

Распространение слухов

Задачу представляют: Бурсиан О., Кохась К., Куюмжиян К., Челноков Г.

1 Задача о сплетниках

Есть n сплетников ($n > 3$). Каждый узнал по одному новому слуху, неизвестному другим. Созволившись, двое рассказывают друг другу все известные им слухи. Сплетники хотят добиться того, чтобы каждый из них узнал все имеющиеся слухи. Последовательность звонков, которая позволяет этого добиться, называется *способом оповещения*.

В этих задачах мы пытаемся выяснить, какое наименьшее число звонков может быть в способе оповещения при каждом n . Способ оповещения с таким количеством звонков назовем *наибыстрейшим*. Вполне может быть, что имеется несколько различных *наибыстрейших* способов.

1.1. Какое наименьшее число звонков потребуется четверем сплетникам?

1.2. Докажите, что если все звонки какого-нибудь способа оповещения проделать в обратном порядке, снова получится способ оповещения.

1.3. Докажите, что существует способ оповещения, состоящий из $2n - 4$ звонков.

Допустим, что n сплетников придумали способ оповещения, требующий $2n - 5$ звонков или даже еще меньше. Выберем самое маленькое n , при котором существует такой способ оповещения. Такое число n будем называть *интересным*, а *наибыстрейший* способ оповещения при таком n назовем *сверхбыстрым*. В следующих задачах изучаются свойства *сверхбыстрого* способа оповещения.

1.4. Пусть n — интересное число. Докажите, что в *сверхбыстром* способе оповещения никакие два сплетника A и B не говорили друг с другом по телефону дважды.

1.5. Пусть n — интересное число. Сплетники стали звонить друг другу. В какой-то момент сплетник A позвонил сплетнику B , чуть позже B позвонил C , а еще позднее C позвонил A . Докажите, что сплетники использовали не *сверхбыстрый* способ оповещения.

1.6. Сплетники звонят по *сверхбыстрому* способу оповещения. В какой-то момент сплетник A позвонил в сплетнику B . Оказалось, что этот звонок был для сплетника A последним. Докажите, что для сплетника B этот звонок тоже был последним.

1.7. Докажите, что если в соответствии со *сверхбыстрым* способом сплетник A звонит сплетнику B , то непосредственно перед звонком эти сплетники не знали ни одного общего слуха.

1.8. Докажите, что *сверхбыстрый* способ оповещения содержит не менее $2n - 5$ звонков.

1.9. Докажите, что при *сверхбыстром* способе оповещения каждый сплетник сделал не менее трех звонков.

1.10. Докажите, что при каждом n *наибыстрейший* способ содержит $2n - 4$ звонков.

2 Необязательные сплетники

Пусть n сплетников не все знакомы друг с другом, а по телефону общаются только со знакомыми. При этом схема знакомств сплетников представляет собой связный граф F . Цель сплетников прежняя — чтобы все узнали все слухи за наименьшее число звонков.

Когда сплетники сделали несколько звонков, мы можем построить *граф звонков* G : вершины графа — это сплетники, а ребра — звонки (в частности, могут появиться кратные ребра). Что касается порядка, в котором совершались звонки, эта информация в графе G «утрачена». Чтобы восстановить хронологический порядок звонков, мы можем снабжать ребра дополнительными метками.

2.1. Докажите, что для любого связного графа F *наибыстрейший* способ содержит $2n - 3$ или $2n - 4$ звонка.

2.2. Докажите, что если в графе F содержится цикл C_4 , то *наибыстрейший* способ содержит $2n - 4$ звонка.

2.3. Докажите, что если граф F содержит единственный цикл C_k ($k \neq 4$), то наиболее быстрый способ содержит $2n - 3$ звонка.

2.4. Докажите, что если граф F не содержит цикла C_4 , то наиболее быстрый способ содержит $2n - 3$ звонка.

Пусть схема знакомств сплетников представляет собой связный граф F , но теперь сплетники используют вместо телефона телеграф, т. е. время от времени сплетники посылают друг другу телеграммы, содержащие все известные отправителю сплетни.

2.5. Какое наименьшее число телеграмм понадобится?

2.6. Рассмотрим «экономный» способ оповещения, который избегает дублирования информации: каждый сплетник узнает из телеграмм каждый слух не более одного раза. При таком распространении слухов может случиться, что кто-то из сплетников получит телеграмму, где среди прочего приведена и его исходная сплетня. Докажите, что в каждом экономном способе оповещения число таких сплетников не меньше $n - 1$.

3 Вариация задачи о сплетниках: *НОНО*

Пусть все n сплетников попарно знакомы. Рассмотрим следующее ограничение на разговоры сплетников: пусть сплетники совершают звонки так, чтобы никому из них не пришлось услышать свой собственный слух от другого человека (НОНО: No One Hears Own).

Очевидно, в этом случае в графе звонков G не может быть кратных ребер (и даже треугольников), а все вершины имеют степень не меньше 2.

