13Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ФУНКЦИЙ [1]

А. Белов, [2] И. Митрофанов, А. Скопенков, [3] А. Чиликов, [4] С. Шапошников [5]

представляют А. Белов, А. Скопенков, С. Усов,[6] А. Чиликов

Задачи до промежуточного финиша

О чем этот цикл задач

Этот проект посвящен нескольким классическим результатам и методам чистой математики, интересным с точки зрения информатики (той ее части, которая относится к комбинаторной геометрии и теории кодирования).

Если имеется несколько функций, то одни из них можно подставлять в качестве аргументов других. Эта операция называется *суперпозицией*. Например,

• функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2y+y^2$, является суперпозицией функций $x+y$ и xy;

• функция $f:\mathbb{Z}_2^2\to\mathbb{Z}_2$, $f(x,y)=x\oplus y=x\mathrm{XOR}y$, является суперпозицией функций $\overline{x}$, $x\vee y$ и $x\wedge y$;

• функция $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=g\Big(g\big(\sin x+y,g(y,x^2,z),x\big),x,x\Big)$, является суперпозицией функций $g(x,y,z),x+y,\sin x,x^2$.

Четкое определение дано в начале §1. Суперпозиции — важный объект исследования в анализе, топологии и computer science. Общая постановка задачи: когда данную функцию от нескольких переменных можно представить в виде *суперпозиции* функций от меньшего числа переменных? Ответ зависит от рассматриваемого класса функций (ср. [ZSS, п. 21.5 'Выразимость для функций алгебры логики'], [Ar58]).

Мы продемонстрируем некоторые важнейшие идеи решения этой общей задачи для непрерывных функций, т.е. доказательства теоремы А.Н. Колмогорова 1.11 (это решение 13-й проблемы Д. Гильберта). Они будут представлены на 'олимпиадных' примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму научного языка. За счет этого данный цикл задач доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты.

Для его решения не нужно специальных знаний, все новые определения будут даны. При этом потребуется (и будет далее развиваться) опыт сообразительности, т.е. математическая культура. В частности, хотя цикл задач аналитический, знаний математического анализа для решения многих задач не требуется — мы иллюстрируем основные идеи на дискретных версиях. Тем самым, решение этих задач поможет *развить* аналитические опыт и интуицию.

Будут предложены красивые задачи для исследования. Некоторые знаменитые примеры 'непрерывной' математики (пила Вейерштрасса, кривая Пеано) уже оказались полезными в физике и computer science. Надеемся, схожие, но менее известные, идеи теоремы Колмогорова также окажутся полезными.

Соглашения

Если текст задачи выглядит как утверждение, то в задаче требуется его доказать. Если номер задачи помечен кружком (например, 5°), то это базовая задача. Рекомендуем решить

[1]Благодарим С. Дориченко и Г. Челнокова за полезные замечания, И. Решетникова за подбор задач о кривой Пеано и Р. Садыкова за написание указаний к некоторым вводным задачам.

[2]Московский Физико-Технический Институт, Московский Институт Открытого Образования.

[3]Независимый Московский Университет, Московский Физико-Технический Институт; `www.mccme.ru/~skopenko`; поддержан грантом фонда Д. Зимина «Династия» and the Russian Foundation for Basic Research Grant No. 15-01-06302.

[4]Московский Государственный Технический Университет им. Баумана.

[5]Национальный Исследовательский Университет «Высшая школа экономики»

[6]Омский Государственный Университет им. Достоевского.

все базовые задачи из раздела до того, как вы приступите к остальным задачам раздела. Если номер задачи помечен звездочкой (например, 5*), эта задача посложнее соседних. Такие задачи можно отложить до тех пор, пока не будут решены остальные.

Участник (или группа участников) конференции, решающий задачи проекта, получает "боб" за каждое *записанное* решение, получившее '+' или '+.'. Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных проблем, или оформление некоторых решений в системе TEX. У жюри бесконечно много бобов. Решения можно сдавать и устно, но за каждые пять попыток (неважно, удачных или нет) один боб теряется.

Если вы застряли на какой-нибудь задаче, советуем перейти к следующим, они могут помочь. Приглашаем участников, работающим над проектом, *обсуждать* с жюри все возникающие вопросы.

Особо успешным решателям вы выдаем *дополнительные задачи* для исследования.

1 Примеры суперпозиций и их определение

1.1. Расстановку чисел в клетках шахматной доски назовем *базисной*, если существуют такие числа $\varphi_1,\dots,\varphi_8$, $\psi_1,\dots,\psi_8$, что число в каждой клетке (i,j) равно $\varphi_i+\psi_j$.

(a) Любая ли расстановка базисна?

(b) Если расстановка базисна, то для любых клеток A,B,C,D, являющихся (в этом порядке) вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски, сумма чисел в клетках A,C равна сумме чисел в клетках B,D.

(c) Если расстановка базисна, то для любого замкнутого пути ладьи по доске, последовательные повороты которого происходят в клетках $A_1,\dots,A_{2n}$, сумма чисел в клетках $A_1,A_3,\dots,A_{2n-1}$ равна сумме чисел в клетках $A_2,A_4\dots,A_{2n}$.

(d) Верно ли утверждение, обратное к (b)?

1.2. (a) Для любой ли расстановки чисел в клетках шахматной доски существует такая функция $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что число в каждой клетке (i,j) равно $h(i+\sqrt{2}j)$?

(b) Для любой ли расстановки чисел в клетках шахматной доски существуют целые числа $\varphi_1,\dots,\varphi_8,\psi_1,\dots,\psi_8$ и функция $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых число в каждой клетке (i,j) равно $h(\varphi_i+\psi_j)$?

(c) Существуют ли такие целые числа $\varphi_1,\dots,\varphi_8,\psi_1,\dots,\psi_8$, что для любой расстановки чисел в клетках шахматной доски существует функция $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой число в каждой клетке (i,j) равно $h(\varphi_i+\psi_j)$?

(d) Существуют ли такие целые числа φ_{ik},ψ_{ik}, $i,k=1,\dots,8$, что для любой расстановки чисел в клетках куба $8\times8\times8$ существует такая функция $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что число в клетке (i,j,k) равно $h(\varphi_{ik}+\sqrt{2}\psi_{jk})$?

Многочленом с коэффициентами в множестве $A\in\{\mathbb{R},\mathbb{Z}_q\}$ называется бесконечная последовательность $(a_0,\dots,a_n,\dots)$ чисел из As, среди которых лишь конечное количество ненулевых. Для $M\subset A$ поставим в соответствие многочлену (т.е. последовательности) $P=(a_0,\dots,a_n,\dots)$ функцию $\overline{P}\colon M\to M$, заданную формулой $\overline{P}(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ (эта сумма конечна). Многочлен $P=(a_0,\dots,a_n,\dots)$ обычно записывают в виде $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, т.е. так же, как $\overline{P}$.

Для множества X обозначим $X^n=\{(x_1,\dots,x_n)\ :\ x_1,\dots,x_n\in X\}$.

1.3. Какие из следующих функций являются многочленами (точнее, соответствует некоторому многочлену)?

(a) $\sin x$ на $\mathbb{R}$; (b)* $\sin x$ на $[0,1]$; $(c)^\circ$ $\sin x$ на $\{0,1\}$; (d) $\sin x$ на $\{0,\frac19,\frac29,\dots,\frac89,1\}$.

1.4. (a) Дайте 'определение' функции (отображения) $f:X\to Y$.

(b) Любая функция $\mathbb{Z}_q\to\mathbb{Z}_q$ 'является' многочленом для простого q.

(c) Любая функция $\mathbb{Z}_q^n\to\mathbb{Z}_q$ 'является' многочленом для простого q.

1.5. *Линией уровня* и *графиком* функции $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ называются множества

$$f^{-1}(c):=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon f(x,y)=c\}\quad\text{и}\quad\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\}.$$

Нарисуйте линии уровня и графики следующих функций:
(a) расстояние до точки; (b) расстояние до прямой; (c) сумма расстояний до двух точек;
(d)* произведение расстояний до двух точек; (e) отношение расстояний до двух точек;
(f) $f(x,y) = x+y$; (g) $f(x,y) = xy$; (h) $f(x,y) = x/y$.
(В п. (e,h) функция задана на *подмножестве* плоскости.)

