Метод перераспределения зарядов*

Егор Бакаев, Вера Буланкина,
Александр Полянский, Андрей Рябичев, Григорий Челноков

Вместо введения

Данный проект посвящён одному методу, применяющемуся в теории графов. В частности, он используется для доказательства многих «структурных» результатов о графах, изображённых на плоскости, но не обязательно планарных. Своей популярностью он обязан тому факту, что применялся в доказательстве теоремы о четырёх красках[1]. Речь идёт о так называемом *методе перераспределения зарядов*. По сути это обобщение подсчёта двумя способами для элементов графов, изображенных на плоскости, основанная на формуле Эйлера.

Наш проект достаточно непростой: вам предстоит самостоятельно понять, как работает данный подход. Ниже для ознакомления приведены три интересные задачи, которые позже встретятся в проекте — они довольно сложные и их решение мы рекомендуем отложить на потом.

1. Конечная конфигурация точек на плоскости называется *магической*, если выполняется следующее условие: точкам можно так приписать положительные числа, что сумма чисел на точках любой прямой, проходящей через хотя бы две из точек конфигурации, равна 1. Опишите все магические конфигурации.

2. Граф, изображенный на плоскости, называется *квазипланарным*[2], если у него не найдется *трёх* ребер, попарно пересекающихся во внутренних точках. Докажите, что число рёбер в квазипланарном графе на n вершинах не превосходит $8n - 20$.

3. Граф называется *спичечным*, если он может быть изображён на плоскости так, чтобы все его ребра являлись непересекающимися друг с другом отрезками длины 1. Докажите, что не существует спичечного графа, степень каждой вершины которого равна 5.

Наконец, стоит отметить, что в заключительном разделе проекта, который будет выдан после промежуточного финиша, можно найти открытые исследовательские задачи, которые, вероятно, решаются с помощью данного метода. Решение любой из них является результатом, достойным публикации.

*Здесь вы можете найти текущие результаты: https://clck.ru/HMnm8

[1] Одна из сложных задач проекта будет связана с раскраской плоских графов, но саму теорему о четырёх красках мы не будем доказывать.

[2] Отметим, что если в этом определении заменить “трех ребер” на “двух ребер” — получится обычное определение планарного графа, что и объясняет выбор термина “квазипланарный”.

Часто используемые обозначения

Через Γ обозначим граф[3]. Через $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$ обозначим, соответственно, *множества вершин* и *ребер* графа Γ. Кроме того, если задано вложение Γ в плоскость, то $F(\Gamma)$ обозначает *множество граней* этого вложения Γ. Также напомним, что для связного плоского графа Γ выполняется *формула Эйлера*

$$|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)| + |F(\Gamma)| = 2.$$

Обозначим *степень* вершины $v \in V(\Gamma)$ через $\deg(v)$, а через $\delta(\Gamma)$ и $\Delta(\Gamma)$ *минимальную* и *максимальную* степень вершины в $V(\Gamma)$ соответственно. Граф называется *n-регулярным*, если степень каждой вершины равна n. *Весом* ребра назовем сумму степеней его концов. Назовем *степенью грани* $\deg(f)$ длину цикла, образующего грань (таким образом, ребро считается дважды, если грань проходит по нему два раза).

Будем говорить, что граф правильно *раскрашен в k цветов*, если каждой вершине поставлено в соответствие одно из чисел от 1 до k (называемых цветами) так, что соседние вершины имеют разные цвета. Минимальное такое k, что граф Γ можно правильно покрасить в k цветов, называется *хроматическим числом* и обозначается через $\chi(\Gamma)$.

Подграф Γ' графа Γ называется *индуцированным*, если он содержит все ребра графа Γ, соединяющие вершины $V(\Gamma')$.

1 Подсчёт двумя способами

1.1. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

1.2. На фестиваль Зиланткон приехало E эльфов и D гномов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф — не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них — соперников-гномов. Докажите, что $D \leqslant \frac{10}{11}E$.

1.3. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.

1.4. В библиотеке на полках стоят книги, ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k + 1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.

[3]Здесь и далее, если не оговаривается обратное, мы будем рассматривать графы без петель и кратных рёбер.

1.5. Таблица $n \times n$ заполнена **а)** нулями и единицами **б)** целыми неотрицательными числами так, что если число в какой-то клетке таблице равно 0, то сумма всех чисел в ее кресте[4] не меньше 1000. Найдите наименьшую возможную сумму чисел в таблице.

1.6. Пусть есть выпуклый n-угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между двумя вершинами многоугольника содержит по крайней мере одну красную точку. Тогда

$$m \geqslant n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\right).$$

1.7. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).

