверки точек $(A, B; C, D)$ на конике двойное отношение четверки прямых $(SA, SB; SC, SD)$.*

26. Докажите, что это определение двойного отношения корректно.

27. На конике $\mathcal{C}$ нашлись три точки A, B и C, лежащие на одной прямой. Докажите, что $\mathcal{C}$ — вырожденная.

28. a) Прямые a_t и b_t проективно вращаются вокруг точек A и B соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых a_t и b_t проективно движется по некоторой конике (возможно, вырожденной) b) Точки A_t и B_t проективно движутся по прямым a и b соответственно. Докажите, что прямая A_tB_t огибает некоторую конику (или все время проходит через фиксированную точку).

При каких условиях в предыдущей задаче коника получается вырожденной?

29. Точки A_t и B_t движутся по прямой с постоянными скоростями. Какую конику огибает соединяющая их прямая?

Коники зачастую оказываются геометрическим местом точек различных объектов.

30. Даны окружность и прямая, пересекающиеся в точках A и B. Найдите ГМТ точек, для которых касательная к окружности равна расстоянию до прямой.

31. На сторонах остроугольного треугольника ABC как на основаниях строятся подобные равнобедренные треугольники BA_1C, CB_1A, AC_1B (либо все внутрь, либо все наружу). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, и найдите их ГМТ.

Иногда применение коник оказывается полезным в задачах, напрямую с ними не связанными.

32. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечены изогонально сопряжённые точки P и Q. Точка W — середина дуги BAC окружности (ABC). Прямые WP и WQ второй раз пересекают окружность (ABC) в точках X и Y соответственно. Через точки P и Q проведены прямые, параллельные прямой AW; эти прямые пересекают стороны AB, AC в точках P_B, P_C, Q_B, Q_C. Докажите, что точки X, Y, P_B, P_C, Q_B, Q_C лежат на одной окружности.

33. Окружность, вписанная в неравнобедренный треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Три мухи ползли по прямым AA_1, BB_1 и CC_1 с постоянными скоростями так, что в какой-то момент они находились в точках A, B и C, а в другой момент были в точках A_1, B_1 и C_1. В некоторый момент времени все три мухи находились на прямой p_1, а в некоторый другой момент — на прямой p_2. Докажите, что $p_1 \perp p_2$.

34. На сторонах AD, CD четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P, Q так, что $\angle ABP = \angle CBQ$. Обозначим за S точку пересечения CP с AQ. Докажите, что $\angle PBS = \angle QBD$.

35. Рассмотрим произвольный треугольник ABC с центром I вписанной окружности. Прямая ℓ пересекает прямые AI, BI и CI соответственно в точках D, E, F, отличных от A, B, C и I. Серединные перпендикуляры к отрезкам AD, BE и CF образуют треугольник Δ с описанной окружностью ω. Докажите, что окружности ω и (ABC) касаются.

4 Полиномиальное движение

Определение 4.1. Проективная плоскость. *Проективной плоскостью называется множество всех прямых в пространстве, проходящих через фиксированную точку O, а эти прямые называются точками проективной плоскости.*

На каждой прямой в $\mathbb{R}^3$, проходящей через начало координат, можно выбрать любую точку (x, y, z), отличную от начала координат. Таким образом, все ненулевые тройки $[x : y : z]$ с точностью до пропорциональности кодируют точки проективной плоскости и называются *однородными координатами на плоскости*. Это определение естественно согласуется с данным ранее интуитивным: если зафиксировать в пространстве обычную плоскость $\alpha|z = 1$, не содержащую точку O, то каждой ее точке A сопоставляется прямая OA, а каждой бесконечно удаленной точке некоторого направления сопоставляется прямая, проходящая через точку O параллельно α соответствующего направления. Тройка $[0 : 0 : 0]$ не задает никакую точку проективной плоскости.

