Замечательные точки многоугольников
Решения

1 Центры тяжести многоугольников

1.1. **Ответ.** Центр окружности, вписанной в треугольник $A_0B_0C_0$.

Доказательство. Так как точки A_0, B_0, C_0 являются серединами отрезков BC, CA, AB, поместим в них массы, равные длинам этих отрезков. Тогда центром тяжести масс в точках A_0, B_0 будет точка, делящая отрезок A_0B_0 в отношении $AC : BC = A_0C_0 : B_0C_0$, т.е. основание биссектрисы треугольника $A_0B_0C_0$. Следовательно, центр тяжести всех трех масс лежит на этой биссектрисе. Аналогично получаем, что он лежит и на других биссектрисах треугольника $A_0B_0C_0$ и, значит, совпадает с центром вписанной в этот треугольник окружности (рис.1).

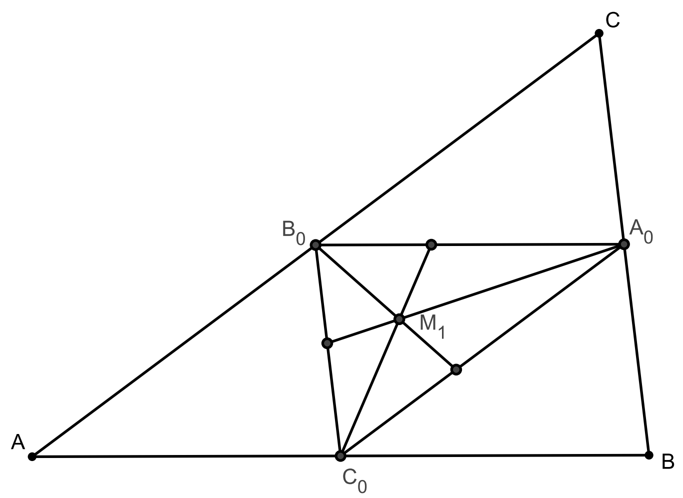

Рис. 1

1.2. Следует из предыдущей задачи и гомотетичности треугольников ABC, $A_0B_0C_0$ относительно I.

1.3. Пусть вневписанные окружности, касающиеся сторон AC и BC, касаются продолжений стороны AB в точках X, Y. Тогда $BX = AY = p$ (полупериметр треугольника) и, значит, $C_0X = C_0Y$. Кроме того, линия центров этих окружностей перпендикулярна биссектрисе угла C, а значит, и параллельной ей прямой C_0M_1. Таким образом, M_1 лежит на радикальной оси этих окружностей. Аналогично получаем, что M_1 лежит на радикальной оси любой другой пары вневписанных окружностей.

1.4. Пусть, например, C_0M_1 пересекает сторону AC в точке X. Из предыдущей задачи следует, что X делит пополам отрезок между точками касания прямой AC с вневписанными окружностями, касающимися сторон AC и BC (рис.2). Поскольку расстояния от этих точек до вершины A равны соответственно $p-c$ и p, то $AX = p - c/2$ и $AX + AC_0 = p$.