1.8. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдётся два с общей стороной.

1.9*. На плоскости нарисовано n прямых в общем положении (любые две пересекаются и никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, найдётся не менее $n-2$ треугольников.

2 Задачи о графах

Планарные графы

В этом подразделе собраны задачи, исторически доказанные обсуждаемым методом. Как правило, это леммы из вполне серьезных статей. Однако по сложности эти задачи не превосходят тяжелые олимпиадные, так что мы сочли возможным дать их без дополнительных подсказок.

2.1. Дан выпуклый многогранник, у которого нет четырехугольных и пятиугольных граней. Докажите, что у него по крайней мере 4 треугольные грани.

2.2. Дан планарный граф с $\delta(\Gamma) \geqslant 2$, все циклы в котором длины по крайней мере 7. Докажите, что найдется ребро веса не больше 5.

2.3. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geqslant 5$, все грани которого — треугольники, а также нет двух соседних вершин степени 5. Докажите, что найдётся грань, степени вершин которой равны 5, 6 и 6 соответственно.

2.4. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geqslant 5$. Докажите, что найдется ребро веса не больше 11.

2.5. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geqslant 3$. Докажите, что найдется такая пара из грани f и вершины v в ней, что $\deg(v) = 3$ и $\deg(f) \leqslant 5$ или $\deg(v) \leqslant 5$ и $\deg(f) = 3$.

2.6. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geqslant 3$. Докажите, что у Γ есть не более чем 5-угольная грань, в которой степени всех вершин, кроме возможно одной, не превосходят 11.

[4] Крестом клетки называется объединение её столбца и её строки

Легкие раскраски

В предыдущих задачах этого раздела мы выводили локальные свойства графов из их глобальных свойств. Например, из информации о наименьшей степени вершины в графе мы делали вывод о наличии у него некоторых подграфов. Такого рода утверждения бывают полезны для доказательства оценки сверху хроматического числа графа.

2.7. а) Докажите, что любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов правильным образом.

б) Пусть для любого подграфа некоторого графа найдётся вершина графа степени не превосходящей $d-1$ или индуцированный чётный цикл, степень каждой вершины которого не превосходит d. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в d цветов.

Определение. У графа существует *очень легкая раскраска* в d цветов, если из графа можно получить пустой граф, последовательно удаляя вершины степени не больше $d-1$. Также такое свойство графа называется d-разбиваемостью.

Комментарий. Например, в задаче 2.7а как раз нужно показать, что у графа есть очень легкая раскраска.

Определение. Граф называется *вершинно k-выбираемым*, если для любого способа приписать каждой вершине список из k цветов (списки у разных вершины не обязаны совпадать), найдется способ выбрать для каждой вершины по одному цвету из списка, так что соседние вершины имеют разные цвета.

Аналогично определяется *реберная k-выбираемость.*

Вершинную k-выбираемость, как наиболее часто используемую, иногда называют просто k-выбираемостью. Минимальное такое k, что граф Γ является k-выбираемым называется *списочным хроматическим числом* и обозначается через $\mathrm{ch}(\Gamma)$.

Как легко видеть, из вершинной k-выбираемости графа следует его раскрашиваемость в k цветов. В самом деле, могло так случиться, что каждой вершине достался список из одних и тех же цветов. Оказывается, что обратное утверждение неверно, то есть существует не k-выбираемый граф, который можно покрасить в k цветов.

2.8. а) Докажите, что для любого заданного k найдется такое n, что полный двудольный граф $K_{n,n}$ не будет k-выбираемым. Хотя и является 2-раскрашиваемым, как любой двудольный граф.

б) Докажите, что цикл четной длины не только 2-раскрашиваем, но и 2-выбираем.

2.9. а) Дан планарный граф, внешняя грань которого это цикл $v_1 \dots v_k v_1$, остальные грани треугольные. Вершинам v_1 и v_2 соответствуют списки из двух цветов, каждой другой вершине внешней грани приписан список из трех цветов, а каждой внутренней вершине приписан список из 5 цветов. Докажите, что существует правильная списочная раскраска, соответствующая этим спискам.

б) Докажите, что для планарного графа Γ выполняется $\mathrm{ch}(\Gamma) \leqslant 5$.

Определение. Будем говорить, что у графа Γ существует *легкая d-выбираемость* по отношению к индуцированным подграфам $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, если из Γ можно получить пустой граф, последовательно удаляя эти индуцированные подграфы так, чтобы на момент удаления подграфа Γ_i из каждой из его вершин шло не более $d - \mathrm{ch}(\Gamma_i)$ ребер в вершины, не входящие в Γ_i.

