Замечательные точки многоугольников

А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Б.Френкин[1]

Был замысел хорош на диво,
Но рока не перехитришь.
Распорядился он глумливо,
И от горы родилась мышь.

А.Великий

Хорошо известно, что каждый треугольник обладает множеством более или менее интересных свойств. Например, количество так называемых *замечательных точек* в энциклопедии [1] уже перевалило за 10000. Эти точки определяют ряд прямых окружностей и других связанных с треугольником объектов. **Цель проекта (мечта идиота)** — найти аналоги этих объектов в произвольном многоугольнике. Разумеется, реализована она будет в очень малой степени, зато у участников Конференции останется значительный простор для собственных исследований.

1 Центры тяжести многоугольников

Центром тяжести треугольника принято называть точку M пересечения его медиан. Действительно, если расположить в вершинах треугольника равные массы, то их центр тяжести M_0 совпадет с M. В этой же точке находится центр тяжести M_2 треугольника, вырезанного, например, из картона. Однако, для треугольника, сделанного из проволоки, центром тяжести будет другая точка, обозначим ее M_1. Найти ее можно, воспользовавшись следующим общим свойством центров тяжести.

Основное свойство. Пусть фигура F является объединением двух непересекающихся фигур F' и F''. Тогда центр тяжести M фигуры F лежит на отрезке $M'M''$, где M', M'' — центры тяжести F', F'', причем отношение отрезков MM'/MM'' равно отношению m_2/m_1 масс F'' и F'. При этом, если в качестве фигур F', F'' рассматриваются ломаные, то масса фигуры равна ее длине, а для плоских фигур массы равны их площадям.

Строгие определения центров тяжести приведены в приложении.

1.1. Найдите центр тяжести M_1 проволочного треугольника.

1.2. Докажите, что точка M_1, точка пересечения медиан M_0 и центр I вписанной окружности ABC лежат на одной прямой (**прямая Нагеля**), причем M_0 делит отрезок IM_1 в отношении $2:1$.

1.3. Докажите, что M_1 — радикальный центр трех вневписанных окружностей ABC, т.е. касательные, проведенные из M_1 к этим окружностям равны.

[1] Авторы благодарят Д.Крекова за помощь в подготовке проекта

1.4. Докажите, что каждая из прямых A_0M_1, B_0M_1, C_0M_1, где A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно, делит периметр треугольника ABC пополам.

Итак для треугольника можно определить два центра тяжести M_0 и M_1, между которыми существует определенная связь. У произвольного многоугольника может существовать уже три центра тяжести: центр тяжести M_0 его вершин, центр тяжести M_1 периметра и центр тяжести M_2 сплошного многоугольника (для треугольника $M_2 = M_0$).

1.5. Для четырехугольника $ABCD$ найдите точки M_0 и M_2.

1.6. Докажите, что M_0 лежит на отрезке LM_2, где L — точка пересечения диагоналей четырехугольника, и делит его в отношении $3:1$.

1.7. Для четырехугольника $ABCD$ найдите точку M_1.

Похоже, что в общем случае точка M_1 не обладает никакими интересными свойствами. Но, если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то ситуация меняется.

1.8.

a) Докажите, что M_2 лежит на отрезке IM_1, где I центр вписанной окружности, и делит его в отношении $2:1$.

b) Докажите, что это свойство верно для любого описанного многоугольника.

1.9. Докажите, что в любом четырехугольнике точка M_0 является серединой отрезка M_1W, где W — середина IL.

Будем теперь рассматривать четырехугольник, который является не только описанным, но и вписанным. По теореме Понселе можно, зафиксировав описанную и вписанную окружности, "вращать" четырехугольник между ними.

1.10. Какие кривые описывают при этом центры тяжести?

Приложение. Определение центров тяжести

Сдавать решения приведенных здесь упражнений необязательно, но за каждое сданное решение участник получает бонус — право рассказать решение одной из задач проекта устно.

Определение 0. Материальной точкой называется пара (X, m), где X — точка плоскости, а m — положительное число ("масса" точки).

Определение 1. Центром масс материальных точек $(X_1, m_1), \dots, (X_n, m_n)$ называется такая точка M, что

$$m_1\vec{MX_1} + \cdots + m_n\vec{MX_n} = \vec{0}.$$

Упражнение 1. Докажите существование и единственность центра масс.

Упражнение 2. Докажите, что для любой точки O

$$vecOM = \frac{m_1\vec{OX_1} + \cdots + m_n\vec{OX_n}}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

Упражнение 3. Докажите, что центр масс материальных точек (A, m_1) и (B, m_2) лежит на отрезке AB и делит его в отношении $m_2 : m_1$.

Упражнение 4. Докажите, что центром масс материальных точек $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ является точка пересечения медиан треугольника ABC.

Упражнение 5. Докажите, что центр масс материальных точек (X_1, m_1),..., (X_n, m_n), (X_{n+1}, m_{n+1}) совпадает с центром масс материальных точек $(M, m_1 + \dots + m_n)$, (X_{n+1}, m_{n+1}), где M — центр масс материальных точек (X_1, m_1),..., (X_n, m_n).

