Замощения: подстановки и декорации.

Алексей Белов-Канель, Пьер Гийон, Илья Иванов-Погодаев, Иван Митрофанов

Этот проект посвящен замощениям на плоскости. Обычно, когда плитками нескольких типов удается замостить плоскость, речь идет о замощении, структура которого периодически повторяется. Более строго: замощение называется *периодическим* если оно переходит в себя при сдвиге на ненулевой вектор. Китайский математик Хао Ванг в 1961 году поставил следующую задачу:

Рассмотрим единичные квадраты, стороны которых раскрашены в конечное множество цветов, каждая в один цвет. Пусть выбрано несколько типов таких квадратов. Разрешается прикладывать квадраты друг к другу сторонами, покрашенными в один цвет. Допустим, можно использовать неограниченное количество квадратов выбранных типов. Верно ли, что если можно замостить плоскость, то это можно сделать периодическим способом?

Изначально Ванг предполагал, что ответ положительный, то есть, если какое-нибудь замощение существует, то есть и периодическое. Но в 1966 году Роберт Бергер (ученик Ванга) построил набор, состоящий из 20426 квадратов, которым можно замостить плоскость только непериодически. Позднее Бергер сократил число плиток до 104, а в 1971 году Рафаэль Робинсон значительно упростил конструкцию, представив набор из 6 многоугольников, которыми можно замостить плоскость только непериодически.

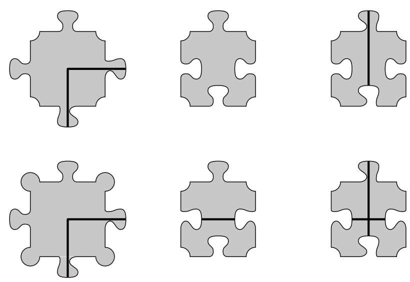


Рис. 1. Набор плиток Робинсона.

Эта задача имеет философскую подоплеку. Речь идет о том, можно ли добиться некоторого глобального свойства (непериодичности) обладая локальными средствами (цветовыми правилами примыкания). Вообще подобные постановки возникают часто: например, как организовать работу вычислительной сети, чтобы локальный сбой не нарушал глобальной работы. Или как локальное взаимодействие молекул приводит к формированию кристаллов.

В рамках этого проекта мы будем постепенно осваивать методы, чтобы решать такие задачи, в разных постановках. Основной задачей первой части проекта будет построение набора многоугольников, которыми можно замостить плоскость только непериодическим способом (B10). По сути, эта задача сводится к построению системы локальных правил (граничных условий, определяющих, когда можно ставить квадратные плитки рядом, а когда нельзя). Построение такого набора использует несколько приемов, которым посвящены предварительные задачи.

A. Одномерный случай

Рассмотрим бесконечную в обе стороны ленту, состоящую из клеток – одинаковых квадратов. Будем расставлять буквы из конечного алфавита, по одной в каждую клетку. Клетку с буквой внутри будем называть *плиткой*.

Замощением будем называть расстановку букв алфавита во всех клетки ленты. *Периодическими* будем называть такие замощения, которые переходят в себя при сдвиге на целое ненулевое расстояние p. При этом, как легко видеть, его можно описать как периодическое повторение какой-то комбинации из p плиток. Комбинация из p плиток – это период замощения, а число p – это длина периода.

Запретом или *запрещенным словом* или *локальным правилом* будем называть комбинацию из нескольких соседних плиток. Мы будем интересоваться замощениями, внутри которых не встречается ни один из запретов. В записи удобно плитки записывать буквами конечного алфавита, а запреты – словами. Замощения, в которых не встречается ни один из запретов, называются *разрешенными.* В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что локальных правил конечное число.

Замощения, переходящие друг в друга при сдвиге, будем считать *эквивалентными* или одинаковыми. В дальнейшем мы не будем различать такие замощения.

A1 Рассмотрим алфавит $\{0, 1\}$, причем слово 01 запрещено. сколько существует неэквивалентных разрешённых замощений?