Обратите внимание, что у графа из задачи 2.8б есть легкая d-выбираемость.

Приём, обобщающий легкую выбираемость, можно применить и для доказательства тотальной раскраски.

Определение. Припишем каждой вершине и каждому ребру графа Γ список из нескольких цветов (списки могут быть разной длины). Теперь присвоим каждой вершине и каждому ребру цвет из соответсвующего списка так, чтобы любые два соседних элемента[5] имели разные цвета. Такую раскраску назовем *тотальной списочной раскраской графа*, соответствующей этим спискам.

2.10. Пусть Γ — планарный граф с $\Delta(\Gamma) \geqslant 11$. Каждой вершине назначен список из $\Delta(\Gamma)$, а каждому ребру — из $(\Delta(\Gamma)+2)$. Тогда можно так выбрать цвета из списков, чтобы получить тотальную списочную покраску.

3 Серьезные задачи

В этой главе собраны четыре задачи, решённые методом перераспределения зарядов и ставшие основными результатами опубликованных статей. К ним мы считаем уместным наметить несколько промежуточных шагов.

3.1 Спичечные графы

Определение. Граф называется *спичечным*, если его вершины — это точки на плоскости, а ребра могут соединять только пары вершин на расстоянии 1, и никакие два рёбра не пересекаются (у них может быть общая вершина). (Заметим, что две вершины на расстоянии 1 могут быть и не соединены ребром.)

Ключевая задача 1. Докажите, что не существует 5-регулярного спичечного графа.

Замечание. На самом деле, в любом спичечном графе найдётся вершина степени меньше чем 5.

Определение. Граф называется *графом минимальных расстояний*, если его вершины — это точки на плоскости, среди которых нет двух на расстоянии меньшем 1, а рёбра — пары вершин на расстоянии 1.

[5]Две вершины называются соседними, если у них есть общее ребро; два ребра — если у них общая вершина; вершина и ребро — если это ребро выходит из этой вершины.

3.1.1. Дан граф минимальных расстояний на n вершинах, все вершины которого находятся в общем положении[6]. Докажите, что а) число рёбер меньше $5n/2$; б) найдётся постоянная c меньшая $5/2$ такая, что число рёбер не больше cn.

в) Граф называется *интересным*, если он является графом минимальных расстояний и для любой вершины графа она и все её соседи находятся в общем положении[7]. Докажите, что для любого $c < 5/2$ найдется интересный граф с не менее чем $c|V(\Gamma)|$ ребрами.

3.1.2. Решите ключевую задачу 1.

3.1.3*. Докажите, что в 4-регулярном спичечном графе не менее 20 вершин.

3.2 Квазипланарные графы

Определение. Будем говорить, что граф *нарисован на плоскости* если его вершинам поставлены в соответствие различные точки плоскости, а ребрам — (Жордановы) кривые, соединяющие вершины (концы ребра), и не проходящие через остальные вершины.

Это определение носит вспомогательный характер, с его помощью определяются разные типы графов. Например, планарные графы — те, которые можно нарисовать на плоскости вообще без пересечения ребер. Можно по-разному ослаблять требование отсутствия пересечений[8]. Каждое из этих ослаблений условия дает свое расширение класса планарных графов.

Определение. Граф называется *квазипланарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы любые два ребра пересекались не более чем в одной точке, и не было трех попарно пересекающихся ребер.

Ключевая задача 2. а) Квазипланарный граф на n вершинах содержит не более $8n - 20$ ребер.

б) Попробуйте усилить утверждение предыдущей задачи. Интересуют как улучшения оценки, так и обобщения для других классов графов.

3.2.1. Пусть граф удовлетворяет дополнительному условию: не существует тройки ребер e_1, e_2, e_3 такой, что e_1 и e_2 выходят из одной вершины A, а ребро e_3 пересекает их во внутренних точках B и C, причем нет других точек пересечения на участках AB и AC. Докажите, что число ребер не больше $4n - 8$.

3.2.2. Без дополнительного условия из прошлой задачи докажите оценку на число ребер $10n - 20$. Скорее всего, при решении предыдущего пункта вы использовали такую систему зарядов, которая сработает и здесь.

3.2.3. Решите ключевую задачу 2а. Скорее всего, при решении предыдущего пункта вы использовали такую систему зарядов, которая сработает и здесь.

[6] То есть никакие три не лежат на одной прямой.