3.1. Нетипичная ситуация. Пусть имеются три сплетника, знающих слух A , еще три сплетника знают слух B , два сплетника знают слух C и еще два сплетника — слух D . (Всего, значит, 10 сплетников.) Существует ли в этом случае способ оповещения, удовлетворяющий ограничению НОНО?

3.2. При каком n возможно распространение слухов НОНО?

3.3. Докажите, что в схеме НОНО требуется $2n - 4$ звонка

4 Вариация задачи о сплетниках: *NODUP*

Рассмотрим ситуацию, когда n сплетников строят свое общение так, чтобы каждый раз при беседе сплетники не знали ни одного общего слуха (NODup: No Duplication). Такое свойство нам уже встречалось в задаче 1.7, правда, у несуществующего объекта. Все сплетники знакомы друг с другом.

4.1. Возможно ли распространение слухов NODUP при $n = 12$?

4.2. Пусть имеются группы из 13, 8, 6, 5, 4, 4 сплетников. Каждая группа знает свой уникальный слух. Существует ли в этом случае способ оповещения, удовлетворяющий ограничению NODUP?

4.3. Возможно ли распространение слухов NODUP при $n = 20$?

4.4. При каком n возможно распространение слухов NODUP?

4.5. Приведите пример обмена слухов с ограничением NODUP за $\frac{9}{4}n + c$ звонков для бесконечного множества значений n .

4.6. Докажите, что наименьшее число звонков в схеме оповещения NODUP не меньше чем $\frac{9}{4}n + c$.

Дополнения к предыдущим сюжетам

Назовем сплетника *экспертом*, если он знает все слухи. Назовем сплетника *знатоком*, если среди остальных сплетников найдется такой не эксперт, после разговора с которым этот сплетник стал бы экспертом. Двух таких знатоков будем взаимодополняющими.

Отметим одну полезную идею. Если в некотором способе оповещения сплетники A и B стали знатоками после 50-го звонка, а впервые поговорили между собой по телефону лишь на 100-м звонке, то последовательность звонков можно переставить, поместив звонок AB на 51-е место (и сдвинув остальные), в результате чего способ оповещения по-прежнему будет работать.

1.11. Среди сверхбыстрых способов оповещения, выберем такой, в котором первый эксперт появляется как можно раньше. (Ясно, что для этого требуется не менее $n - 1$ звонков.) Зафиксируем этот способ оповещения. После того как появился эксперт, в каждый момент времени пусть ℓ — это количество экспертов, m — наибольшее количество непересекающихся пар взаимодополняющих знатоков. Докажите, что для завершения способа оповещения требуется не меньше чем $n - \ell - m$ звонков.

1.12. Придумайте другое доказательство теоремы о сплетниках 1.10, использующее полуинвариант из предыдущей задачи.

4.3 $\frac{1}{2}$. Докажите, что распространение слухов с ограничением NODUP невозможно:

- а) при $n = 14$; б) при $n = 18$.

4.4 $\frac{1}{2}$. Докажите, что для $n > 4$ при распространении слухов с ограничением NODUP каждый сплетник говорил по телефону не менее трех раз.

Есть n химиков ($n > 3$). У каждого имеется уникальный реактив в количестве 1 кг. Когда два химика встречаются, они поровну делят все имеющиеся у них реактивы. В хорошей домашней лаборатории должны быть представлены все имеющиеся реактивы. За $2n - 4$ встречи домашние лаборатории всех химиков могут стать хорошими. Но для эффективной лаборатории требуется, чтобы имеющиеся реактивы присутствовали в достаточном количестве, а именно: не менее α граммов каждого реактива.

1.13. При каком наибольшем α после $2n - 4$ встреч домашние лаборатории всех химиков могут стать эффективными?

5 Плохая связь

Пусть имеется n сплетников и натуральное число k . Рассмотрим ситуацию, когда расписание звонков составляется заранее и сплетники не могут от него отклоняться. Но при этом известно, что «связь плохая», из за чего могут «сорваться» k звонков (т. е. соответствующие сплетники не смогут во время звонка поменяться слухами). Аналогичная постановка вопроса может быть для случая, когда сплетники вместо звонков используют телеграф.

5.1. Решите задачу о плохой связи для случая «плохой почты» — когда сплетники посылают телеграммы, k из которых могут не дойти до адресата.

а) Пусть один из сплетников — генерал. Требуется составить такое расписание отправления телеграмм, для которого, несмотря на плохую связь, все сплетники сумеют доложить генералу свои слухи. Какое наименьшее число телеграмм им понадобится?

б) Какое наименьшее число телеграмм понадобится сплетникам, чтобы все смогли узнать все слухи?