A2 Покажите, что даже для двух букв существует замощение, не являющееся периодическим.

A3 Придумайте конечную систему запретов в алфавите $\{a, b, c\}$, чтобы разрешенным было только периодическое замощение с периодом abc.

A4 Существует ли система запретов в алфавите $\{0, 1\}$ такая, что разрешенных неэквивалентных замощений ровно сто?

A5 Пусть A некоторое конечное слово. Докажите, что существует конечная система запретов, такая что единственным разрешенным замощением будет периодическое с периодом A.

A6 Пусть A некоторое непериодическое замощение. Докажите, что не существует конечной системы запретов, для которой единственными разрешенными замощениями будут A и эквивалентные ему.

A7 Пусть имеется n букв. Пусть каждый запрещенное слово имеет длину 2, и всего их k, причем разрешенных замощений не существует. Для какого минимального k это возможно?

B. Плоский случай: локальные правила и подстановки

Выводы из одномерного случая. Запрет в одномерном случае играет роль локального условия. Комбинируя локальные условия мы хотим добиться глобального свойства. Но в одномерном случае конечное число запретов не дает возможности получить только непериодические замощения.

Перейдем к двумерному случаю. Сначала еще раз зафиксируем основные понятия и определения.

Рассмотрим клеточную плоскость и будем записывать в каждую клетку одну из букв конечного алфавита L, будем называть его *алфавитом плиток*. Пусть в каждой клетке записана одна из букв алфавита. Тогда задана расстановка букв в клетках. Такую расстановку будем называть *замощением*.

По аналогии с одномерным случаем, замощение называется периодическим, если оно переходит в себя при сдвиге на ненулевой целочисленный вектор (a, b).

Эквивалентность замощений. Определение. Рассмотрим два замощения бесконечной плоскости S_1 и S_2. Допустим, одно из них можно сдвинуть на целочисленный вектор и получить другое. В этом случае будем считать, что S_1 и S_2 *эквивалентны. Замечание.* Все замощения конечной фигуры считаются неэквивалентными.

Локальные правила. Определение. Пусть n – натуральное число, не меньшее 2. Рассмотрим множество всех квадратов $n \times n$, состоящих из наших букв-плиток. Иначе говоря, это множество – L^{n^2} (множество конечных наборов из n^2 букв в алфавите L). Рассмотрим в этом множестве некоторое **конечное** подмножество M. То есть, M – это несколько квадратов $n \times n$, составленных из букв алфавита L. Эти квадраты будем называть *запрещенными* или *локальными правилами*, число n – размер локального правила. Замощение называется *разрешенным*, если в нем не встречается запрещенных квадратов.

Задавая различные локальные правила, мы можем в какой-то степени управлять разрешёнными замощениями. Рассмотрим несколько примеров.

B1 Пусть алфавит плиток состоит из двух букв. Постройте локальные правила, чтобы разрешенным замощением была только шахматная раскраска.

B2 Пусть в алфавите две буквы 0 и 1, восемь квадратов 2×2 запрещены (см. рисунок ниже). Сколько существует разрешенных замощений прямоугольника $m \times n$?

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 0&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&0\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&0\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 1&0\\\hline\end{array}$$

B3 Пусть в алфавите $\{0, 1\}$ запрещены те же квадраты 2×2, что и в предыдущей задаче, а кроме того запрещён один квадрат с единицами на главной диагонали. Опишите все неэквивалентные разрешенные замощения плоскости.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 0&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&0\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&0\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 1&0\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array}$$

B4 Пусть в алфавите четыре буквы, и разрешенными квадратами 2×2 являются квадраты с четырьмя разными буквами. Остальные квадраты запрещенные. Сколько существует разрешенных замощений прямоугольника $m \times n$?

B5 Пусть алфавит плиток состоит из двух букв. Пусть задано k запрещенных блоков 2×2 так, что нет ни одного разрешенного замощения. Какое минимальное k может быть?