Определение суперпозиции. Пусть дано некоторое множество функций $F = \{f_\alpha(x_1,\dots,x_{n_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ (не обязательно конечное). Определим множество $\overline{F}$ *суперпозиций* функций из F как множество всех функций, которые можно получить из функций множества F и всех отдельных переменных x_j последовательностью следующих операций *элементарной суперпозиции*:

если уже получены функции $f(x_1,\dots,x_n)$, $g_1(\dots)$, $g_2(\dots)$, $\dots$, $g_n(\dots)$, то получить $f(g_1(\dots),\dots,g_n(\dots))$.

Здесь в качестве аргументов функций g_i можно брать любые, в том числе совпадающие, переменные. Множество значений каждой подставляемой функции должно лежать в области определения соответствующей переменной.

См. примеры суперпозиций в начале текста. Утверждение 1.4.c означает, что любая функция $\mathbb{Z}_q^n \to \mathbb{Z}_q$ является суперпозицией константы 1, сложения по модулю q и умножения по модулю q. Если множество F состоит из констант (то есть просто чисел, или функций без переменных), а также функций двух переменных 'сложение' и 'умножение': $f_1(x_1,x_2) = x_1+x_2$, $f_2(x_1,x_2) = x_1x_2$, то $\overline{F}$ состоит из всех многочленов $\sum\limits_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$.

1.6. Верно ли, что
(a) xy является суперпозицией функций одной переменной?
(b) $x^3y+xy^2 \in \overline{\{xy, x+y\}}$? (c) $xy \in \overline{\{x+y\}}$? (d) $xy \in \overline{\{x+y, x/n, x^n\}_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}}$?
(e) xy как функция $(0,+\infty)^2 \to (0,+\infty)$ лежит в $\overline{\{x+y, 2^x, \log_2 x\}}$?
(f) любая функция одной переменной лежит в $\overline{\{x+y, 2^x, \log_2 x\}}$?
(g) $\sin x \in \overline{\{x+y, xy\}}$? (h) $\sin x \in \overline{\{x+y, xy, 2^x\}}$? (i)* $\sin x \in \overline{\{x+y, xy, 2^x\} \cup \{c\}_{c\in\mathbb{R}}}$?
(j) функция $g(x_1,x_2,x_3) = x_1^{\frac{x_2}{x_3}}$ при $x_1>1, x_2,x_3>0$ лежит в $\overline{\{x_1-x_2, 2^x, \log_2 x\}}$?

1.7. $(a)^\circ$ Из функций одной переменной нельзя получить суперпозициями функции большего числа переменных.
(b) Верно ли, что если множество F конечно или счетно, то и $\overline{F}$ конечно или счетно?

Обозначим через F_n множество *всех* функций $[0,1]^n \to [0,1]$, т. е. функций от n переменных.

1.8. (a) Существует инъекция $\alpha : [0,1]^2 \to [0,1]$ (т.е. такое отображение, что $\alpha(x) \ne \alpha(y)$ при $x \ne y$).
(b) $F_2 \subset \overline{F_1 \cup \{\alpha\}}$. (c) $F_3 \subset \overline{F_2}$.
(d) $F_n \subset \overline{F_{n-1}}$ для любого $n \ge 3$. (e) $F_n \subset \overline{F_1 \cup \{\alpha\}}$ для любого n.

1.9. (a) Существуют ли функции $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2 : [0,1] \to [-1,1]$ и $h_1,h_2 : [-2,2] \to \mathbb{R}$, для которых при любых $x,y \in [0,1]$ выполнено $xy = h_1(\varphi_1(x)+\psi_1(y)) + h_2(\varphi_2(x)+\psi_2(y))$?
(b) Существуют ли функции $\varphi,\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ и $h : [0,2] \to \mathbb{R}$, для которых при любых $x,y \in [0,1]$ выполнено $(x+1)(y+1) = h(\varphi(x)+\psi(y))$?

1.10. (a) $F_2 \subset \overline{F_1 \cup \{x+y\}}$.
(b) Для любой функции $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ найдутся такие функции $\varphi, h : [0,1] \to [0,1]$, что при любых $x,y \in [0,1]$ выполнено $f(x,y) = h(\varphi(x) + 0.1\varphi(y))$.
(c) $F_n \subset \overline{F_1 \cup \{x+y\}}$ для любого n.
(d) Для любых n и функции $f : [0,1]^n \to [0,1]$ найдутся такие функции $\varphi, h : [0,1] \to [0,1]$, что при любых $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$ выполнено

$$f(x_1,\dots,x_n) = h\left(\varphi(x_1) + 10^{-1}\varphi(x_2) + \dots + 10^{1-n}\varphi(x_n)\right).$$

Итак, с помощью функций одной переменной и сложения можно получить любую функцию. Однако интереснее рассматривать 'порождающее' множество, в котором все функции *непрерывны* (см. определение в §3) или *бесконечно дифференцируемы.*

1.11. * Теорема Колмогорова. (a) *Любая непрерывная функция* $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ *(от* n *переменных) представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одной переменной и сложения.*

(b) *Для любой непрерывной функции* $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ *найдутся такие непрерывные функции* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_5 : [0, 1] \to [0, 1]$, $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$, *что при любых* $x, y \in [0, 1]$ *выполнено*

$$f(x, y) = h\left(\varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_1(y)\right) + \ldots + h\left(\varphi_5(x) + \sqrt{2}\varphi_5(y)\right).$$

(c) *Пусть* $p_1, \dots, p_n$ *— различные простые числа. Для любых* n *и непрерывной функции* $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ *найдутся такие непрерывные функции* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n+1} : [0, 1] \to [0, 1]$, $h : [0, 2^n] \to \mathbb{R}$, *что при любых* $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ *выполнено*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{2n+1} h\left(\sqrt{p_1}\varphi_k(x_1) + + \ldots + \sqrt{p_n}\varphi_k(x_n)\right).$$

Указания к (a) приведены после промежуточного финиша.

2 Грубые оценки

Первые задачи этого пункта интересны не только как простейший способ разобраться в понятии непрерывной функции. Похожие задачи о конкретных, хотя и грубых, оценках, часто возникают и на олимпиадах, и в прикладной математике, и в теоретической математике.

В решении этих задач нельзя пользоваться функциями $\sqrt[n]{x}$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$ etc. без определения этих функций. Поскольку для их определения — например, для доказательства существования такого x, что $x^2 = 2$ — фактически нужно эти задачи решить. Исключение: если функция используется в условии, то ее можно использовать и в решении.

В этом цикле задач не будет необходима строгая теория действительных чисел. Можно пользоваться без доказательства (только) алгебраическими свойствами действительных чисел — в частности, свойствами неравенств — и следующими

принципом Архимеда: для любого вещественного числа есть большее него целое.

принципом вложенных отрезков: пересечение любой последовательности вложенных отрезков непусто.

(Эти принципы можно 'доказать', используя десятичную запись.)

2.1. Найдите хотя бы одно такое N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $a_n > 10^9$, если $a_n =$

(a) $\sqrt{n}$; (b) $n^2 - 3n + 5$; (c) $1,02^n$.

2.2. Неравенство Бернулли. $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ для любых $x \geq -1$ и целого $k \geq 1$.

2.3. Найдите хотя бы одну пару таких a и N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $|a_n - a| < 10^{-8}$, если $a_n =$

(a) $\dfrac{n^2 - n + 28}{n - 2n^2}$; (b) $\sqrt{5 + \dfrac{2}{n}}$; (c) $0,99^n$; (d) $\sqrt[n]{2}$; (e)* $\dfrac{n^9}{2^n}$.

2.4. Найдите хотя бы одну пару таких a и $\delta > 0$, чтобы для любого $x \in (-\delta, \delta)$ было выполнено $|f(x) - a| < 3 \cdot 10^{-9}$, если $f(x) =$

(a) $(x - 3)^3$; (b) 3^{x-3}; (c) $\sin x$; (d) $\dfrac{\sqrt{1 + x^5}}{\cos x - 2}$;

(e) корень уравнения $t^3 - tx + 1$, лежащий на $[-2, 0]$.

3 Непрерывные функции

Пусть $K = [0, 1]$ или $K = [0, 1]^2$. Функция $f : K \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in K$ с условием $|x-y| < \delta$ выполнено $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Здесь $|x-y|$ обозначает обычное евклидово расстояние. (Осторожно, для других множеств K определение непрерывности может быть другим!)

3.1. (a)-(e) Какие из функций задачи 2.4 непрерывны на $[0, 1]$?