[7] при этом все вершины графа не обязаны быть в общем положении

[8] Например, требование, чтобы каждое ребро имело не более чем t пересечений, или чтобы среди ребер было не более d попарно пересекающихся и так далее.

3.3 Списочные покраски ребер

В этом разделе мы вновь затронем понятие легких раскрасок. Напомним, в чем состоит ключевая идея: мы доказываем, что найдется нужный подграф, который можно удалить из заданного графа, сводя вопрос раскраски данного графа к раскраске меньшего.

Треугольником в этом разделе будем называть цикл длины 3. Определим Γ как планарный граф с дополнительным условием: никакие два треугольника не имеют общего ребра.

Основная цель данного раздела — решить следующую задачу.

Ключевая задача 3. Докажите, что Γ является реберно $(\Delta(\Gamma)+1)$-выбираемым, если $\Delta(\Gamma) \geqslant 6$.

Замечание. Ключевая задача 3 верна и при $\Delta(\Gamma)$, равном 3 или 4, причем и не для планарных графов. При $\Delta(\Gamma) = 5$ граф является реберно $(\Delta(\Gamma)+2)$-выбираемым.

3.3.1. Докажите, что при $\Delta(\Gamma) \geqslant 7$ граф Γ является реберно $(\Delta(\Gamma)+1)$-выбираемым.

Таким образом, вами решена ключевая задача 3 в случае $\Delta(\Gamma) \geqslant 7$. Случай $\Delta(\Gamma) = 6$ требует дополнительных усилий.

3.3.2. В случае $\Delta(\Gamma) = 6$ нас интересует еще одна конфигурация: вершина степени 6, входящая в три треугольника, два из которых с набором степеней $(6, 6, 3)$, а третий — $(6, 6, 3)$, $(6, 5, 4)$ или $(6, 6, 4)$. Докажите, что при наличии такой конфигурации, можно свести вопрос раскраски Γ к вопросу раскраски его подграфа.

3.3.3. Наконец, докажите, что при $\Delta(\Gamma) = 6$ граф Γ содержит хотя бы один из трех типов подграфов[9], позволяющих свести вопрос раскраски графа к раскраске меньшего графа.

3.4 Магические конфигурации

Определение. Конечная конфигурация точек на плоскости называется *магической*, если выполняется следующее условие: каждой точке можно так приписать положительное число, что любая прямая, проходящая через хотя бы две точки конфигурации, проходит через точки с суммой приписанных чисел равной в точности 1.

Ключевая задача 4. Описать все магические конфигурации.

Постановка этой задачи отчасти мотивирована теоремой Сильвестра.

Теорема Сильвестра. *Пусть дано конечное множество точек на плоскости. Тогда или все точки лежат на одной прямой, или найдётся такая пара точек A и B из множества, что на прямой AB не лежат точки множества, отличные от A и B.*

Нам потребуется следующая интересная конфигурация.

[9]Один их них вы нашли при решении задачи 3.3.1, другой подсказан в задаче 3.3.2, до третьего типа догадайтесь самостоятельно.

Определение. *Конфигурацией недоФано* называется следующая конфигурация из семи точек: A_1, A_2, A_3, A_4 в общем положении, оставшиеся три — это точки пересечения пар прямых: $B_1 = A_1A_2 \cap A_3A_4$, $B_2 = A_1A_3 \cap A_2A_4$ и $B_3 = A_1A_4 \cap A_2A_3$.

Оказывается, что нам будет удобнее рассуждать на двойственном языке.

3.4.0. а) *Опциональная задача, для тех, кто работает с проективной плоскостью.* Переведите задачу на двойственный язык. Во что переходит конфигурация недоФано?

б) *Опциональная задача для тех, кто не использует проективную плоскость.* Пусть на плоскости нарисованы точки и прямые. Придумайте отображение π, ставящее в соответствие картинке на плоскости картинку на сфере так, чтобы точке на плоскости соответствовал экватор[10] на сфере, прямой на плоскости соответствовала пара противоположных точек на сфере (обратите внимание: образ прямой это не образ всех ее точек!), и отображение сохраняло бы инцидентность: если точка A лежит на прямой ℓ, то образ $\pi(\ell)$ лежит на экваторе $\pi(A)$. Выведите отсюда остальные естественные свойства отображения (образ прямой AB это пара точек, по которым пересекаются экваторы $\pi(A)$ и $\pi(B)$; образ пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 – это экватор, содержащий пары противоположных точек $\pi(\ell_1)$ и $\pi(\ell_2)$). Во что переходит конфигурация недоФано?

