Замощения: подстановки и декорации. Решения.

A. Одномерный случай

A1 *Ответ: 3.* Понятно, что замощерия из всех одинаковых букв (единиц или нулей) подходят. Если в замощении есть и 1, и 0, то должны быть соседние 1 и 0, причём 1 стоит слева. Далее понятно, что левее единицы могут стоять только единицы, а правее нуля – только нули.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

A2 Примеров очень много. Например, если в одной клетке стоит 0, а в остальных – единицы, то при любом сдвиге этот ноль перейдёт в единицу.

1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

A3 Предлагаем убедиться, что если запретить слова aa, ac, ba, bb, cb и cc, то у любой буквы однозначно определяются оба соседа и получается именно то, что нам нужно.

A4 *Ответ: да.* Например, можно ввести такие запреты, чтобы разрешёнными были периодические замощения с периодами $01, 001, \ldots, 0^{100}1$. Запретим слова $11, 0^{101}$, а также $100 \cdot 99$ слов вида 10^a10^b1 при всевозможных неравных a и b от 1 до 100.
Первые два запрета вынуждают, чтобы между двумя соседними единицами было от 1 до 100 нулей. Остальные запреты гарантируют, что слева и справа от любой единицы подряд идущих нулей поровну.

A5 Напомним, что циклическим сдвигом слова $a_1a_2\ldots a_n$ называется любое из слов $a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_na_1a_2\ldots a_i$ при $0 \leqslant i < n$ (то есть то, что получится, если отрезать начало длины i и переставить в конец).
Пусть длина слова A равняется n, а в алфавите k букв. Всего есть k^n слов длины n, запретим из них все, не являющиеся циклическими сдвигами A.
Во всех циклических сдвигах A поровну букв каждого вида, поэтому в любом разрешённом замощении плитки на расстоянии n обязаны совпадать, то есть разрешённое замощение периодично с длиной периода n. Если периодом является какой-то циклический сдвиг A, а значит, и A тоже является периодом.

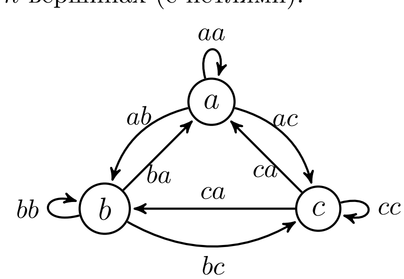
A6 Покажем, что для любой конечной системы запретов, для которой есть хотя бы одно разрешённое замощение полосы, найдётся и периодическое замощение. Пусть N – длина наибольшего из запретов. Возьмём какое-нибудь разрешённое замощение и найдём в нём два непересекающихся блока длины N, обозначим их U, а часть между ними обозначим W.

$\cdots$	U	W	U	$\cdots$

Тогда замощение с периодом UW разрешено. В самом деле, все прямоугольники длины не больше N встречаются и в исходном замощении (а значит, не содержат запрещённых), а запретов длинее N у нас нет.

$\cdots$	W	U	W	U	W	$\cdots$

A7 *Ответ:* $n(n+1)/2$.
Пример: Пусть алфавит состоит из чисел от 1 до n и запрещены слова ab при $a \geqslant b$. Тогда не получится замостить кусок длинее n, ибо при движении слева направо каждая слебующая буква должна быть больше предыдущей.
Оценка: Запреты длины 2 – это ограничения на то, какие плитки-буквы могут быть соседними. Нарисуем полный ориентированный граф на n вершинах (с петлями):



Каждый запрет длины 2 убирает в этом графе одно ребро. Легко понять, что если остался хотя бы один цикл, то бесконечный путь по этому циклу – это разрешённое периодичное замощение.

Теперь покажем индукцией по n, что если в ориентированном графе нет ориентированных циклов, то рёбер не более $n(n-1)/2$. Переход от n к $n+1$: если из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро, то цикл есть. Если из какой-то вершины рёбер нет, то с ней связано не более n рёбер, а в подграфе на оставшихся вершинах не более $n(n-1)/2$ рёбер, что и даёт переход. А база $n=1$ очевидна.

B. Плоский случай: локальные правила и подстановки

B1 Достаточно запретить все квадраты 2×2 кроме двух шахматно раскрашенных. Тогда в разрешённом замощении белые будут граничить только с чёрными, а чёрные – только с белыми.