Примечание. Аналогично задачам 2.4.a и 3.1.a доказывается непрерывность функции $f(x) = x^n$ для любого целого $n > 0$. Из этого и теоремы о промежуточном значении вытекает, что для любого $a > 0$ существует такое x, что $x^n = a$. Это утверждение позволяет определить функцию $\sqrt[n]{x}$. Аналогично определяются другие обратные функции.

3.2. Какие из следующих функций непрерывны на $[0, 1]^2$?
(a) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; (b) $f(x_1, x_2) = \lfloor x_1 + x_2 \rfloor$.

3.3. (a) Любая непрерывная функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ ограничена, т.е. найдется такая константа M, что $|f(x)| < M$ для всех $x \in [0, 1]$.

(b) Любая непрерывная функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

3.4. Обязательно ли непрерывны
(a) сумма; (b) произведение; (c) композиция;
(d) суперпозиция $f(g(x, y), z)$; (e)* произвольная суперпозиция
непрерывных функций $[0, 1] \to [0, 1]$, $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ (в п. (d)), $[0, 1]^n \to [0, 1]$ (в п. (e))?

3.5. Верно ли, что непрерывная по каждой переменной функция непрерывна? Иными словами, существует ли функция $f\colon [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, не являющаяся непрерывной, у которой все сечения (т.е. функции $f_y\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ и $f_x\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, определенные формулой $f_y(x) := f(x, y)$ и $f_x(y) := f(x, y)$) непрерывны?

Те из приведенных выше (и ниже) задач, решением которых являются контрпримеры, далее не используются. Однако они необходимы для понимания контекста доказательства — чтобы Вы имели представление о том, чем воспользоваться точно не получится.

4 Равномерные пределы

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что для любого $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

4.1. (a) Для каждого $x \in (0, 1)$ найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

(b) Существует ли такое $N > 0$, что для любых $x \in (0, 1)$ и $n > N$ выполнено $|\frac{1}{1-x} - \sum\limits_{k=0}^{n} x^k| < 0.01$?

4.2. Обязательно ли непрерывны

(a) *поточечный предел* последовательности $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ непрерывных функций? Это функция $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ определена, если все эти пределы существуют.

(b) **равномерный предел** последовательности $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ непрерывных функций? Это такая функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое целое N, что для любых $n > N$ и $x \in [0, 1]$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

4.3. (a) Постройте непрерывную сюръективную функцию $f : [0, 1] \to [0, 1]$, постоянную вне некоторого интервала длины 0.01.

(b) Постройте такую бесконечную последовательность непрерывных сюръективных функций $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, что

- $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n}$ для любого $x \in [0, 1]$;

• для каждого n найдется семейство интервалов $I_{n,1}, \dots, I_{n,s_n}$ суммарной длины меньше 2^{-n} такое, что f_n постоянна на каждом отрезке из дополнения $[0,1] - (I_{n,1} \cup \ldots \cup I_{n,s_n})$ до объединения интервалов семейства.

(c) Постройте непрерывную сюръективную функцию $f : [0,1] \to [0,1]$ такую, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется семейство интервалов $I_1, \dots, I_n$ суммарной длины меньше ε такое, что f постоянна на каждом отрезке из дополнения $[0,1] - (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$ до объединения интервалов семейства.

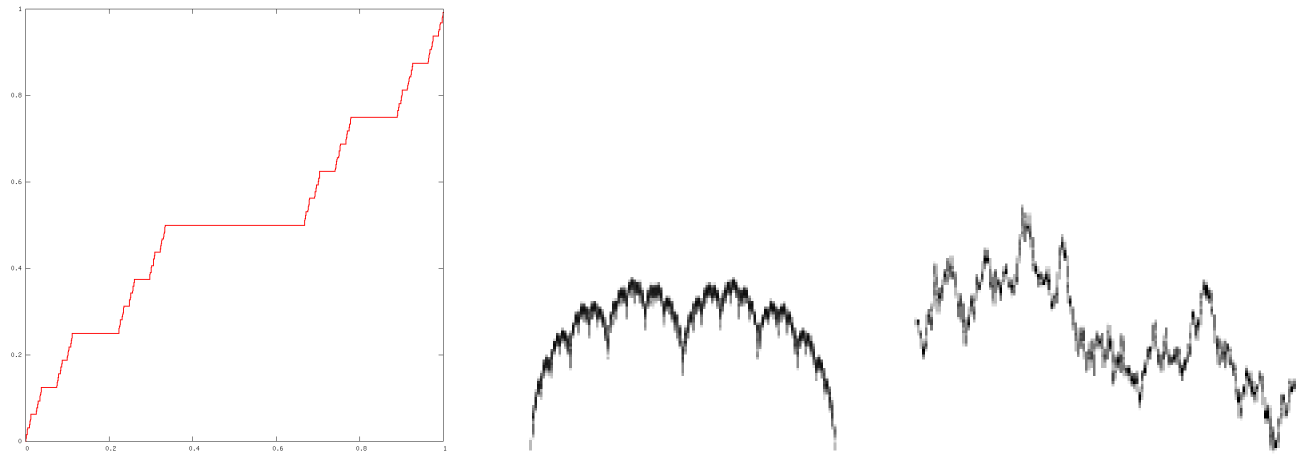


Рис. 1: Канторова лестница, пила Вейерштрасса и броуновское движение

4.4. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число $N > 0$, что для всех $m, n > N$ справедливо неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

(a) Является ли последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ фундаментальной? А последовательность $x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$?

(b) Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

(c) Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

(d) Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

(e) Всякая фундаментальная последовательность имеет конечный предел.

Если используемые в некоторой задаче термины не определены в этом тексте и вам незнакомы, то соответствующую задачу следует просто игнорировать.

4.5. * Существует непрерывная функция $f : [0,1] \to [0,1]$, не *дифференцируемая* ни в одной точке. (Такие примеры встречаются в физике при изучении *броуновского движения*.)

4.6. (a) Если функция $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ является равномерным пределом последовательности функций $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, каждая из которых не зависит от переменной y, то и функция f не зависит от переменной y.

(b)* Обозначим $K := [-1,1]^2 - [-1,0] \times 0$. Существует ли непрерывная функция $f : K \to \mathbb{R}$, *зависящая* от переменной y, но сужение которой на любой круг, лежащий в K, *не зависит* от переменной y?

5 Кривая Пеано

5.1. Предложение на русском языке в соответствии с некоторым правилом вписано в клетки таблицы. Найдите это правило и прочитайте предложение.

5.2. Клетки квадрата $n \times n$ занумерованы натуральными числами от 1 до n^2 так, что соседние числа стоят в соседних клетках. Каждую клетку разбили на 4, получив новое разбиение исходного квадрата на $4n^2$ клеток. Докажите, что существует нумерация клеток нового разбиения такая, что соседние числа стоят в соседних клетках, а в квадрате 2×2, получившимся разбиением клетки исходного разбиения с номером k, стоят числа $4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k$.

5.3. Отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ называется *линейным*, если

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \text{для любых} \quad \lambda \in [0,1],\ x, y \in [a,b].$$

Отображение $f : [0,1] \to [0,1]^2$ называется *кусочно-линейным*, если существуют точки $x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = 1 \in [0,1]$ такие, что f линейно на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

(a) Существует такое кусочно-линейное отображение $F : [0,1] \to [0,1]^2$, что для любой точки $y \in [0,1]^2$, существует такая точка $x \in [0,1]$, что $|y - F(x)| < \frac{1}{100}$.

(b) Кусочно-линейное отображение $F : [0,1] \to [0,1]^2$ называется *$d-$плотным*, если для любой точки $y \in [0,1]^2$ существует такая точка $x \in [0,1]$, что $|y - F(x)| < d$. Докажите, что для любого $d-$плотного отображения F существует такое $d/2-$плотное отображение F^+, что $|F(x) - F^+(x)| < d$ для любого $x \in [0,1]$.

(c) Существует такое непрерывное отображение $F : [0,1] \to [0,1]^2$, что для любой точки $y \in [0,1]^2$ существует $x \in [0,1]$ такой, что $F(x) = y$.

5.4. (a) Пересечение любой последовательности вложенных прямоугольников на плоскости непусто.

(b)-(e) Решите задачи 4.4.(b)-(e) для последовательностей точек плоскости.

Указания, решения и ответы к задачам до промежуточного финиша

1.1. (a) Следует из (b).

(b) Пусть вершины квадрата имеют координаты $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_1), (i_2, j_2)$. Тогда сумма чисел в противоположных вершинах равна $\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \psi_{j_1} + \psi_{j_2}$.