Заметим, что оси OX и OY трехмерных координат параллельны плоскости α, а ось OZ перпендикулярна ей. Спроецировав OX и OY на α, получим стандартную систему координат в этой плоскости. Точка с координатами (x, y) в этих координатах имеет однородные координаты $[x : y : 1]$. Бесконечно удаленные точки проективной плоскости имеют однородные координаты $[x : y : 0]$

Пусть p и q — две различные точки проективной плоскости α. Посмотрим на плоскость, проходящую через точки p, q и O, — она задается уравнением $ax+by+cz = 0$, где a, b и c — фиксированные числа, выбранные с точностью до пропорциональности. Однородными координатами прямой pq мы будем называть тройку чисел $[a : b : c]$ с точностью до пропорциональности. Тройка $[0 : 0 : 0]$ не задает никакую прямую.

Легко видеть, что точка $[x_0 : y_0 : z_0]$ лежит на прямой $[a : b : c]$ тогда и только тогда, когда $ax_0 + bx_0 + cz_0 = 0$, откуда прямой подстановкой следует следующее утверждение:

Лемма 4.1. *Коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $[x_1 : y_1 : z_1]$ и $[x_2 : y_2 : z_2]$, можно записать как*

$$[y_1z_2 - z_1y_2 : z_1x_2 - x_1z_2 : x_1y_2 - y_1x_2]$$

а координату точки пересечения двух прямых $[a_1 : b_1 : c_1]$ и $[a_2 : b_2 : c_2]$

$$[b_1c_2 - c_1b_2 : c_1a_2 - a_1c_2 : a_1b_2 - b_1a_2]$$

Аналогичным образом можно определить однородные координаты на проективной прямой, кодируя ее точки парами чисел $[x : y]$ с точностью до пропорциональности. Поскольку время — это точка проективной прямой, ее можно рассматривать как пару чисел $[t_1 : t_2]$.

Раннее мы рассматривали отображения из проективной прямой в проективную плоскость (а конкретно, в прямые и коники на ней), сохраняющие двойные отношения. Сейчас мы расширим наш арсенал *полиномиальными отображениями*, то есть такими функциями $\mathcal{F}\colon \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^2$, которые на вход берут пару чисел t_1, t_2, а на выходе выдают тройку многочленов $P(t_1, t_2), Q(t_1, t_2)$ и $R(t_1, t_2)$, отвечающие тройке однородных координат точки на проективной плоскости.

Очевидно, что на многочлены P, Q и R нужно наложить некоторые условия, чтобы указанное отображение корректно отображало точки проективной прямой-времени в проективную плоскость.

Многочлены должны быть однородными ($t_1^2+2t_1t_2$ подходит, а $t^3+2t_1t_2$ — нет) и одинаковой степени, чтобы можно было пропорционально заменять координаты. Также мы не хотим, чтобы для каких-то t_1, t_2 все три многочлена разом обращались в ноль, для этого потребуем их взаимную простоту.

Определение 4.2. Степенная зависимость. *Будем говорить, что степень зависимости точки X от времени равна k, если однородные координаты точки X можно записать как $[P_1(t_1,t_2) : P_2(t_1,t_2) : P_3(t_1,t_2)]$, где P_i — однородные полиномы степени k от времени, которые взаимно просты в совокупности. Аналогично определим степени зависимости прямых.*

Легко понять, что такое определение корректно.

Лемма 4.2. О сложении степеней. *Пусть точки X и Y движутся со степенями a и b соответственно. Тогда степень прямой XY не выше, чем $a+b$.*

Доказательство. Обозначим однородные координаты точек за $[x_1 : x_2 : x_3]$ и $[y_1 : y_2 : y_3]$ соответственно, тогда координаты прямой XY задаются как $[x_2y_3 - x_3y_2 : x_3y_1 - x_1y_3 : x_1y_2 - y_1x_2]$. Если x_i — это многочлены степени не выше, чем a, а y_i — не выше чем b, то указанные выражения — полиномы степени не выше, чем $a+b$. Отметим, что оценка может быть не точна только в том случае, когда получившаяся тройка многочленов не взаимно проста в совокупности. □

Лемма 4.3. *Пусть точка X степени 1 движется по прямой, не проходящей через точку S. Тогда степень прямой SX также равна 1.*

Доказательство. Из леммы о сложении степеней следует, что степень прямой SX не выше, чем $0+1$. Так как прямая не неподвижна, то оценка точна. □

В следующей главе мы докажем более общую теорему: если точка X степени a движется по произвольной траектории, не проходящей через точку S, то степень прямой SX равна степени точки X.