B6 Пусть в плиточном алфавите $\{0, 1\}$ задано некоторое множество локальных правил, причем картинка на рисунке является разрешенной (остальные клетки, кроме девяти, заполнены нулями.) Докажите, что существует еще бесконечное множество неэквивалентных между собой разрешенных замощений.

0	1	0
1	0	1
1	1	1

Эта задача показывает, что не всегда [1] получается с помощью локальных правил задать одно конкретное замощение. Но если нельзя задать одно, может быть можно задать некоторое множество в чем то похожих друг на друга замощений? Будем говорить, что множество замощений *задается некоторыми локальными правилами*, если разрешенными замощениями при таких правилах будут только замощения из этого множества.

B7 *Рамкой* назовём фигуру, состоящую для некоторых $m, n > 1$ из $2(m+n)-4$ граничных клеток прямоугольника $m \times n$. Назовём раскраску *красивой*, если единицы стоят на объединении какого-то (конечного или бесконечного) множества рамок, а в остальных клетках стоят нули. Пусть задано конечное множество локальных правил, и все красивые раскраски клетчатой плоскости являются разрешёнными. Докажите, что есть бесконечно много неэквивалентных разрешённых раскрасок, не являющихся красивыми.

B8 Пусть заданы некоторые локальные правила и, в соответствии с этими правилами, для любого положительного r плитками можно замостить область, включающую круг радиуса r. Докажите, что тогда можно замостить и всю плоскость.

С помощью локальных правил можно получать довольно сложные замощения. Например, с помощью них можно добиться того, чтобы все разрешенные замощения были непериодичны. Сразу это задачу будет решить сложно, мы рекомендуем вернуться к ней в цикле C, после освоения дополнительных методов.

B9* Придумайте локальные правила такие, чтобы все разрешенные замощения были непериодичны.

B10* Постройте конечный набор многоугольников, которыми можно замостить плоскость только непериодически. Многоугольники друг к другу можно прикладывать как угодно, можно поворачивать и переворачивать, но они не должны перекрываться.

Определение. Пусть каждому символу алфавита сопоставлен квадрат $k \times k$ из символов того же алфавита. Такое соответствие будем называть *подстановкой.*

Если есть подстановка σ и замощение A какой-то области (конечной или бесконечной), то можно получить новое замощение $\sigma(A)$. Для этого каждую плитку мы заменяем на соответствующий квадрат $k \times k$. Если начать с одной плитки и применять подстановку несколько раз, мы получим большой квадрат.

Определение. Пусть задана некоторая $k \times k$ подстановка σ. Пусть также замощение плоскости можно разбить вертикальными и горизонтальными прямыми на квадраты $k \times k$ так, что каждый квадрат $k \times k$ лежит в образе σ (то есть каждый квадрат является $\sigma(A)$ для некоторой буквы A). Запишем вместо каждого квадрата $\sigma(A)$ букву A. Полученное замощение будем обозначать как $\sigma^{-1}(S)$. Если $\sigma^{-1}(S)$ определено однозначно, будем говорить, что в замощении S возможен переход к прообразу $\sigma^{-1}(S)$. Замощение будем называть *бесконечно декодируемым* относительно подстановки σ, если переход к прообразу можно провести любое число раз.

$$\boxed{1} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 1&0&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array} \qquad \boxed{0} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array}$$

B11 Рассмотрим подстановку как на рисунке. Бесконечно декодируемое замощение для неё называется *ковром Серпинского.*

a) Докажите, что есть бесконечно много попарно неэквивалентных ковров Серпинского.

b) Докажите, что все ковры Серпинского кроме одного являются непериодичными замощениями.

c) Задаётся ли множество ковров Серпинского локальными правилами?

Если мы хотим задать с помощью локальных правил бесконечно декодируемые замощения, логично потребовать, чтобы подстановка переводила разрешённые замощения в разрешённые.

Определение. Будем говорить, что подстановка *согласована с локальными правилами* размера k, если

1) для любой буквы A, квадрат $\sigma(A)$ является разрешенным;

2) если X – разрешенный квадрат 2×2, то квадрат $\sigma(X)$ содержит только разрешенные квадраты $k \times k$.