(c) Аналогично (b).

(d) Утверждение верно.

1.2. (a) Докажите, что числа $i + \sqrt{2}j$ различны для разных клеток.

(b) (c) Аналогично (a).

(d) Да, $\varphi_{ik} = 9i + k$, $\psi_{jk} = 9j + k$.

1.3. (a) Докажите, что любой многочлен имеет лишь конечное число корней.

(b) Воспользуйтесь тождеством $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

(c) Рассмотрите многочлен $f(x) = x \sin 1$.

(d) Постройте многочлен, который равен нулю на всех точках из множества $\{0, \frac{1}{9}, \dots, 1\}$, кроме данной.

1.4. (b,c) Получите функции, которые не равны нулю только при одном наборе переменных.

1.6. (a) Используйте задачу 1.7.a.

(c) $\overline{\{x + y\}} = \{ax + by \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a, b \geq 0\}$.

(d) $2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$.

(e) $xy = 2^{\log_2 x + \log_2 y}$.

(f) Используйте задачу 1.7.b.

(g) Используйте задачу 1.3.a.

1.7. (b) Докажите сначала, что множество элементарных суперпозиций над F не более, чем счетно.

1.8. Для каждого $x \in [0, 1]$ обозначим через $0.x_1x_2\dots$ ту десятичную запись числа x для которой нет N такого, что $x_n = 0$ при любом $n > N$.

(a) Используйте десятичную запись. Конкретно, определим

$$\alpha : [0, 1]^2 \to [0, 1] \quad \text{by} \quad \alpha(x, y) := 0, x_1y_1x_2y_2x_3\dots.$$

Тогда α инъективно (но не биективно!).

(b,c,d) При данном $f(x_1, \dots, x_{n+1})$, достаточно найти $g \in F_n$ такую, что

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, \alpha(x_n, x_{n+1})).$$

Заметим, что $\alpha \in F_n$ при $n > 1$.

(e) Аналогично (a) постройте инъекцию $[0, 1]^n \to [0, 1]$.

Или (e) следует из (d) и (b) по индукции.

1.9. (a) $xy = (x + y)^2/4 - (x - y)^2/4$.

(b) $(x + 1)(y + 1) = 2^{\log_2(x+1) + \log_2(y+1)}$.

1.10. (a) следует из (b), (c) следует из (a) и 1.8.d.

(b) Конструкция функции α из решения задачи 1.8.a подходит: определим $\varphi(x) := 0.x_10x_20x_3\dots$. Тогда $\alpha(x, y) = \varphi(x) + 0.1\varphi(y)$.

(d) Определим

$$\varphi(x) := 0.x_1\underbrace{0000\dots0}_{n-1 \text{ нулей}}x_2\underbrace{0000\dots0}_{n-1 \text{ нулей}}x_300\dots$$

Определим $\alpha(x_1, \dots, x_n) := \varphi(x_1) + 0.1\varphi(x_2) + \dots + (0.1)^{n-1}\varphi(x_n)$. Тогда α инъективна. Следовательно, $h \in F_1$ существует для любой $f \in F_n$.

2.1. (b) $n^2 - 3n + 5 > n(n - 3) > n$ при любом $n > 4$.

(c) Воспользуйтесь задачей 2.2.

2.2. Воспользуйтесь индукцией по k.

2.3. (a) $a = -\frac{1}{2}$.

(b) $$\sqrt{5+\frac{2}{n}} - \sqrt{5} = \frac{\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}} + \sqrt{5}\right)}{\sqrt{5+\frac{2}{n}} + \sqrt{5}} = \frac{2}{n\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}} + \sqrt{5}\right)}$$

(c), (d) Положите $a = 0$, $a = 1$ и воспользуйтесь неравенством Бернулли.

(e) Положите $a = 0$ и найдите N такое, что $(n+1)^9/n^9 < 1,5$ при любом $n > N$.

2.4. (a) $|(x-3)^3 + 3^3| = |x((x-3)^2 - 3(x-3) + 3^2)| < 40|x|$ при $|x| < 1$, поскольку справедливы оценки $(x-3)^2 < 16$ и $|3(x-3)| < 12$.

(c) Воспользуйтесь неравенством $\sin x < x$.

(d) Если

$$|f(x) - a| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad x \in (-\delta_1, \delta_1) \quad \text{и} \quad |g(x) - b| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad x \in (-\delta_2, \delta_2),$$

$$\text{то} \quad |f(x) + g(x) - a - b| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in (-\min\{\delta_1, \delta_2\}, \min\{\delta_1, \delta_2\}).$$

То же справедливо с заменой суммы на разность. Аналогичные утверждения справедливы с заменой суммы на произведение или на частное.

3.2. (a) Функция $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ непрерывна.

Можно положить $\delta = \varepsilon$, тогда утверждение следует из неравенства треугольника $|f(z) - f(z_0)| \le |z - z_0|$.

(b) Функция f не является непрерывной.

Для $x = 1$, $y = 0$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ такого δ не существует, т.к. $|f(1,0) - f(1 - \frac{\delta}{2}, 0)| = 1 > \frac{1}{2}$.

3.3. (a) По определению непрерывности (§3) существует такое N, что если $|x - y| < 1/N$, то $|f(x) - f(y)| < 1$. Тогда

$$|f(x)| < 1 + \max\left\{|f(0)|, \left|f\left(\frac{1}{N}\right)\right|, \dots, \left|f\left(\frac{N-1}{N}\right)\right|, |f(1)|\right\}$$

для любого $x \in [0,1]$.

(b) Согласно (a) существует $\sup_{[0,1]} f$. Назовем подмножество $A \subset [0,1]$ *содержательным*, если $\sup_A f = \sup_{[0,1]} f$. Очевидно, что если отрезок $[a,b]$ содержательный, то хотя бы один из отрезков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ также содержательный. Теперь, начиная с отрезка $I_0 = [0,1]$ мы можем построить последовательность $\{I_n\}$ содержательных отрезков, для которой $I_{n+1} \subset I_n$ и $|I_n| = 2^{-n}$ при всех $n > 0$. Тогда f достигает своего максимального значения в точке пересечения $\bigcap_n I_n$ всех этих отрезков.

3.4. (a) Да. Возьмите $\delta = \varepsilon/2$.

(b) Да. По задаче 3.3.a существует такое $C > 0$, что $|f(x)|, |g(x)| < C$ для всех $x \in [0,1]$. Выберем $\delta > 0$ таким, что $\delta^2 + 2\delta C < \varepsilon$.

(c) Да. Покажем, что $f \circ g$ непрерывна. Для начала выберем δ_1 таким, что если $|x - y| < \delta_1$. то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Потом выберем δ таким, что если $|x - y| < \delta$, то $|g(x) - g(y)| < \delta_1$.

(d) Выберем такое $\delta_1 > 0$, что если $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и $|y_1 - y_2| < \delta_1$, то $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Выберем δ_2 таким, что если $|x_1 - x_2| < \delta_2$, то $|g(x_1) - g(x_2)| < \delta_1$. Возьмите $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

(e) Аналогично пункту (d).

3.5. Такая функция существует. Определим $f(x,y) = x/y$ для $x < y$, $f(x,y) = y/x$ для $y \leqslant x \neq 0$, and $f(0,0) = 0$. Эта функция не непрерывная, так как $f(\varepsilon, \varepsilon) - f(0,0) = 1$ для всех $\varepsilon > 0$.

4.1. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, потому что

$$\left|\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k\right| = \frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{(1-x)(1+(1/x-1))^n} < \frac{1}{(1-x)n(1/x-1)}$$

по неравенству Бернулли.

(b) Нет, потому что для любого n существует такое $x \in (0,1)$, что $\dfrac{x^n}{1-x} > 0.5$.

4.2. (a) Возьмем $f_n(x) = x^n$. Тогда $f(x) = 0$ для $x < 1$ и $f(1) = 1$.

(b) Да. Для каждого $\varepsilon > 0$ возьмем N такое, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для любого $n \geq N$. Выберем δ таким, что $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$. Тогда $|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$ при $|x - y| < \delta$.

4.3. (a) Положим $f(0) = f(0.99) = 0$, $f(1) = 1$. Доопределим f на $[0,1]$ кусочно-линейно.