5.2. Пусть один из сплетников — генерал. Требуется составить такое расписание звонков, чтобы несмотря на плохую связь, все сплетники сумели доложить генералу свои слухи. Обозначим через $\mu(n, k)$ наименьшее число звонков, которое понадобится сплетникам в этой ситуации. Докажите, что

- а) $\mu(n, k) = \lceil \frac{k+1}{2} \cdot n \rceil$ при $k \geq n - 2$.

б) $\mu(n, k) = \lceil \frac{k+2}{2} \cdot (n-1) \rceil$ при $k \leq n-2$;

5.3. Докажите, что наименьшее возможное количество звонков $\tau(n, k)$ для сплетников с плохой связью удовлетворяет неравенствам:

а) $\tau(n, k) \leq \lfloor (k + \frac{3}{2})(n-1) \rfloor$;

б) Оцените $\tau(n, k)$ снизу. Желательно, чтобы эта оценка была не сильно меньше оценки из пункта а).

Точное значение $\tau(n, k)$ неизвестно. Что же касается вопроса предыдущей задачи, известна следующая оценка снизу: $\mu(n, k) + n - 2\sqrt{n} \leq \tau(n, k)$. Является ли при фиксированном k последовательность $\tau(n, k) - (k + \frac{3}{2})n$ ограниченной — неизвестно.

5.4. Пусть теперь звонки не срываются, но сплетники хотят, чтобы все слухи, которые им известны, были *надежными*. Надежным слухом они считают всякий «чужой» слух, который им сообщили другие сплетники не менее $k+1$ раз. Докажите, что наименьшее возможное количество звонков $\gamma(n, k)$ удовлетворяет неравенствам

а) $\gamma(n, k) \leq \lceil \frac{(k+4)n}{2} \rceil - 4$;

б) $\lceil \frac{(k+4)(n-1)}{2} \rceil - \lfloor \log_2 n \rfloor \leq \gamma(n, k)$.

6 Ленивые сплетники

6.1. Пусть n сплетников совершили несколько звонков. Оказалось, что граф звонков представляет собой дерево, а каждый сплетник в результате этих звонков знает не менее k слухов.

а) Докажите, что $n \geq 2^{k-1}$.

б) Докажите, что если граф звонков представляет собой дерево, а каждый сплетник, кроме одного, в результате этих звонков знает не менее k слухов, то $n \geq 2^{k-1} - 1$.

Зафиксируем натуральные числа n и k , где $k \leq n$. Рассмотрим теперь ситуацию, когда n сплетников попарно знакомы друг с другом, но обладают ограниченным любопытством: они лишь хотят, чтобы в результате общения каждый узнал не менее k сплетен. Цель сплетников прежняя — узнать требуемое число сплетен за наименьшее число звонков. Наименьшее возможное число звонков, позволяющее этого достигнуть, обозначим $P(n, k)$.

В дальнейшем будем считать, что $k \geq 4$. Введем полезное обозначение. При фиксированном k рассмотрим конечную последовательность

$$t_i = i + 2^{k-i-2}, \quad \text{где } 0 \leq i \leq k-4.$$

Эта последовательность убывает.

6.2. Пусть число k — «мало» по сравнению с n , а именно, выполнено неравенство $n \geq 2^{k-1}$. Докажите, что сплетникам потребуется «почти n » звонков: $P(n, k) = \lceil \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \cdot n \rceil$.

6.3. Для более крупных k подберем i , $0 \leq i \leq k-4$, при котором $t_i \leq n < t_{i-1}$. Докажите, что $P(n, k) \leq n + i$.

6.4. Докажите, что в условиях предыдущей задачи имеет место равенство $P(n, k) = n + i$.

Решения

1.1. Ответ: 4 звонка.

1.2. Если слух сплетника A по цепочке звонков дошел до сплетника B , то по обратной цепочке слух от сплетника B дойдет до сплетника A .

1.3. Индукция: База 4 сплетника. Переход: добавим сплетника и два звонка: новый сплетник раньше всех звонит кому угодно, а потом последним звонит тоже кому угодно.

1.4. [11, лемма 2]. Будем считать, что A и B — это один и тот же человек, знающий в каждый момент объединенную информацию. Звонки между A и B удалим. Тогда мы получим способ оповещения $(n - 1)$ человека, состоящий из $2(n - 1) - 5$ звонков, что противоречит минимальности n .

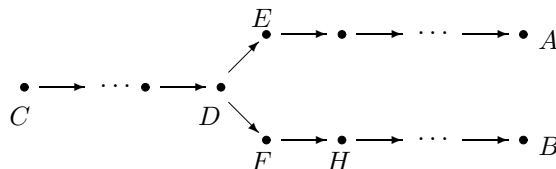
1.5. Мы взяли это утверждение в [1]. Нужно отменить сплетника A , причем до разговора BC всю активность A берет на себя B , а после разговора BC всю активность A берет на себя C . Число людей уменьшилось на 1, а число звонков на 2 — это противоречит минимальности n .

Аналогично проверяется, что невозможны более длинные цепочки, начинающие и заканчивающиеся одним и тем же человеком.