B2 *Ответ:* 2^{m+n-1}. Можно заметить, что разрешённые квадраты 2×2 – это те, в которых чётное число единиц. Значит, каждая клетка единственным образом определяется по трём соседним (слева, сверху, слева-сверху). Поэтому для любого заполнения левого столбца и верхней строки прямоугольника оставшиеся клетки можно заполнить однозначно.

a_2	a_3
a_1	?

B3 *Ответ: замощения горизонталями, замощения вертикалями и одно замощение квадрантами.*

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	**0**	**1**	1	1	1
1	1	1	**1**	**0**	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Разберём два случая: встречается ли в замощении квадрат с единицами на побочной диагонали (выделен жирным) или нет.

Встречается. Сначала однозначно заполняется «крест» ширины 2 с центром в этом квадрате, потом одна за одной заполняются оставшиеся клетки и получим замощение квадрантами.

Не встречается. Любой квадрат 2×2 либо одноцветный, либо граница между нулями и единицами делит квадрат на две доминошки. Если замощение не одноцветное, то в нём есть соседние по стороне 0 и 1. Далее однозначно заполняется содержащая их полоса ширины 2: это либо либо две горизонтали, либо две вертикали. В первом случае получается, что все горизонтали одноцветные; во втором – что все вертикали одноцветные.

B4 *Ответ:* $6(2^n+2^m-4)$.

В двух доминошках, расположенных через одну, буквы могут располагаться

так:

a		a
b		b

или так:

a		b
b		a

Назовём линию (горизонталь или вертикаль) *полосатой*, если в ней два типа букв и буквы чередуются. Легко видеть, что если какая-то линия полосатая, то все параллельные ей тоже полосатые.

c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

Покажем, что найдётся хотя бы одна полосатая линия. Пусть верхняя горизонталь таблицы не полосатая, тогда в ней есть различные буквы (пусть a и b) на расстоянии 2.

			a		b		
			b		a		
			a		b		
			b		a		

Тогда нетрудно понять, что эти клетки находятся в полосатых вертикалях.

Разрешённых замощений, в которых все горизонтали полосатые, $6 \cdot 2^n$ (одна горизонталь красится в шахматном порядке 12ю способами, а остальные 2мя). Замощений, в которых все горизонтали полосатые, $6 \cdot 2^m$. Дважды подсчитано 24 замощения, они определяются перестановкой цветов в левом верхнем квадрате 2×2.

B5 *Ответ: 7.*

Всего есть 16 квадратов 2×2. Они разбиваются на 7 групп, и для того чтобы запретить 7 периодичных замощений, нужно запретить хотя бы по одному квадрату из каждой группы.

1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

1	1
1	1

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

0	0
0	0

1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0

1	1
0	0

0	0
1	1

1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0

1	0
1	0

0	1
0	1

1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0

1	0
1	1

0	1
1	1

1	1
0	1

1	1
1	0

0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0

1	0
0	1

0	1
1	0

0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0

1	0
0	0

0	0
1	0

0	0
0	1

0	1
0	0

Приведём пример из семи запрещённых квадратов:

1	1
1	1

0	0
0	0

1	0
1	0

1	1
0	0

1	0
0	1

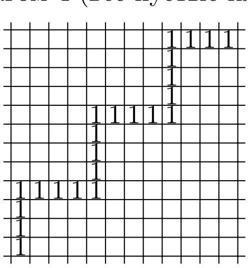
1	0
0	0

1	1
0	1

Из последних четырёх запретов следует, что под единицей не может стоять ноль. Вместе с первым запретом это даёт, что единицы не могут находиться в соседних столбцах, а вместе со вторым – что нули не могут находиться в соседних столбцах. Тогда единственное возможное замощение – это периодичное замощение чередующимися столбцами, но третье локальное правило запрещает и его.

B6 Пусть $N \times N$ – наибольший размер локального правила. Нетрудно понять, что если мы заполним всю плоскость нулями, а потом нарисуем несколько картинок, чтобы расстояние между любыми двумя было больше N, то получится разрешённое замощение.

B7 Назовём *лесенкой* бесконечную ступенчатую фигуру из единичек, мы нарисовали фрагмент лесенки с шагом 4 (все пустые клетки заполнены нулями).



Если N – размер наибольшего локального правила, то все лесенки с шагом большим чем N являются разрешёнными, потому что все квадраты размера $N \times N$ выглядят как части какой-то большой рамки.

Так как лесенка не содержит ни одной рамки, она не является красивым замощением.

B8 На первый взгляд кажется, что доказывать здесь нечего, так как плоскость – это, в некотором роде, круг бесконечного радиуса. Но на самом деле из того, что мы умеем покрывать плитками *сколь угодно большой* круг не следует автоматически, что мы сможем покрыть *бесконечно большой* круг.