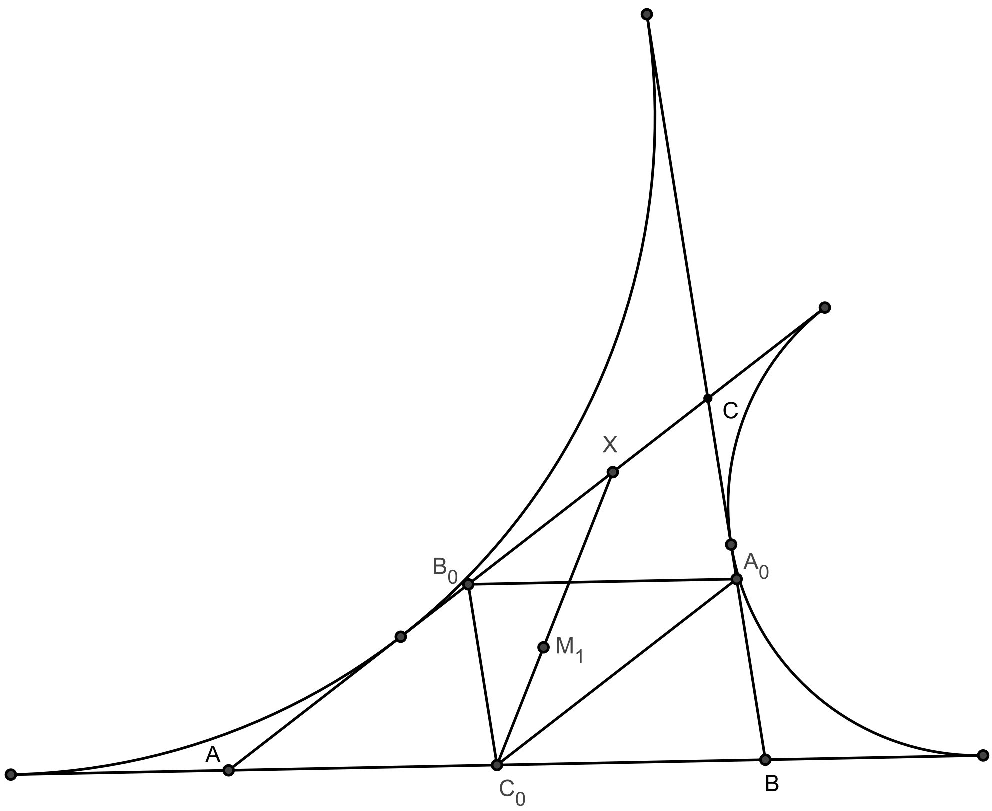

Рис. 2

1.5. **Ответ.** M_0 — центр параллелограмма $PQRS$, где P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, DA. M_2 — точка пересечения прямой l_1, соединяющей центры тяжести треугольников ABC и ADC, с прямой l_2, соединяющей центры тяжести треугольников ABD и BCD.

1.6. Пусть U, V — середины диагоналей AC и BD, L — точка их пересечения. Центр тяжести треугольника ABC лежит на его медиане BU и делит ее в отношении 2 : 1. Аналогично центр тяжести треугольника ACD лежит на DU и делит ее в том же отношении. Прямая l_1, проходящая через эти центры, параллельна диагонали BD и пересекает диагональ AC в точке, которая делит отрезок UL в отношении 1 : 2. Аналогично M_2 лежит на прямой, параллельной AC и делящей отрезок VL в отношении 1 : 2. Отметим, что если провести прямые, параллельные AC и BD, через M_0, то они разделят отрезки UL и VL пополам. Отсюда вытекает утверждение задачи (рис.3).