(b) Постройте последовательность таких семейств отрезков I_k^i и кусочно-линейных функций $\{f_k\}$, что f_k — кусочно-линейная с 2^k+1 отрезками линейности I_k^i, постоянна на каждом нечетном отрезке I_k^{2i+1} и возрастает на каждом четном отрезке I_k^{2i}.

Возьмем f_1 линейной на отрезках $I_1^1 := [0, 0.499]$, $I_1^2 := [0.499, 0.501]$, $I_1^3 := [0.501, 1]$; $f(0) = f(0.499) = 0$, $f(0.501) = f(1) = 1$.

Определим I_{k+1}^i и f_{k+1} индуктивно. Если f_k постоянна на I_k^{2i+1}, то $I_{k+1}^{4i+1} := I_k^{2i+1}$ и $f_{k+1} := f_k$ на I_{k+1}^{4i+1}. Если f_k возрастает на $I_k^{2i} =: [t_1, t_2]$, то $f_{k+1}(x) := \dfrac{f(t_1) + f(t_2)}{2}$ для любого $x \in I_{k+1}^{4i-1} := [\dfrac{2t_1 + t_2}{3}, \dfrac{t_1 + 2t_2}{3}]$, и f_{k+1} линейна на отрезках $I_{k+1}^{4i-2} := [t_1, \dfrac{2t_1 + t_2}{3}]$ и $I_{k+1}^{4i} := [\dfrac{2t_1 + t_2}{3}, t_2]$.

(c) Для каждого $x \in [0,1]$ последовательность $\{f_k(x)\}$ ограничена. Из принципа вложенных отрезков следует, что у этой последовательности есть *предельная точка* — такое число $f(x)$, что для любых N и ε есть такой индекс $n > N$, что $f_n(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Эта функция $f(x)$ будет равномерным пределом последовательности $\{f_n\}$.

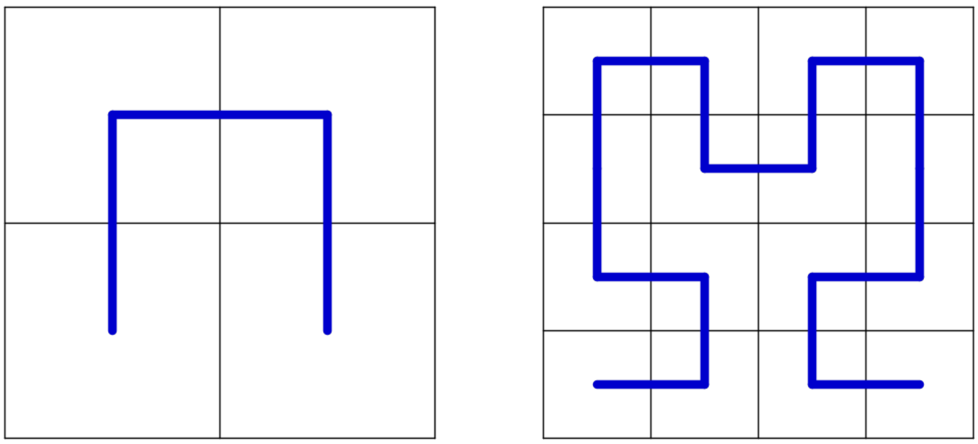
Другое доказательство — использование троичной записи.

4.5. Например, *пила Вейерштрасса* $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(13^n \pi x)$, см. рис. 1.

Другое доказательство — использование теоремы Бэра.

5.1. Текст читается вдоль кривой, придуманной итальянским математиком Пеано.

5.2.



5.3. (a) Постройте требуемое отображение как 'нумерацию' клеток достаточно мелкого разбиения квадрата $[0,1]^2$ на n^2 клеток.

(b) Образ $F[0,1]$ отображения F – ломаная. Постройте F^+ так, чтобы его образ получался из $F[0,1]$ заменой каждого звена ломаной на ломаную, $d/2-$ плотную в d-окрестности этого звена.

(c) Постройте требуемое отображение как равномерный предел отображений, построенных в предыдущем пункте.

5.4. (a) Рассмотрите последовательность $a_i = (x_i, y_i)$ центров прямоугольников. Докажите, что любая ограниченная последовательность точек имеет *предельную точку*. Любая предельная точка последовательности a_i принадлежит каждому прямоугольнику.

6 Вывод теоремы Колмогорова из аппроксимативной версии

Наша цель — показать, что произвольная *непрерывная* функция от нескольких переменных представима в виде композиции *непрерывных* функций одного переменного и операции сложения. Займемся функциями двух переменных, заданными на единичном квадрате.

Хотя утверждение теоремы Колмогорова 1.11 формально не содержит предельного перехода, оно несложно сводится к аппроксимации произвольной непрерывной функции непрерывными функциями специального вида. Точнее, к аппроксимативной теореме Колмогорова 6.2.c. Благодаря последней произвольная непрерывная функция представляется в виде ряда, слагаемые которого имеют требуемый в теореме Колмогорова 1.11.b вид, а затем оказывается, что ряд можно сгруппировать.

Теперь мы переходим собственно к доказательству теоремы Колмогорова 1.11.b. Мы следуем доказательству, предложенному в работе [Ka] (см. также [He]) и основанному на сочетании оригинальных идей Колмогорова и теоремы Бэра.

Напомним, что $I := [0,1]$ и $I^2 := [0,1] \times [0,1]$.

Колмогоровским набором для функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$ называется набор непрерывных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_5 : I \to I$, $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, для которого при любых $x, y \in I$ выполнено

$$f(x,y) = h\left(\varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_1(y)\right) + \ldots + h\left(\varphi_5(x) + \sqrt{2}\varphi_5(y)\right).$$

6.1. Предъявите явно колмогоровский набор для функции $f(x,y) = x + \sqrt{2}y + 3$.

Мы не знаем явно заданного колмогоровского набора даже для таких простых функций, как сложение и умножение.

Пусть $f : I^2 \to \mathbb{R}$ — функция. Обозначим $|f| := \max_{z \in I^2} |f(z)|$. **Колмогоровским набором для f и числа** λ называется набор непрерывных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to I$, $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, для которого $|h| \le 2(1-\lambda)|f|$ и при любых $x, y \in I$ выполнено

$$\left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right) \right| \le \lambda |f|.$$

6.2. (a) Укажите колмогоровский набор для $f(x,y) = xy$ и $\lambda = 1/2$.

(b)* Для всякой непрерывной функции f и $\lambda = 5/6$ найдется колмогоровский набор.

(c)* **Аппроксимативная теорема Колмогорова.** *Существуют непрерывные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to \mathbb{R}$ такие, что для любой непрерывной функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$ и сколь угодно малого $\lambda > 0$ найдется функция $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, для которой набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h$ колмогоровский для f, λ.*

Доказать результаты (b,c) непросто, см. §7-§9. Сначала применим их.

Аппроксимативная теорема Колмогорова 6.2.c позволяет *приближать* всякую непрерывную функцию линейной комбинацией функций вида $h(\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y))$. Более того, 'внутренняя' функция φ не зависит от функции f. Именно это позволяет получить нужное представление (т.е. колмогоровский набор для f), сгруппировать слагаемые в некотором ряде, который естественно строится по колмогоровским наборам для f, λ.

6.3. Пусть набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h$ колмогоровский для f, λ, и

$$f_1(x,y) := f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right).$$

(a) Пусть набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h_1$ колмогоровский для f_1, λ. Тогда набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h + h_1$ колмогоровский для f, λ^2.

(b) Выведите аппроксимативную теорему Колмогорова из аналогичного ей утверждения, полученного заменой 'сколь угодно малого $\lambda > 0$' на '$\lambda = 5/6$'. Указание: $|f_1| \le \lambda |f|$.

(c) Выведите теорему Колмогорова 1.11.b из аппроксимативной теоремы Колмогорова.

7 Лемма об аппроксимации предколмогоровскими наборами

Предколмогоровским набором для функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$ называется упорядоченный набор непрерывных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_5 : I \to \mathbb{R}$, для которого существуют непрерывная функция $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$, вместе с $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ образующая колмогоровский набор для f и $\lambda = 5/6$.

Аппроксимативная теорема Колмогорова 6.2.c 'для $\lambda = 5/6$' утверждает существование набора $\varphi_1, \ldots, \varphi_5 : I \to \mathbb{R}$, являющегося предколмогоровским для любой непрерывной функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$. Такой набор будет построен также при помощи аппроксимации, или итерационного процесса (а формально — при помощи теоремы Бэра, см. §12).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — подмножество. Функции $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ называются **ε-близкими**, если $|\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ при любом $x \in M$. Упорядоченные наборы $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5)$ и $(\psi_1, \ldots, \psi_5)$ функций $M \to \mathbb{R}$ называются **ε-близкими**, если φ_k, ψ_k являются ε-близкими при любом $k = 1, \ldots, 5$.