Теорема 4.1. *Степень зависимости точки X, проективно едущей по прямой, равна 1. Степень проективно вращающейся в пучке прямой также равна* 1.

Доказательство. Для начала покажем, что любое проективное отображение из прямой в прямую можно разложить в композицию параллельных переносов и центральных проекций.

Пусть точки A, B и C прямой ℓ_1 переходят в точки A_1, B_1 и C_1 прямой ℓ_2. Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то спроецируем ℓ_1 на любую не параллельную им прямую и будем решать задачу для пары не параллельных прямых. Сделаем параллельный перенос прямой ℓ_1, переводящий точку A в точку A_1, точки B и C перешли при нем в B' и C'. Обозначим за S пересечение B_1B' и C_1C' (возможно, бесконечно удаленное). Проекция с центром в точке S, переводящая ℓ_1' в ℓ_2, реализует искомую гомографию.

Очевидно, что параллельный перенос не меняет степень зависимости, поэтому нужно проверить, что центральная проекция проективно движущейся по прямой точки не меняет степень зависимости — это следует из предыдущей леммы. □

Теорема 4.2. *Проективные преобразования плоскости линейно меняют однородные координаты.*

Лемма 4.4. Об удвоении степени на конике. *Точка X, проективно бегающая по окружности (конике), имеет степень зависимости* 2.

Доказательство. Отметим на окружности две фиксированные точки A, B, тогда прямые $a = AX$ и $b = BX$ вращаются проективно, следовательно точка X определяется как пересечение двух прямых со степенями зависимости 1, тогда по лемме о сложении степеней получаем требуемое. $\square$

Замечание: Легко понять, верна и двойственная лемма: Пусть прямая ℓ вращается вокруг окружности (коники) так, что точка касания имеет степень движется проективно. Тогда степень ℓ оценивается как 2.

Теорема 4.3. *Чтобы проверить, что точка степени k всегда совпадает с точкой степени l, достаточно проверить $k + l + 1$ положение.*

Доказательство. Заметим, что совпадение точек в момент времени $[t_1 : t_2]$ равносильно тому, что отношения многочленов от t_1, t_2, задающих координаты точек, равны:

$$\begin{cases} \dfrac{P_x(t_1,t_2)}{P_y(t_1,t_2)} = \dfrac{Q_x(t_1,t_2)}{Q_y(t_1,t_2)} \\ \dfrac{P_y(t_1,t_2)}{P_z(t_1,t_2)} = \dfrac{Q_y(t_1,t_2)}{Q_z(t_1,t_2)} \\ \dfrac{P_z(t_1,t_2)}{P_x(t_1,t_2)} = \dfrac{Q_z(t_1,t_2)}{Q_x(t_1,t_2)} \end{cases}$$

Что равносильно (если соответствующая пара знаменателей не обращается в ноль):

$$\begin{cases} P_x(t_1,t_2)Q_y(t_1,t_2) = P_y(t_1,t_2)Q_x(t_1,t_2) \\ P_x(t_1,t_2)Q_z(t_1,t_2) = P_z(t_1,t_2)Q_x(t_1,t_2) \end{cases}$$

А для того, чтобы проверить тождественное совпадение однородных многочленов от двух переменных степени не выше чем $k+l$, достаточно проверить $k+l+1$ не пропорциональное положение. Действительно: если многочлен обнуляется в точках (x_i, y_i) при $y_i \neq 0$, то разделив $P(t_1, t_2)$ на t_2^d где d — степень многочлена, получим полином от одной переменной $\dfrac{t_1}{t_2}$, количество корней которого больше его степени, поэтому он тождественно равен нулю. Если же один из поданных нам моментов времени $[t : 0]$, то можно вынести t_2 как общий множитель и применить к оставшемуся предыдущее рассуждение. $\square$

Аналогично, для проверки инцидентности прямой степени k и точки степени l также достаточно проверять $k + l + 1$ положение.