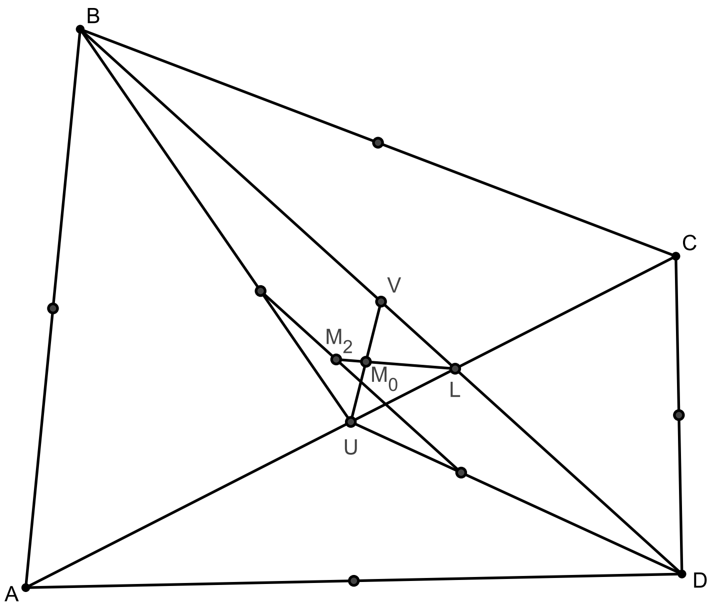

Рис. 3

1.7. Так как P и Q — центры тяжести отрезков AB и BC, центр тяжести X_1 объединения этих отрезков лежит на PQ и $PX_1/QX_1 = BC/AB$. Построить эту точку можно следующим образом: проведем биссектрису BB' треугольника BPQ и найдем точку, симметричную B' относительно середины отрезка PQ. Аналогично строятся центры тяжести X_2, Y_1, Y_2 ломаных CDA, DAB, BCD. M_1 — это точка пересечения прямых X_1X_2 и Y_1Y_2 (рис.4).

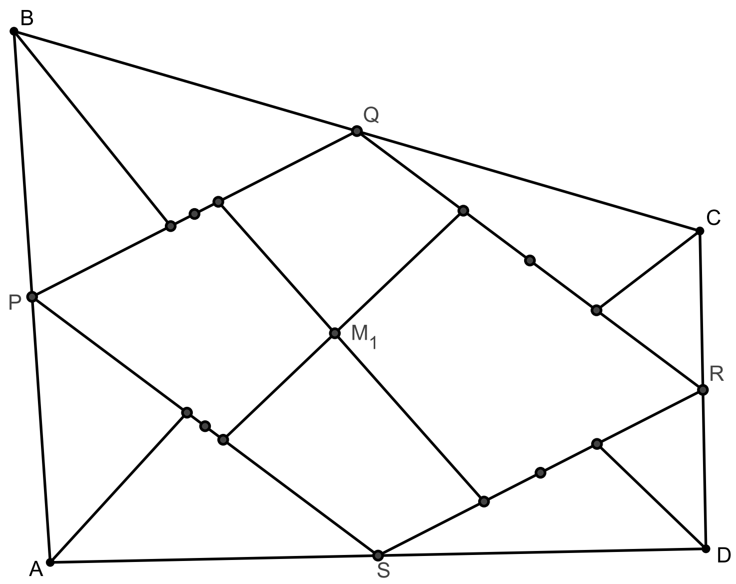

Рис. 4

1.8.

a) Центры тяжести (сплошных) треугольников IAB, IBC, ICD, IDA, где I — центр вписанной окружности, делят их медианы IP, IQ, IR, IS в отношении 2 : 1, т.е. образованный ими четырехугольник гомотетичен $PQRS$ с центром I и коэффициентом $\frac{2}{3}$. Так как площади треугольников IAB, IBC, ICD, IDA относятся так же, как соответствующие стороны $ABCD$, M_1 при этой гомотетии переходит в M_2.

b) Доказательство аналогично.

1.9. Следует из двух предыдущих задач и теоремы о центрах трех гомотетий.

1.10. **Указание.** Точка M_0 — середина отрезка между серединами диагоналей четырехугольника. Используя тот факт, что прямая Гаусса описанного четырехугольника проходит через центр вписанной окружности, нетрудно вывести, что траектория M_0 — окружность. Теперь, применив соответствующие гомотетии, получаем, что и траектории двух других центров — окружности (рис.5).