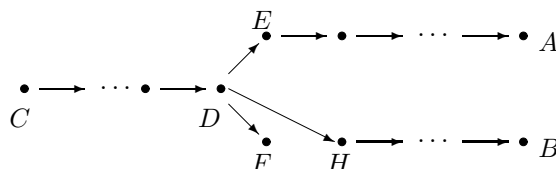
1.6. После разговора с A сплетник B знает все слухи. Допустим тем не менее, что после разговора с A сплетник B позвонил какому-то сплетнику C . Значит, в этом разговоре сплетник C слышал от B свой собственный слух. Но циклы запрещены задачей 1.5, противоречие.

1.7. Мы взяли это утверждение в [11, лемма 4], оно эквивалентно лемме о пересечении в [1]. Воспользуемся следующей идеей: если в какой-то момент Петр и Павел обладают одинаковой информацией (например сразу после разговора друг с другом), то мы можем “поменять их местами” во всех последующих звонках и у нас получится опять способ оповещения.

Допустим, что при разговоре сплетники A и B знали общий C -слух. Рассмотрим любую последовательность звонков, по которой этот слух дошел от C до A и до B .



Допустим, что в этой последовательности звонок DE был раньше звонка DF . Тогда, поменяв местами сплетников D и F , сразу после звонка DF мы можем считать, что вместо звонка FH имел место звонок DH . У нас получится последовательность звонков, в которой цепочка $DFH \dots B$, находящаяся после «развилки», укоротилась (теперь это цепочка $DH \dots B$).



Звонок DH по-прежнему позже DE . Продолжая такие действия, мы полностью устраним цепочку $H \dots B$ после «развилки». На последнем шаге этого процесса мы поменяем местами сплетников B и D (сразу после разговора BD), при этом разговор AB , с которого мы начали решение, заменится на AD . У нас останется цепочка $DE \dots A$ и последующий разговор AD . Это невозможно по задаче 1.4.

1.8. Мы взяли это утверждение в [1]. Если каждый сплетник звонил не менее 4 раз, то всего было не менее $2n$ звонков. Допустим, A звонил три раза. Чтобы от A информация дошла

до других, требуется не менее $n - 1$ звонков, чтобы до A дошла информация от других, требуется не менее $n - 1$ звонков. В силу предыдущей задачи, эти наборы звонков могут пересекаться только по звонкам, которые совершал сам A . Действительно, если звонок CD служил для того, чтобы передавать информацию от A , то оба говоривших знают A -слух и если кто-то из них будет передавать информацию для A , то вместе с нею он вернет A его A -слух, что запрещено задачей 1.5. Итого $(n - 1) + (n - 1) - 3 = 2n - 5$.

1.9. Если Вася сделал k звонков, то как и в предыдущей задаче $2n - 5 \geq (n - 1) + (n - 1) - k$. Откуда $k \geq 3$.

1.10. Достаточно убедиться, что не существует сверхбыстрых способов, содержащих $2n - 5$ звонков. По задаче 1.6 звонки бывают начальные (их $n/2$ шт., для обоих собеседников это первый звонок), финальные (их тоже $n/2$ шт., для обоих собеседников это последний звонок) и средние (каковых получается $n - 5$). По задаче 1.9 каждый сплетник сделал хотя бы один средний звонок. Нарисуем граф средних звонков. В нем n вершин, $n - 5$ ребер, значит, всего не менее 5 компонент, причем в каждой есть хотя бы одно ребро.

Если AB и AC — первый и последний звонки (произвольного) сплетника A , то при помощи средних звонков информация от A могла распространяться лишь в компонентах, куда входит A или B , а информация для A распространялась лишь по компонентам, куда входит A или C . Таким образом, как минимум две компоненты рассматриваемого графа не участвовали в передаче информации ни от A , ни к A . Эти компоненты содержат $d \geq 2$ ребер. Тогда, как в задаче 1.9, $2n - 5 \geq (n - 1) + (n - 1) - k + d$. Отсюда k (количество звонков произвольного сплетника A , а значит, и любого другого сплетника) не меньше 5, чего не может быть (см. решение 1.8).

2.1. Это утверждение доказано в [6]. С учетом задачи 1.10 утверждение следует из того, что для любого дерева требуется $2n - 3$ звонка. Действительно, $2n - 3$ звонков достаточно, если сплетники будут последовательно звонить от периферии к корню. (Сначала звоним по ребрам, которые находятся дальше всего от корня, потом по доле близким и т.д.) Это приведет к тому, что появится два полностью осведомленных сплетника — корень и один из его соседей. Потом повторяем все звонки в обратной последовательности. Меньшим числом звонков не обойтись, поскольку при меньшем числе звонков в дереве будет по крайней мере два ребра, использованных лишь по одному разу (будем называть такие ребра *сингулярными*). Наличие двух сингулярных ребер разбивает граф на три компоненты связности, между которыми невозможен полный обмен информацией.