Сформулированный набор лемм является «базовым» и уже помогает решать множество не простых задач. Убедимся в этом на примере:

Пример 4.1. *На прямой BC неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP = CQ$. Пусть ω — вписанная окружность треугольника, ω_A — вневписанная, касающаяся отрезка BC. S и T на окружностях ω и ω_A соответственно таковы, что PS касается ω, а QT касается ω_A. AS и AT пересекают BC в X и Y соответственно. Доказать, что $BX = CY$.*

1. Введем на плоскости однородную систему координат и время. Будем двигать точку P проективно по прямой BC. Будем обозначать степень зависимости точки за d.

2. Точка S проективно зависит от P и движется по окружности, поэтому, согласно лемме об удвоении степени точки на конике, $d(S) \leq 2$.

3. По лемме о сложении степеней $d(AS) \leq d(S) + d(A) \leq 2 + 0 = 2$

4. В силу той же леммы $d(X) \leq d(BC) + d(AS) \leq 0 + 2 = 2$. Аналогично $d(Y) \leq 2$, так как P и Q симметричны относительно M середины BC, то есть, проективно зависимы.

5. Обозначим $Y' = \mathcal{S}_M(X)$. Очевидно, $d(Y') = d(X) \leq 2$, значит, мы хотим доказать, что две точки со степенями зависимости не более чем 2 совпадают, для этого достаточно проверить $2 + 2 + 1 = 5$ положений.

6. Положения $P = C, P = B, P = A_1$ — точка касания вписанной окружности, $P = M$ – середина $BC, P = \infty$ очевидны.

При решении задач полезно понимать, как корректно обрабатывать вырожденные случаи. Пусть в какой-то момент мы хотим провести прямую через две совпадающие точки: из формул следует, что координаты этой прямой будут $[0 : 0 : 0]$ (то есть, у трех многочленов, задающих координаты прямой, будет общий множитель), что автоматически гарантирует обнуление всех последующих однородных многочленов; поэтому можно считать, что во всех вырожденных случаях условие задачи автоматически выполнено. Однако при таком подходе нужно действовать аккуратно. Разберем такой пример: точка X проективно движется по конике, точка S фиксирована на ней. Пусть требуется доказать, что некоторая точка Y степени 1 всегда лежит на прямой SX. Мы хотим правильно интерпретировать прямую SX, когда $S = X$. Если мы оцениваем степень прямой SX по лемме о сложении степеней, то ее степень не выше 2, и, при $X = S$, прямая SX «нулевая», что дает нам бесплатное положение (эффект того, что мы изначально не точно оценили степень). После этого, для решения задачи нам нужно найти еще три положения. Если же мы думаем про SX как про прямую, проективно вращающуюся в пучке точки S, то нам изначально нужно проверять три положения, но при $X = S$ прямую SX, конечно, надо интерпретировать как касательную, а не как «нулевую».

Попробуйте попрактиковаться с теорией, решив несколько упражнений.

36. Точки A и B движутся с постоянными скоростями по двум прямым. Докажите, что направление прямой AB проективно.

37. Три точки движутся проективно. Сколько положений достаточно проверить, чтобы убедиться, что они всегда лежат на одной прямой? Тот же вопрос для трех проективно вращающихся прямых.

38. Точки X и Y движутся со степенями a и b. Докажите, что середина отрезка, их соединяющего, движется со степенью не выше, чем $a + b$.

39. На окружности ω фиксирована точка P и движется точка A степени a. Точка B выбирается так, что дуга PB в два раза больше дуги PA (если считать против ч.с.). Докажите, что степень B не выше $2a$.

40. Полярное преобразование не меняет степень зависимости.

Теперь перейдем к решению задач.

41. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Треугольники ACE и BDF в пересечении образуют шестиугольник. Докажите, что главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке.