7.1. * (a) **Лемма об устойчивости предколмогоровости.** Если $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5)$ предколмогоровский набор для функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ любой ε-близкий к $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5)$ набор также предколмогоровский для f.

(Иными словами, множество $PK(f)$ всех предколмогоровских наборов для f открыто в пространстве $C(I^2)^5$ упорядоченных пятерок непрерывных функций $I^2 \to \mathbb{R}$.)

(b) **Лемма об аппроксимации предколмогоровскими наборами.** Для любых $\varepsilon > 0$ и непрерывных функций $f : I^2 \to \mathbb{R}$, $\psi_1, \ldots, \psi_5 : I \to \mathbb{R}$, существует ε-близкий к $(\psi_1, \ldots, \psi_5)$ предколмогоровский набор для f.

(Иными словами, $PK(f)$ всюду плотно в $C(I^2)^5$.) Указания см. в §8.

8 Доказательство леммы об аппроксимации предколмогоровскими наборами

8.1. (a) Для любых чисел $\psi_1, \ldots, \psi_8 \in I$ существуют такие числа $\varphi_1, \ldots, \varphi_8 \in I$, что

• $|\psi_i - \varphi_i| < 0.01$ для любого $i = 1, \ldots, 8$.

• для любой расстановки чисел в клетках шахматной доски существует такая непрерывная функция $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$, что число в клетке (i, j) равно $h(\varphi_i + \sqrt{2}\varphi_j)$.

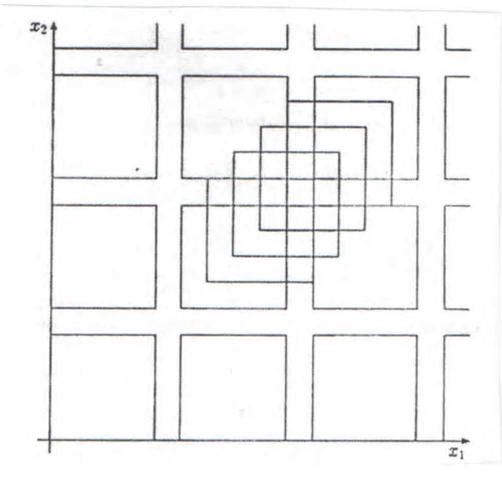
(b) Для любых чисел $\psi_{i,k} \in I$, $i, k = 1, \ldots, 8$, существуют такие числа $\varphi_{i,k} \in I$, $i, k = 1, \ldots, 8$, что

• $|\psi_{i,k} - \varphi_{i,k}| < 0.01$ для любых $i, k = 1, \ldots, 8$.

• для любой расстановки чисел в клетках кубика $8 \times 8 \times 8$ существует такая непрерывная функция $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$, что число в клетке (i, j, k) равно $h(\varphi_{i,k} + \sqrt{2}\varphi_{j,k})$.

8.2. (a) Для любой точки $x \in \mathbb{R}$ и для всех $k = 1, \ldots 5$, кроме *не более, чем одного*, существует такое $j \in \mathbb{Z}$, что x лежит в отрезке $4I + 5j + k := [5j + k, 4 + 5j + k]$.

(b) Для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и для всех $k = 1, \ldots 5$, кроме *не более, чем двух*, существуют такие $i, j \in \mathbb{Z}$, что (x, y) лежит в квадрате $(4I + 5i + k) \times (4I + 5j + k)$.



Приведем наглядную интерпретацию. Для каждого $k = 1, \dots, 5$ изобразим на плоскости указанные квадраты. Получим план k-го города с *кварталами* (квадратами) и *улицами* (промежутками между квадратами). Наложим друг на друга планы пяти городов. Всякая точка плоскости лежит внутри квартала хотя бы для трех таких карт.

(a',b') Сформулируйте и докажите аналог пунктов (a,b) с заменой 5 на произвольное целое положительное число.

Функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *рационально разделяет* данное семейство попарно непересекающихся отрезков на прямой, если она непрерывна, постоянна на каждом отрезке семейства, принимает на нем рациональное значение, причем на разных отрезках разные значения.

8.3. Если функция $\psi : I \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\varepsilon > 0$, то найдутся целое $N > 0$ и функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$, которая ε-близка к ψ и

(a) постоянна на каждом полуинтервале $\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right)$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

(b) непрерывна и линейна на каждом отрезке $\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

(c) рационально разделяет семейство отрезков $\frac{4I+5j}{N} := \left[\frac{5j}{N}, \frac{4+5j}{N}\right]$, $j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}$.

Функция $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}$ *разделяет* данное семейство попарно непересекающихся квадратов на плоскости, если она непрерывна, постоянна на каждом квадрате семейства, и на разных квадратах принимает разные значения.

8.4. Пусть функция $\varphi : [0, 1000] \to \mathbb{R}$ рационально разделяет семейство отрезков $4I + 5j := [5j, 4 + 5j]$, $j \in \{1, \dots, 100\}$. (Определение аналогично случаю $\varphi : I \to \mathbb{R}$.)

(a) Функция $\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y)$ разделяет семейство квадратов $(4I + 5i) \times (4I + 5j)$, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$. (Определение аналогично случаю $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}$.)

(b) Для любого набора $v_{i,j}$ чисел, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$, существует непрерывная функция $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$, для которой

- $|h(x)| \le \max_{i,j} |v_{ij}|$ при любом $x \in [0, 3]$.
- $h(\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y)) = v_{i,j}$ при любых $i, j \in \{1, \dots, 100\}$, $x \in 4I + 5i$, $y \in 4I + 5j$.

8.5. Пусть для каждого $k \in \{1, \dots, 5\}$ функция $\varphi_k : [0, 1000] \to I$ рационально разделяет семейство отрезков $4I + 5j + k := [5j + k, 4 + 5j + k]$, $j \in \{1, \dots, 100\}$, причем числа $\varphi_k(5j + k)$ различны для различных пар (j, k). Тогда для любого набора $v_{k,i,j}$ чисел, $k \in \{1, \dots, 5\}$, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$, существует непрерывная функция $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$, для которой $h(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)) = v_{k,i,j}$ при любых

$$k \in \{1, \dots, 5\}, \quad i, j \in \{1, \dots, 100\}, \quad x \in 4I + 5i, \quad y \in 4I + 5j.$$

8.6. Пусть $f : I^2 \to \mathbb{R}$ — функция. Выберем целое $N > 0$, $N \equiv 4 \mod 5$, для которого

$$|f(z) - f(z')| < \frac{|f|}{6} \quad \text{для любых} \quad i, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}, \quad z, z' \in \frac{4I+5i}{N} \times \frac{4I+5j}{N}.$$

Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to I$ разделяют семейство отрезков $\frac{4I+5j}{N}$, $j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}$.

(a) Если $h : [0, 3] \to \left[-\frac{|f|}{3}, \frac{|f|}{3}\right]$ непрерывная функция и

$$h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right) = \frac{1}{3} f\left(\frac{5i+k}{N}, \frac{5j+k}{N}\right) \quad \text{для любых}$$

$$k = 1, \dots, 5, \quad i, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}, \quad x \in \frac{4I+5i}{N}, \quad y \in \frac{4I+5j}{N},$$

то набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h$ является 5/6-колмогоровским для f.

(b) Набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ является предколмогоровским для f.

13Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ФУНКЦИЙ

Указания, решения и ответы к задачам после промежуточного финиша

Для функции $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ обозначим

$$\widetilde{\varphi}(x,y) := \varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y) \quad \text{и} \quad z = (x,y).$$

6.1. Возьмем $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \varphi_3(x) = \varphi_4(x) = \varphi_5(x) = 0$, $h(x) = x + \frac{3}{5}$.

6.2. (b,c) Следует из утверждений 9.1.b и 9.2.ac.

6.3. (b) Имеем $|h + h_1| < 2|f|(1 - \lambda + \lambda(1-\lambda)) = 2|f|(1-\lambda^2)$ и

$$\left|f(z) - \sum_{k=1}^{5}(h+h_1)(\widetilde{\varphi}_k(z))\right| = \left|f_1(z) - \sum_{k=1}^{5} h_1(\widetilde{\varphi}_k(z))\right| \le \lambda|f_1| \le \lambda^2|f|.$$

(c) Продолжая процедуру из (b), получаем аппроксимационную теорему Колмогорова для $\lambda = (5/6)^{2^n}$.