2.2. Конструкция приведена в [6]. Сожмем цикл C_4 в одну вершину, будем считать ее корнем полученного дерева. Будем звонить от периферии к корню, как в предыдущем пункте, потом применим наибо́льший способ из пункта 1.1 к подграфу C_4 , после чего повторим звонки на дереве в обратной последовательности. Такой способ оповещения требует $(n - 4) + 4 + (n - 4) = 2n - 4$ звонка.

2.3. Доказательство приведено в [6].

Предположим, что существует способ, содержащий всего $2n - 4$ звонка. Тогда заметим, что каждое ребро должно быть использовано в этом способе оповещения хотя бы один раз. Если это ребро является мостом и не было использовано, то невозможно распространение информации между двумя частями, на которые оно делит граф. Если оно лежит на цикле, то после его удаления из графа получаем дерево, в котором распространение информации невозможно быстрее, чем за $2n - 3$ по решению пункта 2.1. Следовательно, при способе за $2n - 4$ звонка имеется по крайней мере 4 сингулярных ребра (напомним, что мы называем ребро сингулярным, если ему соответствует лишь один звонок).

Допустим, что хотя бы одно из этих ребер является мостом. При его удалении граф распадается на две компоненты связности. Тогда к моменту звонка по этому ребру в каждом из его концов должна накопиться вся информация из соответствующей компоненты. Пусть размер одной из компонент равен a , тогда для этого потребуется $(a - 1) + (n - a - 1) =$

$n - 2$ звонков. После этого происходит звонок по мосту и еще столько же звонков, чтобы информация распространилась обратно. В сумме получаем $2n - 3$ звонка. Таким образом, сингулярные ребра не могут быть мостами, т. е. все они лежат на цикле.

Тогда после удаления сингулярных ребер из графа получится 4 компоненты связности, каждая из которых является деревом. Перенумеруем их в порядке обхода цикла, пусть эти компоненты содержат n_1, n_2, n_3, n_4 вершин, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. Посмотрим, в каком порядке сингулярные ребра могут входить в последовательность звонков. Пусть сначала в последовательности звонков стоят два ребра, связанных с одной и той же компонентой i . Это невозможно, так как тогда эта компонента не получит сведений из компоненты $(i+2) \bmod 4$. Значит, порядок вхождения сингулярных ребер в способ оповещения аналогичен порядку вхождения ребер графа в решении пункта 1.1: можно считать, что сначала были сделаны звонки 1–2, 3–4, а после этого 2–3 и 1–4.

К моменту совершения звонка 1–2, оба собеседника должны были знать все слухи из своей компоненты, значит, к этому времени должно было быть совершено не менее $(n_1 - 1) + (n_2 - 1)$ звонков внутри этих компонент. Аналогично к моменту звонка 3–4 должно было быть совершено не менее $(n_3 - 1) + (n_4 - 1)$ звонков внутри третьей и четвертой компонент. Мы насчитали $n - 4$ звонков.

Далее, в результате совершения звонка 2–3 каждый из собеседников узнал уникальный для своей компоненты новый слух. Значит, после этого звонка в компонентах должно произойти еще не менее $(n_2 - 1) + (n_3 - 1)$ звонков, распространяющих эти уникальные слухи. Аналогично после звонка 1–4 произойдет не менее $(n_1 - 1) + (n_4 - 1)$ звонков в первой и четвертой компонентах. Мы обнаружили еще $n - 4$ звонка.

Так как наш цикл содержит более 4 вершин, то есть хотя бы одна компонента, пусть для определенности первая, для которой смежные с ней два сингулярных ребра не имеют общей вершины. Следовательно, эта компонента сможет передать информацию, как это требуется при способе оповещения, только если в промежутке между звонками 1–2 и 1–4 внутри первой компоненты будет сделан хотя бы один звонок, передающий слухи второй компоненты от собеседника, только что узнавшего по звонку 1–2, к собеседнику, который будет передавать их по звонку 1–4. Этот звонок еще не был учтен нами ранее.

Итого мы имеем $(n - 4) + (n - 4) + 4 + 1$ звонков.

2.4. Ф. Харари и А. Швенк [6] предлагали в 1974 г. \$10 за доказательство этого факта. В 1980 г. R. Bumbly [4] решил эту задачу. Чуть позже D. Kleitman и J. Shearer [7] привели другое доказательство, причем в их рассуждениях не требовалось, чтобы все звонки были двусторонними. Мы приводим доказательство из [7], впрочем, опуская детали, возникающие в случае односторонних звонков.

Пусть дана схема оповещения, состоящая из $2n - 4$ звонков. Докажем, что она содержит 4-цикл.

Порядок звонков в схеме оповещения не задан жестко. Разные перестановки последовательности звонков, реализующие оповещение, будем называть *упорядочиваниями* схемы оповещения.