42. Через ортоцентр остроугольного треугольника провели две перпендикулярные прямые. Докажите, что середины отрезков, которые эти прямые высекают на сторонах или продолжениях сторон треугольника, лежат на одной прямой.

43. Дан треугольник ABC и три точки P, Q, R, лежащие на одной прямой. Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B' и C'. Прямые $A'Q$, $B'Q$ и $C'Q$ пересекают ту же окружность в точках A'', B'' и C''. Прямые $A''R$, $B''R$, $C''R$ пересекают ту же окружность в точках A''', B''' и C'''. Доказать, что прямые AA''', BB''', CC''' пересекаются в одной точке, лежащей на прямой, проходящей через точки P, Q и R.

44. На описанной окружности треугольника ABC отмечена точка X. Прямые BX и CX пересекают высоты CC_1 и BB_1 в точках P, Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

45. В остроугольном треугольнике ABC, вписанном в окружность Ω с центром O, проведена высота AH_A. Прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C касаются окружности Ω в точках A, B, C соответственно. Точка S — ортоцентр треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C. Докажите, что прямые OH_A и SH_A симметричны относительно прямой BC.

46. Вневписанная окружность треугольника ABC имеет центр I_A, касается отрезка BC в точке A_1 и касается прямых AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На прямой I_AC_1 выбрана точка P так, что $AP \perp BI_A$. На прямой I_AB_1 выбрана точка Q так, что $AQ \perp CI_A$. Докажите, что точки P, Q, A_1 лежат на одной прямой.

47. На прямой Эйлера неравнобедренного треугольника ABC отмечена точка X, лежащая внутри треугольника; точка O — центр окружности (ABC). Прямые AX, BX, CX пересекают соответственные стороны треугольника ABC, в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что окружности (AOA_1), (BOB_1), (COC_1) имеют две общие точки.

48. Дан треугольник ABC с ортоцентром H. На описанной около треугольника окружности выбираются точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкуррентны. Обозначим за A_2, B_2 и C_2 точки, симметричные A_1, B_1 и C_1 относительно середин соответствующих сторон треугольника. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 и H лежат на одной окружности.

49. Дан треугольник ABC с ортоцентром H. На описанной около треугольника окружности выбираются точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкуррентны. Обозначим за A_2, B_2 и C_2 точки, симметричные A_1, B_1 и C_1 относительно соответствующих сторон треугольника. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 и H лежат на одной окружности.

50. Теорема Торнера. Пусть точки P, Q инверсны относительно окружности ABC, P_C симметрична P относительно AB, P_CQ пересекает AB в точке C'. Аналогично определяются точки A', B'. Тогда A', B', C' лежат на одной прямой.

51. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle B = \angle D$. Докажите, что середина диагонали BD лежит на общей внутренней касательной к окружностям, вписанным в треугольники ABC

и ACD.

52. Дан треугольник ABC. Обозначим за A_1 пересечение средней линии, параллельной BC, с прямой, соединяющей основания высот на стороны AB, AC. Аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

53. Диагонали вписанного в окружность в ω четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Обозначим за I_A, I_B, I_C и I_D центры окружностей, вписанных в треугольники APB, BPC, CPD и DPA соответственно. Пусть S_A, S_B, S_C и S_D середины «меньших» дуг AB, BC, CD и DA окружности ω. Докажите, что прямые I_AS_A, I_BS_B, I_CS_C и I_DS_D пересекаются в одной точке.

5 Полиномиальное движение +

В этой главе собрано три сюжета, которые можно изучать почти независимо друг от друга: обобщения ранее доказанных теорем, принцип относительности, и комбинирование теоремы Понселе с движением.