Лирическое отступление. Кащей Бессмертный гулял по лесу и нашёл волшебный обменник валюты. В нём можно за один раз обменять один самоцвет на любое натуральное число золотых монет, или одну золотую монету на любое число серебряных, или одну серебряную на любое число медных. Изначально у Кащея сто самоцветов. Для поддержания бессмертия Кащею в день требуется одна медная монетка. Сможет ли он жить за счёт обменов сколь угодно долго? А бесконечно долго?

Вернёмся к задаче. Будем считать, что в соответствии с локальными правилами замощаются круги с центром в начале координат. Если к набору плиток A можно добавить ещё несколько плиток и получить замощение B, то будем говорить, что замощение A *продолжается до замощения* B или является его *подзамощением.*

Если бы мы нашли бесконечную последовательность замощений A_1, A_2, A_3 такую, что каждое предыдущее замощение продолжается до следующего, а для любого k замощение A_k покрывает круг радиуса k, то задача была бы решена – мы взяли бы объединение плиток во всех этих замощениях.

Назовём замощение конечной области *хорошим*, если для любого R его можно продолжить до замощения, покрывающего круг радиуса R. Достаточно показать, что хорошее замощение можно для любого R продолжить до *хорошего* замощения, покрывающего круг радиуса R.

Пусть есть хорошее замощение. Рассмотрим все возможные способы продолжить его до такого замощения, что его плитки покрывают круг радиуса R и пересекаются с этим кругом. Этих способов конечное число. Если ни одно из этих продолжений не является хорошим замощением, то для каждого из них есть такой радиус, до которого нельзя продолжить. Берём максимум из этих радиусов и получаем, что исходное замощение также не хорошее.

B9 Следует из задач следующих циклов.

B10 Следует из задач следующих циклов.

B11 Прежде всего, пара слов о бесконечно декодируемых замощениях. Если операцию подстановки σ применить к фигуре A, получится к $\sigma(A)$. Если применить σ к $\sigma(A)$, получится $\sigma(\sigma(A))$, мы это обозначаем $\sigma^2(A)$.

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**	0	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	0	0	0	**1**	**1**	**1**
1	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**
1	**1**	**1**	0	0	0	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**	0	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

а) Дадим решение, использующее некоторые факты теории множеств, а именно то, что континуум больше счётного множества. Обозначим подстановку буквой s. Заметим, что $s^k(1)$ это квадрат размера $3^k \times 3^k$, составленный из восьми квадратов $s^{k-1}(1)$ и одного квадрата $s^{k-1}(0)$, все квадраты вида $s^k(0)$ заполнены нулями.

Если на клетчатой плоскости выложено замощение $3^k \times 3^k$ вида $s^k(1)$, то его можно продолжить до замощения $s^{k+1}(1)$ восемью способами, каждый способ соответствует одной из восьми крайних клеток квадрата 3×3 и при этом получаются различные сдвиги квадрата $3^{k+1} \times 3^{k+1}$. Обратите внимание, что мы рассматриваем не абстрактные квадраты, а квадраты, расположенные в плоскости.

Начнём с квадрата A_1 размера 1×1, в котором стоит единица, и будем каждый ход делать одно из таких продолжений, увеличивая заполненную область. Мы получим последовательность замощений $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Такие последовательности кодируются рядом из цифр от 1 до 8, их континуум. Объединение квадратов A_i может быть или четвертью плоскости, или полуплоскостью, или всей плоскостью. Если мы получили не всю плоскость, значит, начиная с какого-то момента расширяли квадраты только в одну сторону.

Нетрудно понять, что тех последовательностей $\{A_i\}$, объединение которых замощает всю плоскость, также континуум. Получающиеся замощения плоскости будум называть *предельными.*

Покажем, что разные последовательности $\{A_i\}$ дают разные предельные замощения (обратите внимание, мы не утверждаем, что они не эквивалентны, то есть что не получаются друг из друга сдвигом).

Рассмотрим в предельном замощении квадраты $(3^k+2)\times(3^k+2)$, по краям которых стоят единицы, а внутри нули. Понятно, что центры всех таких квадратов сдвинуты относительно центра квадрата A_k на вектор, обе координаты которого кратны 3^k. Поэтому по предельному замощению можно определить координаты центра A^k по модулю 3^k. Но несложно убедиться, что координаты центра A_k отличаются от координат центра A_1 меньше, чем $3^k/2$, поэтому одинаковые предельные замощения могут давать только совпадающие последовательности квадратов.