Рассмотрим граф, изображающий первые $n - 1$ звонков, и отметим его наименьшую компоненту связности, являющуюся деревом. Такая компонента всегда найдется, так как в противном случае суммарное число ребер окажется не меньше суммарного числа вершин. Пусть S — минимальная отмеченная компонента-дерево, выбранная по всем упорядочиваниям.

Пусть в компоненте S содержится m вершин. Отметим, что $m \geq 2$, поскольку иначе, если $m = 1$, а мы изобразили уже $n - 1$ звонков, то чтобы информация от этой вершины дошла до остальных, потребуется еще не менее $n - 1$ звонков, т. е. в сумме будет больше $2n - 4$ звонков. Рассмотрим $(m - 1)$ -й по порядку звонок внутри компоненты S . Если его отменить, компонента распадется на две части — S_1 и S_2 . Опять перебирая упорядочения, меняющие местами звонки внутри S , мы можем дополнительно считать, что S_1 — наименьшая возможная компонента в том смысле, что другие упорядочения не могут дать нам компоненту строго содержащуюся в S_1 . Пусть $(m - 1)$ -й звонок происходит между вершинами $x_1 \in S_1$

и $y_1 \in S_2$. Мы последовательно проверим следующие пять утверждений, выделенных курсивом. Из пятого утверждения следует, что схема оповещения содержит 4-цикл, что нам и требуется.

Утверждения.

1) *Компонента S_1 содержит не менее двух вершин.*

2) Пусть компонента S_1 состоит из j вершин. Тогда $(j - 1)$ звонков, сделанные внутри S_1 , (среди первых $m - 2$ звонков в S) превращают эту компоненту в дерево, обозначим его T (а обозначение S_1 будем относить скорее к множеству вершин). Пусть дана некоторая последовательность звонков. Будем называть звонок между вершинами a и b *особенным*, если этот звонок произошел позже всех остальных звонков с участием a или b . *Дерево T содержит единственный особенный звонок, в этом звонке обязательно участвует вершина x_1 .* Обозначим через x_2 второго участника этого звонка.

3) Для построения множеств S , S_1 и дерева T мы использовали $n - 1$ первых звонков. Способ оповещения содержит еще $n - 3$ звонка, обозначим множество этих звонков через \mathcal{L} . Если удалить из дерева T ребро x_1x_2 , дерево распадется на две части T_1 и T_2 , где обозначения выбраны так, что $x_1 \in T_1$, $x_2 \in T_2$, см. рис. 1. *Для каждой вершины $z \notin T_1$ (в том числе для вершин z , лежащих вне S) существует цепочка звонков, содержащая лишь звонки из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, по которой к z может прийти слух от вершины x_1 . То же касается распространения информации от x_2 к вершинам вне T_2 . Более того, множество звонков $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$ образует дерево.*

4) *Последовательность звонков, которая доставляет слух вершине x_1 (или x_2) от остальных, может содержать не более одного звонка из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, и если таковой звонок встретился в этой последовательности, он является в ней последним.*

5) Рассмотрим какую-нибудь последовательность звонков, по которой слух y_1 дошел до x_2 . Пусть y_2x_2 — последний звонок в этой последовательности. Теперь рассмотрим какую-нибудь последовательность звонков, по которой слух y_2 дошел до x_1 . Пусть y_3x_1 — последний звонок в этой последовательности. Продолжая это построение, скажем, что y_{i+1} — это тот сплетник (не совпадающий с x_1 и x_2), который участвовал в последнем звонке из последовательности, доставившей слух от y_i к x_1 (если i четно) или x_2 (если i нечетно). *Все вершины y_i лежат в S_2 . Найдутся нечетное i_1 , четное i_2 , такие что $y_{i_1}y_{i_2}$ — звонок из S_2 . Более того, в этом случае $y_{i_1}x_1$, $y_{i_2}x_2$ — звонки, принадлежащие нашей схеме оповещения, причем они совершены позже звонков x_1x_2 и y_1y_2 .*

Доказательства.

1) Можно считать, что звонок x_1y_1 был $(n - 1)$ -м по счету. Если S_1 состоит из одной вершины, то после первых $n - 2$ звонков, слух из этой вершины еще никуда не ушел. Для

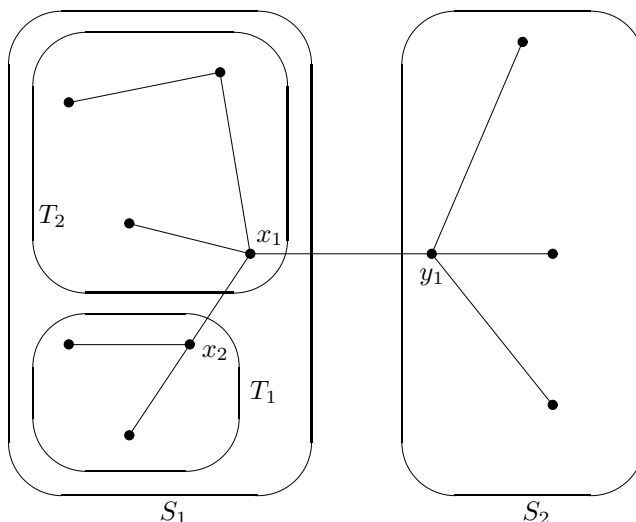


Рис. 1. Компонента связности S

его распространения понадобится еще по крайней мере $n - 1$ звонков, т.е. в сумме будет не менее $2n - 3$ звонков.