Для того, чтобы доказывать более продвинутые теоремы, связанные с полиномиальным движением, нам понадобится более мощный арсенал, чем вещественные числа. Все определения и теоремы предыдущей главы работают и для комплексных чисел. Вместо проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ мы будем рассматривать $\mathbb{CP}^1$ — множество прямых, проходящих через $(0,0)$ в $\mathbb{C}^2$. Однородные координаты на проективной комплексной прямой это пары чисел $[z_1 : z_2]$, выбирающиеся с точностью до пропорциональности. То же и с комплексной проективной плоскостью $\mathbb{CP}^2$ и ее однородными координатами, пучками и т.д. Отметим, что многие результаты предыдущих глав также верны и для комплексных чисел. Комплексную единичную окружность на $\mathbb{C}^2$ нужно мыслить как множество решений уравнения $x^2+y^2=1$ в комплексных числах, а на $\mathbb{CP}^2$ как множество точек $[x:y:z]$, для которых $x^2+y^2=z^2$. Любая невырожденная коника получается из окружности проективным преобразованием (переводящем прямые в прямые) и может быть задана множеством нулей однородного неприводимого полинома $P(x,y,z)=0$.

54. Докажите, что комплексная прямая и невырожденная комплексная коника имеют не более двух общих точек. Могут ли они не пересекаться?

Комплексные числа лучше вещественных тем, что любой непостоянный полином $f(x)$ имеет корень (этим можно пользоваться без доказательств). Более того, любая кривая степени n на $\mathbb{CP}^2$ (то есть, множество нулей однородного полинома степени n) пересекается с кривой степени m по mn точкам с учетом кратности. Это утверждение называется обобщенной теоремой Безу. В этой главе теорема Безу нам не понадобится — мы будем использовать лишь такой его частный случай:

55. а) Докажите, что однородный непостоянный многочлен $f(t_1,t_2)$ делится на некоторый линейный однородный многочлен at_1+bt_2 **b)**. Докажите, что любой однородный многочлен $f(t_1,t_2)$ единственным образом (с точностью до перестановок и умножения на константы) раскладывается в произведение $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$, где p_i — однородные линейные полиномы от двух переменных.

Не вооруженным взглядом видно, что последняя задача — аналог основной теоремы арифметики.

Лемма 5.1. ***Комплексная лемма о сложении степеней.*** *Пусть точки X и Y движутся со степенями a и b соответственно. Тогда степень прямой XY не выше чем $a+b$, причем если точки X и Y в любой момент времени различны, то эта оценка точная.*

Доказательство. Обозначим однородные координаты точек за $[x_1:x_2:x_3]$ и $[y_1:y_2:y_3]$ соответственно, тогда координаты прямой XY задаются как $[x_2y_3-x_3y_2 : x_3y_1-x_1y_3 : x_1y_2-y_1x_2]$. Если x_i — это многочлены степени не выше, чем a, а y_i — не выше чем b, то указанные выражения — полиномы степени не выше, чем $a+b$. Если оценка не точна, то у трех получившихся многочленов есть общий непостоянный множитель $d(t_1,t_2)$. Выберем у d любой линейный делитель $p=at_1+bt_2$. Тогда в момент времени $[b:-a]$ прямая XY была нулевая, то есть точки X и Y совпадали, противоречие. □

Лемма 5.2. *Пусть точка X степени a движется по прямой, не проходящей через точку S. Тогда степень прямой SX также равна a.*

Доказательство. Следует из предыдущего утверждения. □

Суммируя все вышеперечисленное получаем:

Теорема 5.1. *Пусть f — гомография прямых или пучков. Тогда f не меняет степень зависимости.*

Осталось разобраться с гомографиями, задействующими коники. Мы уже доказали, что при перебрасывании точки на конику ее степень удваивается. Верно и обратное.

Теорема 5.2. ***(О сбрасывании точки с коники).*** *Точка X степени k движется по конике, точка S фиксирована на ней. Тогда степень прямой SX равна $\frac{k}{2}$, в частности, k — четно.*

Эту теорему, разбитую на задачи, Вы докажете (или нет) самостоятельно (все объекты в них предполагаются комплексными).

56. Дана коника ω. Выберем произвольную точку S ВНЕ коники и прямую ℓ, не содержащую S. Пусть f — проекция коники из точки S на прямую ℓ. Докажите, что у всех точек прямой по два прообраза, кроме, быть может, конечного числа.