Легко видеть, что каждое предельное замощение однозначно декодируемо, поэтому есть хотя бы континуум различных ковров Серпинского. А так как эквивалентными друг другу могут быть лишь счётное число ковров, то классов эквивалентности бесконечно.

b) Периодичный ковёр Серпинского – это тот, который состоит из одних нулей. Покажем, что все остальные ковры Серпинского непериодичны. Заметим, что если в ковре Серпинского есть хотя бы одна единица, то он для любого натурального k содержит квадрат $s^k(1)$, в центре которого есть квадрат $3^{k-1}\times 3^{k-1}$ из нулей, обрамлённый каёмкой толщины 1 из единиц. При сдвиге на любой ненулевой вектор, обе координаты которого меньше 3^{k-1}, эта каёмка будет пересекаться с квадратом из нулей, значит, хотя бы одна из координат вектора периодичности больше чем 3^{k-1}, и так для любого k. А значит, векторов периодичности нет.

c) *Ответ: нет.*

Пусть есть локальные правила размера n, выберем k таким, что $3^k>n$. Рассмотрим замощение A, состоящее из одних единиц. Оно не декодируемое, поэтому и замощение $s^k(A)$ не является бесконечно декодируемым. Покажем, что $s^k(A)$ допустимое.

$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$

Фрагмент замощения $s^k(A)$

$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(0)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(0)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(0)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(0)$	$s^k(1)$
$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$	$s^k(1)$

$s^{k+1}(1)$

Видно, что любой квадрат со стороной не более чем n, встречающийся в $s^k(A)$, встречается в каком-то блоке, составленном из четырёх квадратов $s^k(1)$. Но этот блок содержится внутри $s^{k+1}(1)$, а значит содержится внутри ковров Серпинского и не содержит запрещённых квадратов.

B12 Пусть размер подстановки σ равен n. Замощение $\sigma(A)$ состоит из квадратов $n\times n$ – образов от плиткобукв. Любой квадрат 2×2 находится в квадрате $2n\times 2n$ – объединении четырёх таких квадратов, то есть $\sigma\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{smallmatrix}\right)$. Так как квадрат $\begin{smallmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{smallmatrix}$ разрешённый и σ согласована с локальными правилами, то $\sigma\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{smallmatrix}\right)$ не содержит запрещённых квадратов.

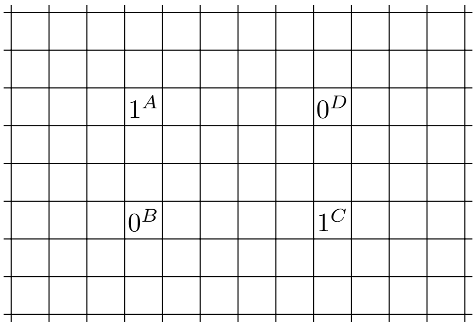
B13 Рассмотрим какую-нибудь плитко-букву a и последовательность квадратов

$$A_0 = a, A_1 = \sigma(a), A_2 = \sigma^2(a) \ldots$$

В этой последовательность A_i имеет размер $n^i \times n_i$, а из предыдущей задачи следует, что все A_i – разрешённые. Из задачи **B8** следует, что есть разрешённое замощение всей плоскости.

B14 *Ответ: нет.* Покажем, что в алфавите $\{0, 1\}$ у подстановки $\sigma(0) = \begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}$, $\sigma(1) = \begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}$ любо замощение переходит в неэквивалентное ему. Предположим противное: A – замощение, и $\sigma(A)$ эквивалентно A. Назовём *отрезком* длины k прямоугольник $1 \times (k + 2)$ или $(k + 2) \times 1$, у которого две крайние клетки одного цвета, а остальные k клеток – другого. Легко понять, что если в A есть отрезки и минимальная длина отрезка равна k_0, то в $\sigma(A)$ минимальная длина отрезка – $2k_0$. Значит, в A отрезков нет вообще. Поэтому каждая линия (горизонталь или вертикаль) либо одноцветная, либо одна её половина заполнена единицами, а другая – нулями.