Определение 2. **Центром масс** n отрезков, каждые два из которых имеют не более одной общей точки называется центр масс материальных точек $(M_1, l_1), \dots, (M_n, l_n)$, где M_i — середина i-го отрезка, а l_i — его длина.

Определение 3. Пусть фигура F является объединением n треугольников, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. **Центром масс** фигуры F называется центр масс материальных точек $(M_1, S_1), \dots, (M_n, S_n)$, где M_i — точка пересечения медиан i-го треугольника, а S_i — его площадь.

Упражнение 6. Докажите, что при любом разбиении многоугольника на треугольники центром масс объединения этих треугольников будет одна и та же точка (эта точка называется центром масс многоугольника).

Упражнение 7^***.** Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD и EF лежат на одной прямой (**прямая Гаусса** четырехугольника $ABCD$).

В проекте под центром тяжести M_0 многоугольника $A_1 \dots A_n$ подразумевается центр масс материальных точек $(A_1, 1), \dots, (A_n, 1)$, под центром тяжести M_1 — центр масс отрезков $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, под центром тяжести M_2 — центр масс многоугольника.

2 Прямые Эйлера и Нагеля

Известно, что в любом треугольнике центр описанной окружности O, центр тяжести M_0 и ортоцентр H лежат на одной прямой, которая называется **прямой Эйлера**, причем M_0 делит отрезок OH в отношении $1:2$. Также, если A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB, а точки A_2, B_2, C_2 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно середин соответствующих сторон (в этих точках стороны касаются соответствующих вневписанных окружностей), то прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке N, которая называется **точкой Нагеля**. При этом M_0 лежит на отрезке IN и делит его в отношении $1:2$. Отметим также, что каждая из прямых AA_2, BB_2, CC_2 делит периметр треугольника пополам. Наша цель — найти аналоги прямой Эйлера для вписанного многоугольника и прямой Нагеля для описанного.

2.1. (А.Мякишев, II Олимпиада им. И.Ф.Шарыгина) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O; H_a, H_b, H_c, H_d — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC соответственно; H — точка пересечения прямых H_aH_c и H_bH_d. Докажите, что центр тяжести M_2 лежит на отрезке OH и делит его в отношении $1:2$.

2.2. (А.Мякишев, II Олимпиада им. И.Ф.Шарыгина) Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I; точки T, U, V, W симметричны точкам касания окружности со сторонами AB, BC, CD, DA относительно середин этих сторон.

a) Докажите, что каждая из прямых TV и UW делит периметр четырехугольника пополам.

b) Пусть N — точка пересечения прямых TV и UW. Докажите, что M_2 лежит на отрезке IN и делит его в отношении $1:2$.

Другой подход к определению прямой Эйлера предложил И.Романов [4].

Определим ортоцентр вписанного n-угольника $A_1 \dots A_n$ по индукции. Пусть $H_1, \dots, H_n$ — ортоцентры $(n-1)$-угольников $A_2 \dots A_n, \dots, A_1 \dots A_{n-1}$ соответственно.

2.3. Докажите, что прямые $A_1H_1, \dots, A_nH_n$ пересекаются в одной точке.

2.4. Назовем полученную в предыдущей задаче точку H ортоцентром n-угольника. Докажите, что центр тяжести M_0 лежит на отрезке OH и делит его в отношении $(n-2):2$.

2.5. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник.

Рассматриваем два обобщения ортоцентра:

H^* — центр параллелограмма, образованного ортоцентрами треугольников ABL, BCL, CDL, DAL.

$H^{**} = H_aH_c \cap H_bH_d$, где, как обычно, H_a — ортоцентр треугольника BCD, и т.д..

Далее обобщаем O как $O^{**} = O_aO_c \cap O_bO_d$, где O_a — центр описанной окружности треугольника BCD, и т.д.. (иначе говоря, O^{**} — пересечение серединных перпендикуляров к AC и BD).

Докажите, что

a) M_0 — середина $O^{**}H^*$;

b) (Я. Ганин, А. Мякишев) M_2 лежит на отрезке $O^{**}H^{**}$ и делит его в отношении $1:2$.

c) H^* — середина LH^{**}.

3 Квазицентры описанной и вписанной окружностей

В этой части мы попытаемся для произвольного четырехугольника определить точки O, I, обладающие свойствами центров описанной и вписанной окружностей. Разумеется, для вписанного (описанного) четырехугольника точка O (I) должна совпадать с центром описанной (вписанной) окружности.

3.1. Докажите, что для любого вписанно-описанного четырехугольника $ABCD$ центры O, I и точка пересечения диагоналей L лежат на одной прямой.

3.2. Пусть диагонали четырехугольника $PQRS$ пересекаются в точке I; точки A, B, C, D — проекции I на PQ, QR, RS, SP соответственно. Докажите, что

a) четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда четырехугольник $PQRS$ вписанный;

b) если четырехугольник $ABCD$ описанный, то I — центр его вписанной окружности;

Пусть прямые IA, IB, IC, ID пересекают RS, SP, PQ, QR соответственно в точках A', B', C', D'.