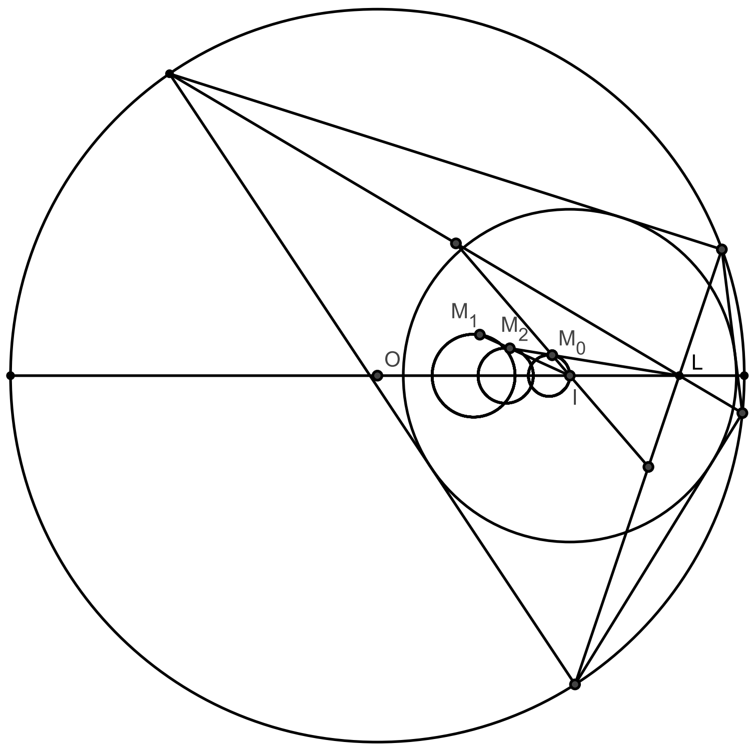

Рис. 5

2 Прямые Эйлера и Нагеля

2.1. Пусть M_a и H_a — соответственно центроид (точка M_2) и ортоцентр треугольника BCD. Центроиды и ортоцентры остальных трех треугольников обозначим аналогично. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в O. Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырехугольник $M_aM_bM_cM_d$ переходит в четырехугольник $H_aH_bH_cH_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 3. Соответственно, точки пересечения диагоналей этих четырехугольников переходят друг в друга.

2.2.

a) Из определения следует, что $AT + DV = BC$, $BT + CV = AD$, т.е. $TA + AD + DV = VC + CB + BT$.

b) Пусть a, b, c, d — длины касательных к вписанной окружности из вершин A, B, C, D. Очевидно, что, если поместить в A, B, C, D массы a, b, c, d, то центром тяжести полученной системы будет точка N, а, если поместить в вершины массы $2a+b+d$, $2b+a+c$, $2c+b+d$, $2d+c+a$, то — точка M_1. Осталось показать, что I — центр тяжести масс $b+d$, $a+c$, $b+d$, $a+c$ и воспользоваться утверждением задачи 1.8.

Точка I удовлетворяет соотношению $S_{IAB} - S_{IBC} + S_{ICD} - S_{IDA} = 0$. Этому же соотношению удовлетворяют середины U и V диагоналей четырехугольника. Следовательно, эти три точки лежат на одной прямой (это утверждение называется *теоремой Монжа*). Пусть теперь X, Y — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AD. Тогда прямая XY образует равные углы с этими сторонами и по теореме Брианшона проходит через точку L пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам LXB и LYD, получим, что $BL/DL = b/d$. Аналогично, $AL/CL = a/c$. Отсюда и из соотношений $S_{UBC}/S_{UAD} = BL/DL$, $S_{VBC}/S_{VAD} = CL/AL$, $S_{IBC}/S_{IAD} = (b+c)/(a+d)$ вытекает, что I делит отрезок AC в отношении $(a+c)/(b+d)$, что и требуется.

2.3. **Указание.** Примените индукцию.

2.4. **Указание.** Примените индукцию.

2.5. a) Пусть M_{AC}, M_{BD} — середины диагоналей AC, BD. Очевидно, что $O^{**}M_{AC} \perp AC$ и $O^{**}M_{BD} \perp BD$. С другой стороны $H^*M_{AC} \perp BD$ и $H^*M_{BD} \perp AC$, потому что H^* — центр параллелограмма, стороны которого перпендикулярны диагоналям четырехугольника и проходят через его вершины. Следовательно, $H^*M_{AC}O^{**}M_{BD}$ — параллелограмм, откуда и следует утверждение задачи.

b) **Указание.** Воспользуйтесь утверждением задачи 4.2.

c) Очевидно следует из двух предыдущих пунктов.