Замощение A не одноцветное, значит в нём есть соседние 1 и 0. Не умаляя общности, 1 слева от 0. Тогда в $\sigma(A)$ есть 0, стоящий левее единицы. А так как в A нет отрезков, то найдутся вершины прямоугольника, раскрашенные в шахматном порядке, например, так:



Далее получаем, что все клетки в том же ряду, что и 1^A и левее, заполнены единицами, а все клетки в том же ряду, что 0^B и левее, заполнены нулями. Тогда прямой угол с вершиной в клетке 1^A, смотрящий вверх и налево, заполнен единицами. Но в таком случае в $\sigma(A)$ так же ориентированный угол заполнен нулями, чего не может быть.

Критерий на существование замощения. (набросок) У подстановки σ есть неподвижная точка тогда и только тогда, когда одна буква находится строго внутри своего образа ИЛИ две буквы находятся внутри своих образов на противоположных сторонах квадратов на одинаковом расстоянии от края ИЛИ четыре буквы появляются в углах своих образов во всех возможных позициях.

Пусть σ размера $k \times k$. Прежде всего заметим, что требование $S = \sigma(S)$ использовало бы задание системы координат, если же мы просто говорим, что S эквивалентно $\sigma(S)$, то этого не нужно. Квадратик 1×1 переходит в квадрат $k \times k$ композицией гомотетии и сдвига. Это снова гомотетия, её неподвижная точка где-то находится. Она может быть в центре клетки, на границе двух клеток или в узле сетки, эти три случая соответствуют трём описанным ситуациям.

С другой стороны, пусть $\sigma(a)$ содержит a строго внутри себя, например в позиции i, j. Тогда $\sigma^t(a)$ можно рассматривать как квадратный паттерн размера $k^t \times k^t$, и мы можем указать их как $-k^t i/(k - 1) \cdots k^t(k - 1 - i)/(k - 1)$ (аналогично по ординате) так, что a это клетка с координатами $0, 0$. Квадрат растёт во все стороны, и в итоге любая клетка (x, y) покрыта каким-то квадратом. Каждый следующий квадрат содержит предыдущий, квадрат $\sigma^t(a)$ встречаестя в середине $\sigma^{t'}(a)$ при $t' \geq t$. поэтому можно определить замощение S в клетке (x, y) как букву $\sigma^t(a)(x, y)$ дял достаточно больших t. По построению $\sigma(S)$ будет сдвигом S.

Другие случаи (две буквы на сторонах и 4 буквы в углу) разбираются аналогично.

C. Примеры непериодичности

C1 а) Например, такая подстановка σ:

$$\boxed{1} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1\\ \hline 1 & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & 1\\ \hline\end{array} \qquad \boxed{0} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array}$$

То, что множество бесконечно декодируемых замощений не задаётся локальными правилами, доказывается так же, как и для ковров Серпинского.

Вот такую фигуру (а также если поменять местами 0 и 1) будем называть *двойной рамкой*.

	1	1	1	1	1	1	1	
	1	0	0	0	0	0	1	
	1	0				0	1	
	1	0				0	1	
	1	0				0	1	
	1	0	0	0	0	0	1	
	1	1	1	1	1	1	1	

Будем говорить, что размер двойной рамки на рисунке равен 5. Если в замощении встречается двойная рамка размера N, то у замощения не может быть вектора периодичности с абсолютными значениями координат меньшими N. Индукцией по k показывается, что $\sigma^k(0)$ и $\sigma^k(1)$ содержат двойные рамки размера 3^{k-1}.

b) Пусть, например, в алфавите всего одна буква.

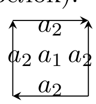
C2 Пусть в плиточном алфавите 8 букв a_i, b_i, c_i, d_i, где индекс i принимает значения 1 и 2. Образы всех букв будут $\begin{smallmatrix} a_i & b_j \\ c_k & d_l \end{smallmatrix}$. Есть 16 способов выбрать индексы, можно взять разные способы для всех восьми букв.

C3 Следует из следующих задач.

C4 Докажем непериодичность бесконечно декодируемого замощения A. Прежде всего заметим, что из свойства разделения образов следует, что обе координаты вектора периодичности v должны делиться на 2, а потом заметим, что вектор $v/2$ является вектором периодичности для замощения $\sigma^{-1}(A)$. Ненулевой целочисленный вектор можно делить пополам конечное число раз, после чего придём к противоречию.

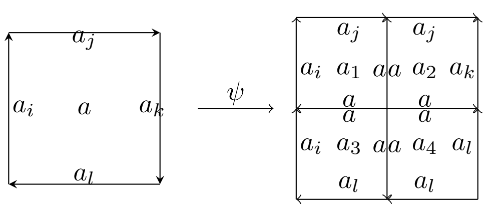
C5 Обозначения: влево – W, вправо – E, вверх – N, вниз – S. Влево-вверх будем обозначать NW, аналогично с другими диагональными направлениями. Считаем, что у подстановки со свойством разделения образов каждая буква a_i плиточного алфавита A относится к одному из типов NW, NE, SW, SE.