57. Точка X полиномиально движется по конике ω. Выберем НА ω произвольную точку T и рассмотрим проекцию ω из T на прямую $z = 0$. Пусть образ точки X при этой проекции — это X'. Таким образом, мы построили отображение g из комплексной прямой-времени в прямую $z = 0$. **a)** Докажите, что существует такое число k, что у всех точек прямой $z = 0$ кроме, быть может, конечного числа ровно k прообразов при отображении g. **b)** Докажите, что точка X посетила почти все точки ω ровно k раз.

58. Обозначим за X'' образ точки X при отображении f из пред-предыдущей задачи. Посчитайте двумя способами, сколько раз точка X'' посетила общую точку прямой ℓ и выведите отсюда утверждение теоремы.

Начнем следующий сюжет с некоторого мотивирующего примера. Предположим, что вершины некоторого треугольника движутся со степенями a, b и c соответственно. Как можно оценить степень центра описанной около него окружности? Несложные вычисления показывают, что степень середины отрезка, соединяющего точки со степенями a и b, движется со степенью не выше, чем $a + b$. Направление прямой, соединяющей вершины степеней a и b, также имеет степень не выше, $a + b$, поэтому серединный перпендикуляр к соответствующей стороне треугольника имеет степень не выше, чем $(a+b)+(a+b) = 2(a+b)$ (согласно лемме о сложении степеней). Аналогично, серединный перпендикуляр к стороне треугольника с вершинами степени a и c имеет степень не выше, чем $2(a+c)$. Пересекая эти серединные перпендикуляры и вновь применяя принцип сложения степеней, получим, что центр окружности движется со степенью не большей, чем $4a + 2b + 2c$.

Это оценка заставляет задуматься: получившееся выражение не симметрично по степеням вершин треугольника, что странно. Вероятно, это должно означать, что предъявленная нами оценка не точна. Более того, появляется разумное подозрение, что реально можно оценить степень просто как $2(a + b + c)$. Давайте заведем инструмент, который позволит нам доказать нашу гипотезу.

Определение 5.1. Полиномиальная подстановка. *Предположим, что на проективной плоскости зафиксированы произвольные подмножества $P_1, P_2, ...P_n$ и для любого набора точек $p_1 \in$*

$P_1, p_2 \in P_2..., p_n \in P_n$ определена точка $[p_{0_x} : p_{0_y} : p_{0_z}] = \mathcal{R}(p_1, p_2, ..., p_n)$, причем существуют однородные многочлены R_x, R_y, R_z от $3n$ переменных такие, что $p_{0_x} = R_x(p_{1_x}, p_{1_y}...p_{n_z})$ и аналогично для p_{0_y} и p_{0_z}. Более того потребуем, чтобы многочлены $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y$ и $\mathcal{R}_z$ были однородными многочленами одинаковой степени отдельно по координатам каждой из точек p_i. Такое $\mathcal{R}$ будем называть полиномиальной подстановкой от n переменных.

Определение 5.2. Относительная степень зависимости. *Пусть $\mathcal{R}$ — некоторая полиномиальная подстановка от двух переменных, точки q_1 и q_2 движутся с некоторыми степенями зависимости, также $q = \mathcal{R}(q_1, q_2)$. Пусть r_1 наименьшее такое натуральное число, что для любого фиксированного момента времени $[\tau_1 : \tau_2]$ степень зависимости точки $\mathcal{R}(q_1, q_2(\tau_1, \tau_2))$ не выше, чем r_1 (при разных фиксированных $[\tau_1 : \tau_2]$ степень может быть разной). Такое r_1 мы будем называть относительно степенью точки q от точки q_1.*

Аналогично определяются относительные степени точки, зависящей более, чем от двух. Нужно фиксировать все точки q_i и смотреть на степень зависимости точки q, когда она зависит только от одной переменной точки.