3 Квазицентры описанной и вписанной окружностей

3.1. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма. Пусть точка P лежит внутри окружности с центром O. Два перпендикулярных луча с началом P пересекают окружность в точках X, Y. Тогда геометрическим местом точек пересечения касательных к окружности в X и Y будет окружность с центром, лежащим на OP.

Доказательство. Пусть Z — четвертая вершина прямоугольника $PXZY$. Так как $OP^2 + OZ^2 = OX^2 + OY^2$, Z описывает окружность с центром O. Значит, середина отрезка XY описывает окружность, центром которой является середина OP, и инверсная к ней точка пересечения касательных также описывает окружность.

Теперь утверждение задачи следует из того факта, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон четырехугольника с вписанной окружностью, перпендикулярны и проходят через точку пересечения его диагоналей.

3.2. Так как четырехугольники $IAQB$, $IBRC$ вписанные, то $\angle IBA = \angle IQA$, $\angle IBC = \angle IRC$, откуда следуют оба утверждения.

3.3. Доказательство аналогично предыдущей задаче.

3.4. Будем считать, что лучи PQ и SR пересекаются в точке X. Тогда $\angle PXS = \angle PIS - \angle IPA - \angle CSI$. Из вписанности четырехугольников $IAPD$, $ICSD$ получаем, что $\angle IPA + \angle CSI = \angle CDA$. Кроме того, $\angle PIS = \angle RIQ = (\angle PAD + \angle DCS + \angle RCB + \angle BAQ)/2 = (\angle ABC + \angle CDA)/2$. Следовательно, $\angle AIC = \pi - \angle PXS = \pi - (\angle ABC - \angle CDA)/2$ (рис.6). Найдя аналогично угол BID мы сможем построить точку I как точку пересечения соответствующих дуг окружностей, а затем и четырехугольник $PQRS$.

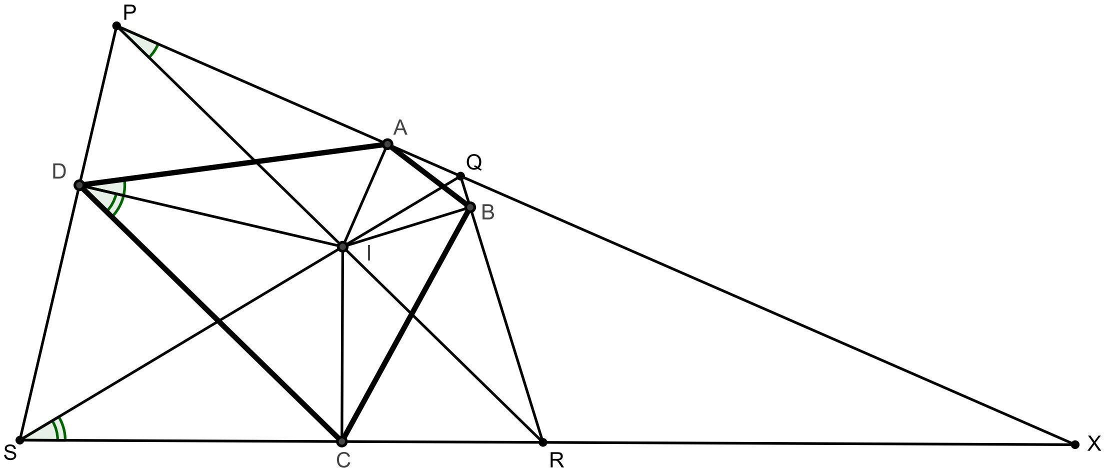

Рис. 6

3.5. **Указание.** Примените центральную проекцию, переводящую точки P, Q, R, S в вершины параллелограмма.

3.6. **Ответ.** $R^2 = \frac{OL \cdot OI^2}{2OI - OL}$, $r^2 = \frac{(R^2 - OI^2)^2}{2(R^2 + OI^2)}$.