Буквы нового алфавита B (декорации) будем рисовать как плитки, в центре которых написаны буквы из A, а на сторонах проведены стрелки и на каждой стороне написано по метке – букве из A. Таким образом, буква из B задаётся упорядоченной пятеркой букв из A и четырьмя битами (направления стрелок).



В дальнейшем будем говорить о типе плитки (NE, NW, SE, SW), типе стороны плитки (N, E, S, W в зависимости от направления стрелки), типе метки на стороне (NE, NW, SE, SW).

Подстановка ψ на алфавите B определяется следующим образом. Если в центре плитки записана буква a и какие-то метки по краям, и $\sigma(a) = \begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}$, то в центре плиток образа записаны соответственные буквы алфавита, крайние рёбра образа 2×2 имеют такие же метки и направления, что и соответствующее ребро прообраза, а центральные четыре ребра исходят из центра квадрата 2×2 и на них метки a, смотри рисунок:



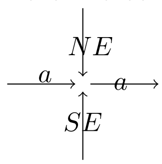
Смысл такой декорации в следующем: бесконечно декодируемое замощение состоит из блоков $2^k \times 2^k$, а каждый блок $2^k \times 2^k$ – из четырёх блоков $2^{k-1} \times 2^{k-1}$, и границы между этими четырьмя блоками образуют крест, на рёбрах которого написана одна и та же буква. Эти кресты разграничивают блоки большого размера друг от друга. В примере с коврами Серпинского такой границы не было, и локальными правилами нельзя было отличить границу большого блока от его средней части.

Локальные правила строились по такому принципу: изучалось, что в бесконечно декодируемом замощении может находиться на стыке двух и четырёх плиток, и эти свойства записывались в правила. Нужно, с одной стороны, записать достаточно правил, чтобы можно было определить декодирование, а с другой стороны – проверить, что после декодирования все записанные правила выполняются. По этой причине мы не используем больших локальных правил, про далёкие плитки: сложно проверять их выполнение после декодирования.

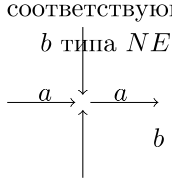
Будем говорить, что направление NE симметрично относительно вертикали направлению NW, а SW симметрично относительно вертикали направлению SE. Симметрия относительно горизонтали определяется аналогично.

Итак, локальные правила:

1) На соседних плитках смежные стороны имеют одинаковые направление и метку (то есть можно говорить о направлении и метке ребра во всём замощении).
2) Граничить по вертикальной стороне могут только плитки типов, симметричных относительно вертикали. Граничить по горизонтальной стороне могут только плитки типов, симметричных относительно горизонтали.
3) Узлы между типов могут иметь только такие степени вхождения: 4 исходят или 3 входит и одно исходит.
4) Если из узла 4 ребра исходят, то на них должны быть одинаковые метки.
5) Если слева-сверху от узла находится плитка типа NW, назовём такой узел *центральным.* Потребуем, чтобы из центрального узла выходило 4 ребра. Если на этих рёбрах метки a, и при этом $\sigma(a) = {}^{a_1\,a_2}_{a_3\,a_4}$, то в центре плитки к северо-западу от узла должна быть буква a_1, аналогично про три другие плитки.
6) В узле типа 3-1 есть исходящее ребро, *центральное входящее* ребро, и два *боковых входящих.* Потребуем, чтобы метки на центральном входящем и на исходящем совпадали, а также чтобы типы меток на боковых входящих были симметричны относительно исходящего ребра. Например так:

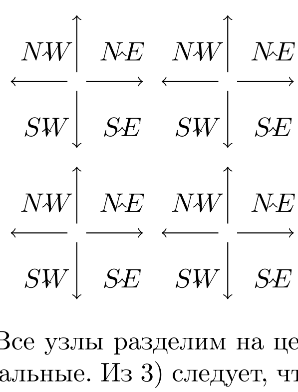


7) Пусть есть узел типа $3-1$, на исходящем ребре v_1 метка a, на боковом входящем ребре v_2 метка b и $\sigma(a) = {}^{a_1\,a_2}_{a_3\,a_4}$.
Если угол между типом b и направлением v_2 равен 135° (например, v_2 идёт вниз, а b типа NE), то угол между v_1 и типом b должен равняться 45°, а сама буква b должна встречаться в $\sigma(a)$ на месте, соответствующем типу b.