B12 Пусть заданы локальные правила R, причем $k = 2$, то есть все запрещенные квадраты размера 2×2. Пусть некоторый квадрат A размера $N \times N$ является разрешенным, то есть не содержит запрещенных квадратов 2×2. Пусть подстановка σ согласована с R. Докажите, что квадрат $\sigma(A)$ также разрешенный.

---

[1] на самом деле, для непериодических замощений – *никогда*, и позже мы это докажем

B13 Пусть подстановка σ согласована с локальными правилами размера 2. Докажите, что существует разрешенное замощение.

B14 Рассмотрим подстановку σ. Верно ли, что существует замощение S, для которого верно $\sigma(S)$ эквивалентно S? Придумайте достаточные условия на σ, чтобы такое замощение существовало.

C. Примеры непериодичности

Итоги после циклов A и B. Мы хотим найти такое множество замощений, которое с одной стороны задаётся локальными правилами, а с другой стороны – содержит только непериодичные замощения. В одномерном случае такого множества не бывает (почему?). Самые простые известные нам двумерные примеры – это бесконечно декодируемые относительно подстановки замощения.

Подходит не любая подстановка.

C1 a) Приведите пример такой подстановки, что все бесконечно декодируемые замощения непериодичны, но множество бесконечно декодируемых замощений не задаётся локальными правилами.

b) Приведите пример такой подстановки, что все бесконечно декодируемые замощения периодичны.

Искать подходящие подстановки проще не «с нуля», а в некотором смысле улучшая не подходящие.

Переход к другому алфавиту. Декорации. Пусть задан алфавит плиток $a, b, c \dots$. Мы можем ввести конечное число дубликатов (оттенков) для каждой буквы и рассмотреть расширенный алфавит плиток $a_1, \dots a_k, b_1, \dots b_k, c_1, \dots c_k, \dots$. Будем теперь вводить локальные правила для расширенного алфавита. После этого можно рассмотреть разрешенные замощения и игнорировать введенные оттенки. Такой прием называется *введение декораций*.

Определение. Пусть задана подстановка σ_1 в алфавите A_2 и σ_2 в алфавите A_2. Подстановку σ_2 будем считать *декорацией для* σ_1, если выполнены следующие условия:

1) существует функция f, определенная на A_2, со значениями в A_1;

2) если $\sigma_2(a) = M$ – квадрат, составленный из букв алфавита A_2, то $\sigma_1(f(a)) = f(M)$.

Функцию f можно понимать как забывание оттенка у цвета, а $f(M)$ – это квадрат того же размера, что и M, но из основных цветов без оттенков.

Основной нашей задачей будет доказательство того, что заданную подстановку можно декорировать так, чтобы множество бесконечно декодируемых замощений задавалось локальными правилами.

Для начала мы разберем некоторые полезные частные случаи. Пусть задана подстановка σ. Если A – буква алфавита, то $\sigma(A)$ - квадрат 2×2 из четырех букв алфавита (куда отображается A). Будем считать, что разные символы отображаются в разные квадраты 2×2.

Разделение образов. Определение. Определим отображение σ_{UL}, сопоставляющее символу A левый верхний угол квадрата $\sigma(A)$. Аналогично определим отображения σ_{DL}, σ_{UR}, σ_{DR}. Будем считать, что подстановка обладает свойством разделения образов, если каждый символ алфавита присутствует в образе ровно одного из этих четырех отображений.

C2 Приведите пример подстановки с разделением образов.

Свойство разделения образов помогает нам при конструировании локальных правил. Сначала постараемся добиться цели для частного случая – какой нибудь подстановки. После этого, попробуем разобраться с подстановками с разделением образов. И уже потом перейдем к общему случаю.