Указание. По теореме Понселе достаточно рассмотреть четырехугольник, одна из диагоналей которого является диаметром описанной окружности.

3.7. **Указание.** Докажите, что отрезки I_aJ, I_bJ, I_cJ перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника ABC.

3.8. Доказывается непосредственным вычислением углов.

3.9. Пусть биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, B и C — в точке L, C и D — в точке M, D и A — в точке N (рис.9.4). Тогда прямая KM — биссектриса угла между AD и BC. Обозначив этот угол через ϕ, по теореме о внешнем угле получаем, что $\angle LKM = \angle B/2 - \phi/2 = (\pi - \angle A)/2 = \angle C/2$ и, значит, $\angle LIM = \angle C$. С другой стороны, перпендикуляры из L на BC и из M на CD образуют с ML углы, равные $(\pi - \angle C)/2$, т.е. треугольник, образованный этими перпендикулярами и ML, — равнобедренный с углом при вершине, равным углу C. Поэтому вершина этого треугольника совпадает с I. Таким образом, перпендикуляры, опущенные из вершин четырехугольника $KLMN$ на соответствующие стороны $ABCD$, проходят через I (рис.7). Аналогично получаем, что перпендикуляры из вершин четырехугольника, образованного внешними биссектрисами, проходят через J.

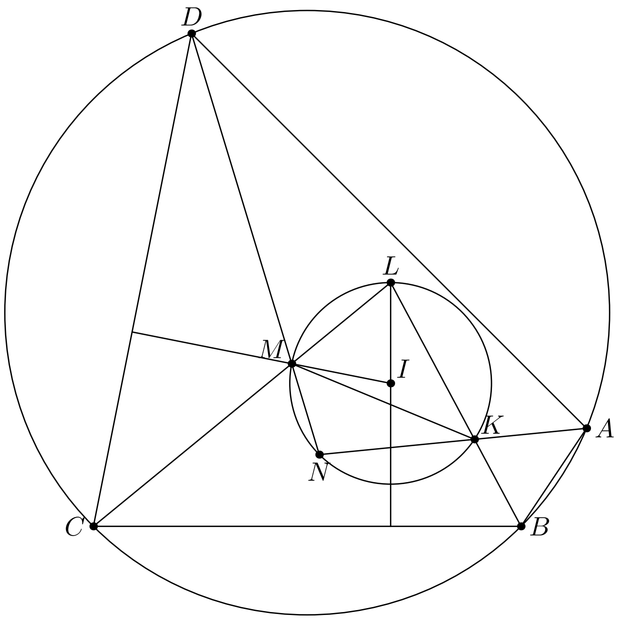

Рис. 7

Пусть теперь K' — точка пересечения биссектрис внешних углов A и B. Так как четырехугольник $AKBK'$ вписан в окружность с диаметром KK', то проекции K и K' на AB симметричны относительно середины AB. Отсюда и из утверждения, доказанного выше, следует, что проекции I и J на каждую из сторон $ABCD$ симметричны относительно середины этой стороны, что равносильно утверждению задачи.

3.10. См. [6].

Список литературы

[1] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[2] Ф.Ивлев. Центры тяжести многоугольников. Доклад на ММКШ. 2008. https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/notes.htm

[3] A.Akopyan. Some remarks on the circumcenter of mass. https://arxiv.org/pdf/1512.08655.pdf

[4] И.Романов. Прямая Эйлера n-угольника. Доклад на ММКШ. 2017. https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works2017/ignatov2.pdf

[5] А.Заславский. Диагонально-перпендикулярное отображение четырехугольников. Квант. 1998. №4.

[6] M.Rolnek, Le Anh Dung. The Miquel Points, Pseudocircumcenter, and Euler-Poncelet Point of a Complete Quadrilateral. Forum Geometricorum V.14 (2014). https://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/FG201413.pdf.