$b = a_2$, где a_2 – правая верхняя (NE) буква в $\sigma(a)$

Анализ разрешённых замощений. Теперь нужно понять, какие бывают замощения с данными локальными правилами. Из 1) получаем, что плоскость разбивается на квадраты 2×2, в каждом из которых типы плиток ${}^{NW\;NE}_{SW\;SE}$. Далее будем их называть *базовыми блоками.* Из 5) и 4) следует, что центры базовых блоков – центральные узлы, из них всех выходит по 4 стрелки с одинаковыми буквами.



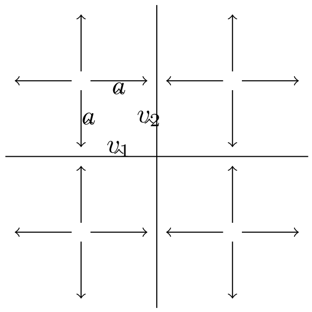
Все узлы разделим на центральные, *боковые* (те, в которые на картинке выше ведут по 2 стрелки) и остальные. Из 3) следует, что середины сторон базовых блоков (боковые узлы) имеют тип $3-1$, а вместе с 6) это даёт, что на каждой стороне базового блока стрелки сонаправлены и на них одинаковые метки.

Вместе со свойством 4) это даёт, что каждый базовый блок является образом какой-то буквы при подстановке ψ, таким образом, однозначно определён переход от разрешённого замощения T к $\psi^{-1}(T)$. Это замощение можно получить из T, стирая линии внутри базовых блоков и записывая внутрь блока ту букву, которая является меткой всех рёбер, выходящих из его центра.

Нужно проверить для $\psi^{-1}(T)$ свойства $1)--7)$. Свойства 1), 3), 4) и 6) выполняются автоматически, так как новых ситуаций в узлах (какие бетки и стрелки написаны на входящих рёбрах) не возникает.

Для свойства 2) надо проверить, что любые два базовых блока, имеющие общую сторону, декодируются в буквы симметричных типов. Но тип после декодирования совпадает с типом метки, написанной на внутреннем кресте базового блока. Локальное правило 5) гарантирует, что метки у двух блоков симметричны, и после декодирования выполняется 2).

А значит, базовые блоки объединяются в четвёрки, которые после декодирования имеют вид $\begin{smallmatrix} NW & NE \\ SW & SE. \end{smallmatrix}$ Рассмотрим одну такую четвёрку.



Метка a имеет тип NW, поэтому, согласно 6), ребро v_1 направлено влево, а v_2 – вверх. Значит, v_1 и v_2 выходят из узла, из которого 4 выходящих ребра. Из 4) следует, что метки на этих рёбрах совпадают. Также из 6) следует, что в верхнем левом углу образа этой метки при σ стоит a. Аналогично и про остальные базовые блоки, а значит, после декодирования выполняется свойство 5). Итак, декодированное замощение является разрешённым, а значит, все разрешённые замощения – бесконечно декодируемые.

Вообще говоря, задачу мы пока решили не до конца. Мы не показали, что *каждое* бесконечно декодируемое при помощи σ замощение допускает разрешённую декорацию. Можно показать, что такая декорация существует для тех замощений, у которых каждая плитка находится строго внутри некоторого блока вида $\sigma^k(a_i)$. Можно описать остальные замощения и слегка подправить нашу конструкцию, оставляем это читателю в качестве упражнения.

C6 Эту задачу мы оставляем в качестве упражнения. Как тебе такое, Питер Шольц?

C7 Воспользуемся задачей $C5$. Пусть наша подстановка σ над алфавитом A. Возьмём подстановку τ 2×2 с разделением образов над алфавитом B (такая существует, см. задачу $C2$). Рассмотрим алфавит C размера $|A| \cdot |B|$, буквы которого – пары букв $(a_i, b_j)|a_i \in A, b_j \in B$. Определим на нём подстановку ψ размера 2×2, заданную так: $(a, b) \to \begin{smallmatrix} (a_i,b_j) & (a_k,b_l) \\ (a_m,b_n) & (a_p,b_r) \end{smallmatrix}$, где $\sigma(a) = \begin{smallmatrix} a_i & a_k \\ a_m & a_p \end{smallmatrix}$ и $\tau(b) = \begin{smallmatrix} b_j & b_l \\ b_n & b_r \end{smallmatrix}$. Легко видеть, что она является декорацией σ и у неё есть свойство разделения образов.