(d) Продолжая процедуру из (b), строим последовательность функций $h_n : [0,3] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\left|f - \sum_{k=1}^{5}(h_0 + h_1 + \ldots + h_n)(\widetilde{\varphi}_k(z))\right| \le \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}|f| \quad \text{и} \quad |h_n| \le \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}|f|$$

для любого n. Ввиду второго неравенства ряд $\sum_n h_n$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции h. Устремляя $n \to \infty$ в первом неравенстве, получаем $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{5} h(\widetilde{\varphi}_k(z))$.

7.1. (b) Используя утверждение 8.3.c, найдем достаточно большое $N \equiv 4 \mod 5$ и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ такие, что для каждого k функция φ_k мало отличается от ψ_k и разделяет семейства отрезков

$$\frac{4I + 5j + k}{N}, \quad j = 1, \ldots, \frac{N-4}{5}.$$

Аналогично утверждению 8.5 найдем непрерывную функцию $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ так, что

$$h(\widetilde{\varphi}_k(x,y)) = \frac{1}{3} f\left(\frac{5i+k}{N}, \frac{5j+k}{N}\right)$$

при любых

$$k = 1, \ldots, 5, \quad i, j = 1, \ldots, \frac{N-4}{5}, \quad x \in \frac{4I + 5i + k}{N}, \quad y \in \frac{4I + 5j + k}{N}.$$

Увеличивая N (т. е. уменьшая квадраты) можно добиться выполнения условия задачи 8.6. Теперь лемма вытекает из утверждения 8.6.b.

8.1. (a) Положим $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ попарно различными рациональными числами, 0.01-близкими к $\psi_1, \ldots, \psi_8$ (т.е. $|\psi_i - \varphi_i| < 0.01$ для всех i). Если для рациональных p, q, s, t выполнено $p + \sqrt{2}q = s + \sqrt{2}t$, то $p = s$ и $q = t$. Тогда $\varphi_i + \sqrt{2}\varphi_j$ — различные числа при разных (i,j). Определим $h(\varphi_i + \sqrt{2}\varphi_j)$ как число в клетке (i,j), и продолжим h кусочно-линейно на $\mathbb{R}$.

(b) Пусть $\varphi_{i,k}$ таковы, что $|\psi_{i,k} - \varphi_{i,k}| < \varepsilon$. Тогда из равенства $\varphi_{i,k} + \sqrt{2}\varphi_{j,k} = \varphi_{s,m} + \sqrt{2}\varphi_{t,m}$ следует, что $(i,k) = (s,m)$ и $(j,k) = (t,m)$, а значит $(i,j,k) = (s,t,m)$.

8.2. (a) Положим $m = [x/5]$ и $r = [x] \bmod 5$. Тогда $x \in [5m + r, 5m + r + 1)$. Значит, $x \in [5m + (r - s), 5m + (r - s + 4)]$ для любого $s \in \{0,1,2,3\}$.

(b) Следует из (a).

8.3. (c) Выберем N таким, что для всех $x, y \in I$ неравенство $|x-y| < 5/N$ влечет $|\psi(x)-\psi(y)| < \varepsilon/4$. Пусть q_j, $j \in \mathbb{Z}$ — попарно различные рациональные числа такие, что $|q_j - \psi(x)| < \varepsilon/3$ для всех $j \in \left\{0, 1, \dots, \dfrac{N-4}{5}\right\}$ и $x \in \dfrac{4I+5j}{N}$. Определим $\varphi(x) = q_j$ при $x \in \dfrac{4I+5j}{N}$, и продолжим φ кусочно-линейно на I. Тогда $|\psi(x)-\varphi(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in I$.

8.4. (b) Обозначим через $\alpha_{i,j} := \varphi_i(x) + \sqrt{2}\varphi_j(y)$ для некоторых $x \in 4I+5i$ и $y \in 4I+5j$. Если $\alpha_{i,j} = \alpha_{k,l}$, то $(i,j) = (k,l)$. Определим $h(\alpha_{i,j}) = v_{i,j}$, и продолжим h кусочно-линейно на $\mathbb{R}$.

8.5. Аналогично 8.4.b.

8.6. (b) Следует из (a).

9 Вывод аппроксимативной версии из леммы об аппроксимации

Для $M \in \{I, I^2\}$ обозначим через $C(M)$ множество непрерывных функций $M \to \mathbb{R}$.

9.1. (a) В $C(I)$ имеется счетное всюду плотное множество функций

(b) В $C(I^2)$ имеется счетное всюду плотное множество функций.

9.2. Пусть $f_l : I^2 \to \mathbb{R}$ — всюду плотный в $C(I^2)$ набор функций.

(a) Каждый набор из $\bigcap_{l=1}^{\infty} PK(f_l)$ является предколмогоровским для любой непрерывной функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Для пространства $C(I^2)^5$ справедлив принцип вложенных шаров — и, как следствие, теорема Бэра (§12). (Т.е. $C(I^2)^5$ — *полное метрическое пространство*.)

(c) $\bigcap_{l=1}^{\infty} PK(f_l) \neq \emptyset$. (Указание: примените теорему Бэра.)

Список литературы

[Ar57] *В.И. Арнольд,* О представимости функций двух переменных в виде $\chi(\varphi(x) + \psi(y))$. УМН, 1957, т.12, в. 2(74), с. 119–121.

[Ar58] *В. И. Арнольд,* О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных, Мат. Просвещение, Сер. 2, вып. 3, (1958), 41–61. `http://ilib.mccme.ru/djvu/mp2/mp2-3.htm`

[BB] *W. Blaschke und L. Bol,* Geometrie der Gewebe. Berlin, 1938.

[Bu] A.R. Butz, Space filling curves and mathematical programming, Information and Control, 12:4 (1968) 314-330,
`http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019995868903677`

[FG] *Z. Feng, P. Gartside,* On Hilbert's 13th Problem, `http://arxiv.org/abs/0909.4561`

[He] *T.Hedberg,* The Kolmogorov superposition theorem, Appendix II to H.S. Shapiro, Topics in Approximation Theory. Lecture Notes in Math., 1971, V. 187, P. 267–275.

[Ka] *J.-P. Kahane,* Sur le theoreme de superposition de Kolmogorov, J. Approximation Theory 13 (1975), 229-234.

[KF] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[Ox] *J. Oxtoby,* Measure and category, Springer, 1971. Рус. перевод: *Дж. Окстоби.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.

[Re] *I. Reshetnikov,* Decomposition of number arrangements in the cube, in Russian.
`https://arxiv.org/abs/1412.8078`

[Sk10] *А. Скопенков*, Базисные вложения и 13-я проблема Гильберта, Мат. Просвещение, 14 (2010), 143–174. `http://arxiv.org/abs/1001.4011` Abridged English translation: `http://arxiv.org/abs/1003.1586`

[Sk12] *А. Скопенков,* Объемлемая однородность, МЦНМО, Москва, 2012, `http://arxiv.org/abs/1003.5278`

[Th] *G. Thomsen,* Un theoreme topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica sulle superficie isotermo-asintotiche. Bull. Un. Mat. Ital. Bologna, 1927, V. 6, P. 80–85.

[VK] *И.А. Вайнштейн и М.А. Крейнес,* О последовательностях функций вида $f(X(x) + Y(y))$. УМН, 1960, т.15, в. 4(94), с. 123–128.

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. Изд-во МЦНМО, 2016. `http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf`

ЗАДАЧИ ЗАОЧНОГО КОНКУРСА

К заочному конкурсу относятся также те из вышеприведенных задачи, к которым не приведено полных решений (даже если приведены указания).

Для решения следующих задач полезно прорешать §§1-§3, но не требуется прорешивать другие параграфы.

10 Суперпозиции и кривая Пеано

10.1. (c) Множество $\overline{F}$ — минимальное по включению множество, содержащее F и переменные, 'замкнутое' относительно операции элементарной суперпозиции.

(d)* Пусть $g_1, g_2, \dots$ — бесконечная последовательность функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажите, что существует конечный набор функций F такой, что что все функции $g_1, g_2, \dots$ являются суперпозициями функций из F. (Московская математическая олимпиада.)