3.4.1. Докажите теорему Сильвестра, используя формулу Эйлера и двойственный язык.

Конфигурация прямых называется *магической конфигурацией*, если она дуальна магической конфигурации точек. Теперь мы будем рассматривать только магические конфигурации прямых.

3.4.2. Пусть в магической конфигурации некоторой прямой (некоторому экватору) приписано число большее $\frac{1}{2}$. Докажите, что все остальные прямые (экваторы) пересекаются в одной точке (двух антиподальных точках).

Теперь рассматриваем только те конфигурации, в которых нет точки, протыкающей все прямые кроме, возможно, одной. Прямые, которым приписаны числа $\frac{1}{2}$, будем называть *красными*, остальные *синими*.

3.4.3. Докажите, что есть точка, в которой пересекаются ровно две синие и одна красная прямая (экватор). Напомним, что конфигурация состоит из прямых (экваторов), а не из точек.

3.4.4. Докажите, что в конфигурации есть синий четырехугольник разбиения с красными диагоналями.

Далее будем называть такой четурехугольних *плохим.*

3.4.5. Докажите, что найдется синий треугольник разбиения, имеющий общую сторону с плохим четырехугольником.

Далее будем называть такой треугольник *плохим.*

---

[10] *Экватором* на сфере называется окружность, получающаяся как пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы

3.4.6. Докажите, что если плохой треугольник имеет общие стороны сразу с двумя плохими четырехугольниками, то наша конфигурация является двойственной конфигурацией недоФано.

Далее будем полагать, что каждый плохой треугольник имеет общую сторону с ровно одним плохим четырехугольником.

3.4.7. Докажите, что найдутся плохой треугольник t, его плохой четырехугольник d и их общая вершина A такие, что кусок разбиения, вертикальный[11] t относительно A, является четырехугольником.

3.4.8. Рассмотрим разбиение проективной плоскости (сферы) синими прямыми (экваторами). Докажите, что найдётся такая прямая (экватор), что среди частей разбиения, примыкающих к этой прямой (экватору), ровно две (четыре) являются треугольными.

3.4.9. Покажите, что случай, описанный в предыдущей задаче, тоже невозможен.

[11] Два куска разбиения с общей вершиной A называются *вертикальными относительно* A, если их углы при A вертикальны

4 Открытые исследовательские задачи

1. *Графы минимальных расстояний.*

Про графы минимальных расстояний на n вершинах известно, что число рёбер не превосходит $(2+\frac{3}{7})n$, а также что существуют графы минимальных расстояний с по крайней мере $(2+\frac{5}{16})n-10\sqrt{n}$ рёбрами. Уточнение константы перед n в оценке сверху будет результатом, который можно опубликовать в виде научной статьи.

2. *4-регулярные спичечные графы.*

Уточните оценку снизу на число вершин в 4-регулярном спичечном графе. На сегодняшний день наилучшая оценка снизу равна 34. Известен пример 4-регулярного спичечного графа на 52 вершинах. Улучшение оценки снизу будет очень интересно.

3. *Линейность числа рёбер в графах с определёнными пересечениями.*

Назовем граф H*-свободным*, если он не содержит H в качестве подграфа. На плоскости изображён граф Γ на n вершинах так, что никакие два его ребра не пересекаются в более чем одной точке. Рассмотрим граф Γ', построенный на множестве его рёбер следующим образом: два ребра графа Γ соединим ребром тогда и только тогда, когда они пересекаются.

Гипотеза состоит в том, что для любого H найдётся такая константа c, что если граф Γ' является H-свободным, то выполняется неравенство $|E(\Gamma)| = |V(\Gamma')| \leq c|V(\Gamma)|$.

(Например, когда H — ребро, то Γ это планарный граф, а когда H — треугольник, Γ — квазипланарный.) Эта гипотеза доказана для полных графов K_n, где $n \leqslant 4$, циклов C_m, где $m \leq 6$, и полного двудольного графа $K_{2,3}$. Очень интересно получить результат про $K_{3,3}$, C_7 или любого другого графа не из данного списка.

4. *Гипотеза Сильвестра.*

Пусть на плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой. Прямую назовём *обычной*, если она содержит в точности две отмеченные точки. Точку назовём *обычной*, если через неё проходит обычная прямая.

Рассмотрим граф на множестве обычных точек. Две обычные точки соединим ребром, если через них проходит обычная прямая. Гипотеза состоит в том, что этот граф является полным тогда и только тогда, когда отмеченные точки образуют конфигурацию недоФано или лежат в общем положении.

Наиболее интересной и важной из указанных выше задач является задача 3.