2) Это следует из условия минимальности, наложенного нами на S_1 . Последний звонок — всегда особенный, так что хотя бы один особенный звонок существует. Если бы в S_1 нашелся особенный звонок ab , не задевающий вершину x_1 , мы могли бы переупорядочить звонки в S_1 , поставив звонок ab на $(m - 1)$ -е по счету место. Тогда первые $m - 2$ звонка порождали бы компоненту, строго содержащуюся в S_1 , что противоречит ее минимальности.

3) В нашей схеме оповещения слух от x_1 по какой-то цепочке звонков дошел до z . Пусть ab — первый звонок в этой цепочке, не лежащий в T_1 . Тогда ab и все последующие звонки в этой цепочке лежат в $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Если существует цепочка звонков из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, предшествующая ab и доставляющая информацию от x_1 к a или b , объединим ее с предыдущей рассмотренной цепочкой и получим требуемую цепочку от x_1 к z . Если же такой цепочки не существует, то схема оповещения допускает следующее переупорядочивание звонков: пусть звонок x_1y_1 идет n -м по счету, звонок x_1x_2 — $(n - 1)$ -м, а звонок ab или какой-то звонок из \mathcal{L} , предшествующий звонку ab , — $(n - 2)$ -м по счету (относительный порядок остальных звонков не изменился).

Если теперь $(n - 2)$ -й звонок не задевает S_1 (или S_2), то в начале в качестве S можно было взять S_1 (или S_2), что противоречит минимальности S . Если же $(n - 2)$ -й звонок соединяет S_1 с S_2 , то это противоречит минимальности S_1 , так как удаление $(n - 1)$ -го по счету звонка x_1x_2 теперь создает компоненту, строго содержащуюся в S_1 .

Мы доказали существование цепочки звонков, передающих информацию от x_1 к z и лежащих в $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$. Аналогично существуют цепочки, передающие информацию от x_2 к $z \notin T_2$. Таким образом, множество $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, содержащее $n - 1$ ребро, позволяет распространять информацию от x_1 и x_2 к остальным $n - 2$ вершинам. Следовательно, ребра из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$ порождают остовное дерево графа звонков.

4) Остовное дерево, описанное в предыдущем пункте, состоит из звонков $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$. Эти звонки в нашем способе оповещения хронологически последние. Поэтому если последовательность звонков, передающая информацию из z в x_1 (для x_2 рассуждения аналогичны), содержит звонок из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, то и все последующие звонки тоже лежат в этом множестве. Но цепочки звонков в этом остовном дереве «уводят» информацию от «центра» $x_1 \cup x_2$ к другим вершинам, поэтому единственный способ передать информацию в x_1 — передать ее от непосредственного соседа вершины x_1 , т.е. по цепочке, содержащей лишь один звонок с участием x_1 , *чтд*.

5) По определению $y_1 \in S_2$. В силу свойства 4) в цепочке звонков, доставившей информацию от y_1 к x_2 все звонки, кроме, быть может, последнего звонка y_2x_2 , — это какие-то из первых $n - 1$ звонков, кроме x_1y_1, x_1x_2 . По отношению к этим звонкам мы определяли S_2 как компоненту связности, поэтому $y_2 \in S_2$. Аналогично проверяется, что и все остальные вершины y_i лежат в S_2 . Отметим, что тогда звонки вида y_ix_1 или y_ix_2 из определения вершин y_i принадлежат остовному дереву $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Поскольку компонента S_2 конечна, какие-то две из вершин совпадают, скажем, $y_i = y_{i+k}$. При этом число k — обязательно четное, так как ребра y_ix_1 и y_ix_2 не могут одновременно принадлежать остовному дереву $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Рассмотрим теперь цепочку путей

$$y_i \rightarrow y_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow y_{i+k} = y_i$$

(каждый путь в этой цепочке хронологически упорядочен, но соседние пути могут нарушать хронологию). Поскольку этот замкнутый маршрут расположен на дереве, каждое ребро в нем было пройдено в обоих направлениях. Мы утверждаем, что все вершины, по которым проходит этот маршрут, лежат в множестве $\{y_j, i \leq j \leq i + k\}$. Действительно, если маршрут проходит через вершину a , не совпадающую ни с одним из y_j , рассмотрим хронологически самый последний звонок в этом маршруте с участием вершины a , пусть это звонок ab .