D. Различные формализмы и перевод непериодичности на другие языки.

D1 Допустим, есть апериодический набор в формализме Ванга. Введем для каждой буквы на ребре противоположную. Теперь в каждой плитке набора поменяем буквы верхнего и правого ребра на противоположные. Получится набор в другом формализме, причем каждому замощению в одном наборе соответствует замощение в другом. То есть апериодичность сохраняется. Аналогично в другую сторону.

D2 Назовем многоугольник *квадратно-составленным*, если он представляет собой фигуру полимино, составленную из единичных квадратов (связную и без дыр внутри). Постройте апериодический набор из квадратно-составленных многоугольников, которые можно поворачивать и переворачивать. *Указание.* Такой набор можно построить, используя набор Робинсона. Сначала представим что каждая плитка это квадрат $k \times k$ для большого k. Реализуем каждую засечку на стороне квадрата из набора робинсона (их три вида) в виде выреза по контуру из

D3 a) *Ответ: нет.*

b) Пусть теперь по-прежнему плитки разрешается прикладывать по правилам дополняющих цветов, но перевернутые плитки не могут иметь общую сторону. Докажите, что существует апериодический набор.

E. Декорации

E1. a) алфавит $\{a_1, a_2, b\}$; запретим $\{ba_1, a_2b, bb, a_2a_1\}$.

b) Алфавит $\{a_1, a_2, b\}$; запретим горизонтальные пары $\{ba_1, a_2b, bb, a_2a_1\}$, вертикальные пары $\{\begin{smallmatrix} b \\ a_2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} a_1 \\ b \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} ba_2 \\ ba_1 \end{smallmatrix}\}$, а также $\{\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & \end{smallmatrix}\}$.

E2. Плитками без b (декорированными) можно замостить сколь угодно большой квадрат. Согласно задаче **B8**, можно замостить всю плоскость, не используя b.

E3.
a) *Ответ: нет.* Допустим противное, пусть k – размер максимального запрета. Рассмотрим замощение, в котором одна компонента связности – горизонтальный путь длины k, и другое замощение – путь длины $k+1$. У этих замощений одинаковый набор паттернов размера $k \times k$, поэтому они оба должны быть или разрешены, или запрещены. А должно быть только одно из них.
b) алфавит $\{a, b_1, b_2\}$; запреты $\{ab_2, b_1b_1, b_2b_2, b_1a\}$.
c) Набросок одного из возможных решений. Пусть декорации изображают остовный лес для связной компоненты, то есть объединение непересекающихся деревьев, у каждого дерева отмечен корень и каждая вершина компоненты входит ровно в одно дерево. Наложим условие на чётность числа вершин в компоненте: каждая вершина может считать по модулю 2 число вершин у своих сыновей, прибавлять единицу и передавать результат родителю (считаем, что дальше от корня находятся сыновья, а ближе к корню – родитель). С одной стороны, в каждой связной компоненте есть остовное дерево с чётным числом вершин, которое можно так раскрасить. С другой – в каждом разрешённом замощении каждая связная компонента состоит из одного или нескольких таких деревьев, т.е. содержит чётное число вершин.

E4*. В размерности 1 это просто: алфавит $\{a, b_1, b_2\}$; запреты $\{ab_2, b_1b_1, b_2b_2, b_2a\}$.

В размерности 2 это тоже возможно, но весьма и весьма нетривиально :-)

E5. Пример: возьмём такой набор плиток, чтобы с их помощью можно было нарисовать на плоскости любой граф. Тогда декорацией можно задать правильную раскрашиваемость графа в 3 цвета.

E6. a) Все квадраты 2×2 появляются или и там и там, или нигде.
b) Пусть k – размер декорированного алфавита. Декораций границы квадрата $n \times n$ не более чем $k^{4(n-1)}$.
c) Рассмотрим множество замощений, где c-шки образуют колонку. Смотрим множество паттернов $n \times n$, которые могут быть слева от колонки. Их хотя бы 2^{n^2} (декорации всевозможных замощений из a и b). При достаточно большом n (параметр k фиксирован) есть два таких замощения, что у них совпадают границы, и по пункту a) одно можно заменить на второе. Тогда мы получим разрешённое, но не симметричное.
d) Если $\mathcal{S}$ – такое множество замощений, то должно существовать такое k, что для любого n среди любого набора из k^n замощений квадрата $n \times n$ можно выбрать 2 и одинаково продолжить до замощения всей плоскости.