10.2. (c) Обозначим через $f[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ образ отрезка $[0,1]$ при непрерывном отображении $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Докажите, что любая непрерывная функция $g : f[0,1] \to \mathbb{R}$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений.

(d) **Теорема о промежуточном значении.** Для непрерывной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и чисел $0 \le a < b \le 1$, если $f(a) > 0 > f(b)$, то существует такое $c \in (a,b)$, что $f(c) = 0$.

(e) Обязательно ли непрерывна функция $f : [0,1] \to [0,1]$, обратная к строго монотонной непрерывной?

(b) Существуют ли функции $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 : [0,1] \to [0,1]$ и $h : [0,2] \to [0,1]$, для которых при любых $x, y \in [0,1]$ выполнено $xy = h\left(\varphi_1(x) + \psi_1(y)\right) + h\left(\varphi_2(x) + \psi_2(y)\right)$?

(b) No. Suppose that such functions exist. Since h is a nonnegative function, $h(\varphi_1(x) + \psi_1(y)) = 0$ if $xy = 0$. Hence $h = 0$ on some neighborhood (or semi-neighborhood) of $\varphi_1(0)+\psi_1(0)$. Then for some $\varepsilon > 0$ we have $h(\varphi_1(x) + \psi_1(y)) = 0$ whenever $0 < x, y < \varepsilon$. И шо???

10.3. Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле по одному разу и сделать

(a) наименьшее число поворотов? (б) наибольшее число поворотов?

10.4. Клетки квадрата $n \times n$ занумеровали числами от 1 до n^2 так, что соседние числа находятся в соседних по сторонам клетках. Докажите, что найдутся два числа в соседних клетках, отличающиеся больше, чем на $n/2$.

11 Представимость простейшими суперпозициями

Здесь мы обсудим приближение непрерывной на квадрате функции функциями вида $\varphi(x)+\psi(y)$ и $h(\varphi(x) + \psi(y))$. Формально, этот пункт не используется в дальнейшем.

11.1. Функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ называется **базисной**, если существуют непрерывные функции $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, для которых при любых $x, y \in [0,1]$ выполнено

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

(a) Является ли базисной функция $f(x,y) = xy$?

(b) Если функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ базисна, то для любых точек A, B, C, D, являющихся (в этом порядке) вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, $f(A) + f(C) = f(B) + f(D)$.

(c) Опишите все базисные функции.

(d) Линия уровня любой базисной функции не содержится в множестве $u^{-1}(1, 5/4)$, где

$$u(x,y) := (x+y)^2 + \frac{(x-y)^2}{4}.$$

(e)* Равномерный предел последовательности базисных функций базисный.

11.2. * (a) Расстановку чисел в клетках куба $8\times8\times8$ назовем *базисной*, если существуют такие числа $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$, $i = 1, \dots, 8$, что число в каждой клетке (i, j, k) равно $\varphi_i + \psi_j + \theta_k$.

Опишите все базисные расстановки. (Здесь «описать» означает найти «красивый» критерий базисности, или «быстрый» алгоритм проверки базисности.)

(b) Функцию $f : I^3 \to \mathbb{R}$ назовем *базисной*, если существуют такие непрерывные функции $\varphi, \psi, \theta : [0,1] \to \mathbb{R}$, что при любых $x, y \in [0,1]$ выполнено $f(x,y,z) = \varphi(x) + \psi(y) + \theta(z)$.

Опишите все базисные функции.

Функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ (двух переменных) называется **пробазисной**, если существуют непрерывные функции $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ и $h : [0,2] \to \mathbb{R}$, для которых при любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(x,y) = h(\varphi(x) + \psi(y)).$$

11.3. (a) Является ли пробазисной функция $f(x,y) = (x+1)(y+1)$?

(b)* Является ли пробазисной функция $f(x,y) = xy$?

(c) Функция $f : I^2 \to [0,1]$, $f(x,y) = xy$, является равномерным пределом последовательности пробазисных функций.

11.4. (a) Если три вершины квадрата со сторонами, параллельными осям координат, лежат на одной линии уровня пробазисной функции, то и четвертая вершина лежит на этой линии уровня.

(b) Любая пробазисная функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ *молниеносна*, т.е. $f(A) = f(F)$ для любого шестиугольника $ABCDEF$, у которого

- вершины A и B, C и F, D и E имеют одинаковые абсциссы,
- вершины A и D, B и C, F и E имеют одинаковые ординаты,
- $f(B) = f(E)$ и $f(C) = f(D)$.

(c)* **Теорема Г.Томсена.** [Th], [BB], [VK] *Непрерывная и монотонная по каждому аргументу функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ является пробазисной (т.е. представима в виде $h(\varphi(x) + \psi(y))$, где h, ψ, φ – непрерывные функции), тогда и только тогда, когда она молниеносна (см. задачу 11.1.b).*

(d)* Если функция $f : [-2,2]^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна и $f^{-1}(0) = u^{-1}(1) \cap [-2,2]^2$, то найдется число $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что для всякой пробазисной функции $g : [-2,2]^2 \to \mathbb{R}$ и некоторых $x, y \in [-2,2]$ выполнено неравенство $|f(x,y) - g(x,y)| > \delta$.

(e) Существует непрерывная функция $f : [-2,2]^2 \to \mathbb{R}$ такая, что $f^{-1}(0) = u^{-1}(1) \cap [-2,2]^2$.

Существуют непрерывные функции $f(x,y)$, которые нельзя приблизить функциями вида $h(\varphi(x) + \psi(y))$ (т.е. пробазисными), см. задачу 11.4.de. Если же допустить *конечные линейные комбинации* функций $h(\varphi(x) + \psi(y))$, то возможно и приблизить, и даже представить, произвольную непрерывную функцию, см. теорему Колмогорова 1.11.b.

12 Принцип вложенных отрезков, или примени теорему Бэра о категории

Этот цикл задач посвящен теореме Бэра о категории — мощному средству доказательства теорем существования в анализе и топологии. С помощью нее удобно доказывать, например, теорему Колмогорова о суперпозициях. См. подробнее [KF, Ox], [Sk12, §2].

Здесь можно пользоваться без доказательства принципом вложенных отрезков.

12.1. (a) Пусть объединение открытых интервалов $U \subset \mathbb{R}$ неограничено. Докажите, что существует такое x, что $nx \in U$ для бесконечно большого количества целых n. (Задача предлагалась на летних сборы команды СССР на международную олимпиаду в 1989.)

(b)* Дана бесконечно дифференцируемая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем для любого x существует такое целое N_x, что $f^{(n)}(x) = 0$ для любого $n > N_x$. Докажите, что f — многочлен.

Напомним, что подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется

- *открытым*, если для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$;
- *всюду плотным*, если для любых $a, b \in \mathbb{R}$ пересечение $(a,b) \cap U$ непусто.

12.2. (a) На прямой имеется счетное всюду плотное множество точек.

(b) На плоскости имеется счетное всюду плотное множество точек U (т.е. для любого круга $K \subset \mathbb{R}^2$ пересечение $K \cap U$ непусто).

12.3. (a) **Теорема Бэра о категории**. *Пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств прямой является всюду плотным (и, в частности, непустым).*

(b) Если прямая $\mathbb{R}$ является объединением не более чем счетного набора замкнутых множеств, то хотя бы одно из них имеет внутреннюю точку.

(c) Прямая $\mathbb{R}$ не является счетным множеством.

(d) Множество иррациональных чисел не являются объединением счетного набора замкнутых множеств.

12.4. Если функция $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ двух переменных непрерывна по каждой переменной, то она имеет точку непрерывности. (Ср. с задачей 3.5.)

12.5. (a) Не существует функции, множество точек разрыва которой совпадает с множеством иррациональных чисел.

(b) Поточечный предел последовательности $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывных функций (т. е. функция $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$) имеет точку непрерывности.

(c) Производная любой дифференцируемой функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет точку непрерывности.

12.6. Прямая не представима в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых отрезков, каждый из которых отличен от точки.

12.7. (a) Существует непрерывное инъективное отображение *ожерелья Антуана* (см. википедию) в прямую $\mathbb{R}$.

(b)* Дано замкнутое ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{R}^2$. Известно, что для любых двух точек $x, y \in A$ существует разбиение $A = X \sqcup Y$ на замкнутые множества, для которого $x \in X$ и $y \in Y$ (такие множества A называются *нульмерными*). Докажите, что существует непрерывное инъективное отображение (т. е. *вложение* или реализация) $a\colon A \to \mathbb{R}$.