Идея построения. Для начала попробуйте раскрашивать ребра квадратов в различные цвета и формулировать локальные правила в терминах сочетаний этих цветов. Основная цель – добиться того, чтобы любое разрешенное замощение позволяло себя декодировать, то есть переходить к предыдущему уровню иерархии. Такой переход к предыдущему уровню и осуществляет подстановка.

C3 Придумайте какую нибудь подстановку σ и локальные правила, такие, что любое разрешенное замощение S допускает переход к прообразу $\sigma^{-1}(S)$ и замощение $\sigma^{-1}(S)$ также является разрешенным. Докажите, что всякое разрешенное замощение является непериодичным.

C4 Пусть задана 2×2 подстановка σ с разделением образов. Пусть также заданы локальные правила, что любое разрешенное замощение S допускает переход к прообразу $\sigma^{-1}(S)$ и замощение $\sigma^{-1}(S)$ также является разрешенным. Докажите, что всякое разрешенное данными локальными правилами замощение является непериодичным.

C5 Пусть задана 2×2 подстановка σ с разделением образов. Докажите, что для некоторой декорации подстановки множество бесконечно декодируемых замощений определяется локальными правилами.

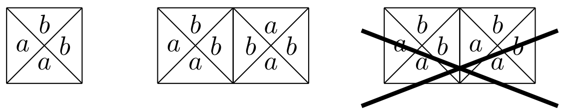
C6 Пусть задана 3×3 подстановка σ с разделением образов. Докажите, что для некоторой декорации подстановки множество бесконечно декодируемых замощений определяется локальными правилами.

C7 Пусть задана 2×2 подстановка σ, не обязательно с разделением образов. Докажите, что для некоторой декорации подстановки множество бесконечно декодируемых замощений определяется локальными правилами.

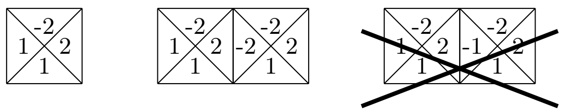
D. Различные формализмы и перевод непериодичности на другие языки.

Задачи о замощения можно формулировать на разных языках (формализмах). Иногда бывает полезно, получив продвижение в какой-то одной постановке, перевести ее на другую.

Формализм Ванга. Каждая плитка – единичный квадрат. Каждая сторона квадрата раскрашена в один из конечного множества цветов. Квадраты можно прикладывать друг к другу, совмещая стороны одного цвета.



Формализм дополняющих цветов. Каждая плитка – единичный квадрат. На сторонах каждого квадрата написаны ненулевые целые числа из конечного набора, которые можно назвать цветами. Квадраты можно прикладывать друг к другу, совмещая стороны, на которых написаны противоположные числа.



Иногда считают, что вместе с плиткой в наборе есть и повернутая на 90 градусов плитка. В этом случае говорят, что плитки можно поворачивать.

Рассмотрим плитку A с цветами (a_1, a_2, a_3, a_4) по часовой стрелке. Перевернутой плиткой будем называть плитку с цветами $(-a_3, -a_2, -a_1, -a_4)$ *против часовой стрелки*. Если для каждой плитки в наборе есть и ее перевернутая плитка то говорят, что плитки можно переворачивать.

Определение. Будем называть набор *апериодическим* (в каком-либо формализме), если с его помощью можно замостить плоскость только непериодически.

D1 Докажите, что формализмы Ванга и дополняющих цветов эквивалентны, то есть если есть непериодический набор в одном формализме, то есть соответствующий ему непериодический набор в другом.

D2 Назовем многоугольник *квадратно-составленным*, если он представляет собой фигуру полимино, составленную из единичных квадратов (связную и без дыр внутри). Постройте апериодический набор из квадратно-составленных многоугольников, которые можно поворачивать и переворачивать.

D3 Рассмотрим формализм дополняющих цветов, причем плитки можно поворачивать и переворачивать.

a) Может ли набор быть апериодичным?

b) Пусть теперь по-прежнему плитки разрешается прикладывать по правилам дополняющих цветов, но перевернутые плитки не могут иметь общую сторону. Докажите, что существует апериодический набор.