3.3. Докажите, что

a) четырехугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $PR \perp QS$;

b) если $PR \perp QS$, то $A'B'C'D'$ — прямоугольник и точки A, B, C, D, A', B', C', D' лежат на одной окружности.

3.4. Восстановите четырехугольник $PQRS$ по точкам A, B, C, D, если известно, что точка I лежит внутри четырехугольника $ABCD$.

Определение. Назовем **квазицентром вписанной окружности** выпуклого четырехугольника $ABCD$ построенную в предыдущей задаче точку I, а **квазицентром описанной окружности** точку O пересечения прямых $A'C'$ и $B'D'$. (Будем считать, что I лежит внутри $ABCD$)

3.5. Докажите, что квазицентры O, I и точка пересечения диагоналей L лежат на одной прямой.

3.6. Для вписанно-описанного четырехугольника выразите радиусы описанной и вписанной окружностей через длины отрезков OI и OL.

Последняя задача позволяет определить для произвольного четырехугольника квазивписанную и квазиописанную окружности. Пока неизвестно, обладают ли эти окружности какими-либо интересными свойствами.

Опишем другой подход к определению квазицентров.

3.7. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC; J — центр описанной окружности треугольника $I_aI_bI_c$. Докажите, что O — середина отрезка IJ.

3.8. Докажите, что для произвольного четырехугольника биссектрисы его внутренних углов образуют вписанный четырехугольник и биссектрисы внешних углов также образуют вписанный четырехугольник.

Обозначим центры окружностей четырехугольников, образованных биссектрисам внутренних и внешних углов через I и J соответственно.

3.9. (VII Олимпиада им. И.Ф.Шарыгина) Докажите, что для четырехугольника, вписанного в окружность с центром O точки I и J симметричны относительно O.

Теперь в качестве квазицентров вписанной и описанной окружностей можно взять точку I и середину O отрезка IJ соответственно. К сожалению, определенная таким образом прямая OI может не проходить через точку пересечения диагоналей L.

Еще один подход к определению квазицентра описанной окружности предложен в [6].

3.10. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке X, AD и BC — в точке Y, AC и BD — в точке Z; M_X — точка Микеля прямых AD, BC, AC и BD, M_Y — точка Микеля прямых AB, BD, AC и BD, M_Z — точка Микеля прямых AD, BC, AB и CD. Докажите, что

a) прямые XM_X, YM_Y и ZM_Z пересекаются в одной точке;

b) если точки A, B, C, D лежат на одной окружности, то эти прямые пересекаются в ее центре.

Соответственно полученную в последней задаче точку также можно считать квазицентром описанной окружности.

4 Дополнительные задачи

4.1. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, не имеющий параллельных сторон, описанный около окружности с центром I. Точки X, Y, Z, T — точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD, DA соответственно. Как всегда, $L = AC \cap BD$ (а также $L = XZ \cap YT$). X' симметрична X относительно середины M_{AB} стороны AB; Y', Z', T' определяются аналогично. $N = X'Z' \cap Y'T'$ — точка Нагеля.

Докажите, что условие $M_0 = I$ эквивалентно следующим условиям:

a) $AX + CZ = BY + DT$;

b) $XZ \parallel X'Z'$ (или $XZ \parallel M_{AB}M_{CD}$);

c) X', Z' и $BC \cap AD$ лежат на одной прямой;

d) L, I, N лежат на одной прямой;

e) (А. Заславский, М. Исаев, Д. Цветов, Всероссийская олимпиада 2005 г.) $IA \cdot IC = IB \cdot ID$.

4.2. (А.Мякишев) Треугольники ABC и $A'B'C'$ называются **ортологичными**, если перпендикуляры, опущенные из A', B', C' соответственно на BC, CA, AB, пересекаются в одной точке. Четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ называются ортологичными, если ортологичны треугольники ABC и $A'B'C'$, BCD и $B'C'D'$, CDA и $C'D'A'$, DAB и $D'A'B'$. Пусть четырехугольники $ABCD$ и

$A'B'C'D'$ ортологичны, диагонали AC и BD пересекаются в точке L, $A'C'$ и $B'D'$ — в точке L'. Докажите, что $AL : LC = A'L' : L'C'$ и $BL : LD = B'L' : L'D'$ (т.е. ортологичные четырехугольники аффинно эквивалентны).

Список литературы

[1] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[2] Ф.Ивлев. Центры тяжести многоугольников. Доклад на ММКШ. 2008. https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/notes.htm

[3] A.Akopyan. Some remarks on the circumcenter of mass. https://arxiv.org/pdf/1512.08655.pdf

[4] И.Романов. Прямая Эйлера n-угольника. Доклад на ММКШ. 2017. https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works2017/ignatov2.pdf

[5] А.Заславский. Диагонально-перпендикулярное отображение четырехугольников. Квант. 1998. №4.

[6] M.Rolnek, Le Anh Dung. The Miquel Points, Pseudocircumcenter, and Euler-Poncelet Point of a Complete Quadrilateral. Forum Geometricorum V.14 (2014). https://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/FG201413.pdf.