59. Принцип относительности. Пусть точки $q_1, q_2..., q_n$ движутся полиномиально, и относительные степени точки $q = \mathcal{R}(q_{1_t}, q_{2_t}, ...q_{n_t})$ равны $r_1, r_2, ...r_n$ для некоторой полиномиальной подстановки $\mathcal{R}$. Тогда степень зависимости точки q не выше, чем $r_1 + r_2 + ... + r_n$.

60. Пусть вершины треугольника двигаются со степенями a, b и c соответственно, тогда центр описанной около этого треугольника окружности и его ортоцентр оба имеют степень зависимости не больше, чем $2(a + b + c)$.

61. Точки A и B движутся по конике ω проективно. **a)** Докажите, что прямая AB огибает некоторую конику γ. **b)** Докажите, что коники ω и γ касаются в двух точках на $\mathbb{CP}^2$ (то есть, точки касания могут иметь комплексные координаты). **c)** Докажите, что в конфигурации Понселе соседние вершины треугольника зависят друг от друга проективно тогда и только тогда, когда вращающийся треугольник — правильный.

62. Точки A и B едут по одной и той же конике проективно. Докажите, что пересечение касательных к конике в точках A и B проективно движется по некоторой конике.

63. Пусть точка A движется по конике со степенью $2a$, точка B движется по произвольной траектории со степенью b. Обозначим за C второе пересечение прямой AB с коникой. Тогда степень зависимости точки C не выше чем $2a + 2b$.

64. Точки движутся со степенями a, b, c и d. Докажите, что для того, чтобы проверить то, что они лежат на одной окружности, достаточно $2(a + b + c + d) + 1$ положение.

Часто оказывается эффективным применение поризма Понселе не только ко вписанной и описанной окружности треугольника, но и ко вневписанной и описанной. При такой конфигурации есть шесть вырожденных положений: параметризуем динамику касательной ℓ, вращающейся вокруг вневписанной окружности; можно выбрать два положения, когда ℓ касается описанной и вневписанной окружности, два положения, когда ℓ проходит через общие точки окружностей, а также два положения, когда получающиеся треугольник равнобедренный.

65. Обозначим за Ω и ω описанную и вневписанную окружности треугольника ABC. Пусть они пересекаются в точках X и Y. Общие внешние касательные Ω и ω касаются Ω в U и V. Докажите, что касательные к ω в X и Y проходят через U и V.

66. Обозначим за ω вневписанную окружность треугольника ABC, касающуюся отрезка BC. Общие внешние касательные к ω и (ABC) касаются (ABC) в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через основания биссектрис, проведенных из вершин B и C.

67. Вневписанная окружность ω треугольника ABC касается отрезка BC в точке A_1 и пересекает описанную окружность (ABC) в точках X и Y. Касательные к ω в точках X и Y пересекаются в точке Z. Обозначим за S середину дуги BAC. Докажите, что прямые SA_1 и AZ пересекаются на (ABC).

68. Вневписанная окружность ω треугольника ABC касается отрезка BC в точке D и пересекает описанную окружность (ABC) в точках K и L. Обозначим за E основание высоты треугольника из вершины A. Докажите, что на прямых KD и LD найдутся такие точки V и N, что четырехугольник $EVAN$ — ромб.

69. Прямая ℓ степени d вращается вокруг точки O. Зафиксируем два различных вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, с началом в точке O. Докажите, что $\dfrac{\sin\angle(\ell,\overrightarrow{OA})}{\sin\angle(\ell,\overrightarrow{OB})}=\dfrac{P(t_1,t_2)}{Q(t_1,t_2)}$, где $P(t_1,t_2)$ и $Q(t_1,t_2)$ — однородные полиномы степени d от двух переменных.

70. Пусть ABC треугольник с описанной окружностью ω и вневписанной окружностью Ω_A, касающейся отрезка BC. Обозначим пересечения этих окружностей за X и Y соответственно. Точки P и Q — проекции точки A на касательные в точках X и Y к Ω_A. Точка R — пересечение касательной к окружности (APX) в точке P с касательной к окружности (AQY) в точке Q. Докажите, что $AR \perp BC$.