В какой-то момент, проходя очередной путь $y_j \rightarrow y_{j+1}$, мы двигались в направлении от b к a , но поскольку этот звонок хронологически последний, мы не можем продолжить движение за точку a . Значит, $a = y_{j+1}$.

Теперь мы без труда можем выбрать звонок $y_{i_1}y_{i_2}$, где i_1 нечетное, i_2 четное (и разумеется, он лежит в S_2). Звонки $y_{i_1}x_1$ и $y_{i_2}x_2$ также присутствуют в схеме оповещения, поскольку по определению точек y_i они использовались для передачи информации вершинам x_1, x_2 .

2.5. Ответ: $2n - 2$ телеграммы.

Мы взяли эту задачу в [6]. До того как появится первый человек, узнавший все слухи, должно быть послано не менее $n - 1$ телеграммы. После этого каждый из остальных должен получить хотя бы одну телеграмму, чтобы завершить ознакомление со слухами. Значит, еще будет послано еще не менее $n - 1$ телеграмм.

Пример строится на базе любого дерева, если сначала посылать телеграммы от периферии к корню, а потом обратно.

2.6. Это теорема 3 [9]. Пример способа оповещения, в котором $n - 1$ человек прочтет в телеграмме свой собственный слух, тривиален: пусть все сначала телеграфируют Васе, а потом Вася посылает всем телеграммы с полным комплектом слухов.

Оценка. Рассмотрим минимальный контрпример, в котором не более $n - 1$ человек прочли в телеграмме свой собственный слух. Пусть последняя телеграмма была послана сплетником A сплетнику B . Очевидно, сплетник A уже знает все слухи, значит, сплетник B , во-первых, один из тех, кто прочел свой слух в полученной телеграмме, а во-вторых, не знает ни одного слуха, кроме своего собственного (иначе он какой-то слух выучил из телеграмм дважды). Значит, ранее сплетник B не получил ни одной телеграммы, а только посылал. Удаляя из этой компании сплетника B и соответствующие телеграммы, мы получим меньший контрпример. Противоречие.

3.1. Ответ: это возможно даже с ограничением NODUP. См. начало решения задачи 4.3.

3.2. Ответ: при четных n . [12]

Для каждого сплетника отметим последний звонок, в котором он участвовал. При выполнении ограничения НОНО эти последние звонки разбивают всех сплетников на пары — см. рассуждение в решении задачи 1.6 без последнего предложения. Таким образом, n должно быть четным.

Отметим, что первые звонки тоже разбивают сплетников на пары.

Для каждого четного n предъявим способ оповещения, подчиненный ограничению НОНО, состоящий из $2n - 4$ звонков [12, лемма 2.4]. Пусть $m = \frac{1}{2}n - 1$. Обозначим сплетников $a_i, b_i, i = 0, 1, \dots, m + 1$, — но здесь $n + 2$ сплетника, будем считать, что $a_0 = b_{m+1}, a_{m+1} = b_0$. В качестве первых звонков возьмем звонки (в порядке возрастания i , см. рис. 2)

$$a_i b_{m+2-i}, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, m + 1;$$

далее выполним средние звонки

$$a_i a_{i+1}, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, m - 1, \quad \text{и} \quad b_i b_{i+1}, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, m - 1;$$

и, наконец, последние звонки

$$b_i a_{m-i}, \quad \text{где } i = 0, 1, \dots, m.$$

Непосредственно проверяется, что указанная система звонков является способом оповещения, подчиненным ограничению НОНО.

3.3. Поскольку любая схема оповещения содержит не менее $2n - 4$ звонков, достаточно привести пример, удовлетворяющий ограничению НОНО и содержащий $2n - 4$ звонка. Этот пример приведен в предыдущем решении.

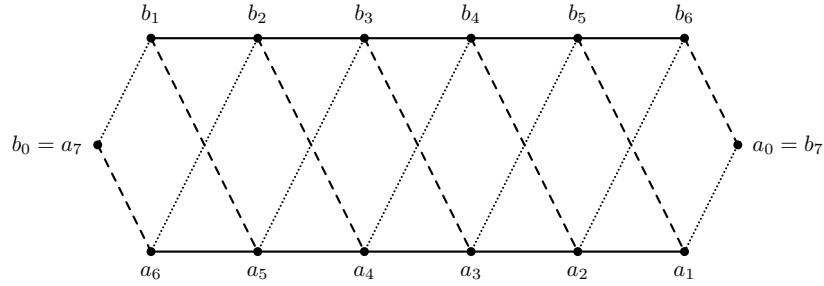


Рис. 2. Оптимальные звонки с ограничением НОНО.

4.1. Ответ: да. [8]. Прежде чем приводить решение задачи, дадим несколько определений.

Уникальные сплетники, известные сплетникам до того как они стали обмениваться информацией, будем называть также *изначальными*. Пусть после нескольких звонков имеется такое подмножество изначальных сплетен, что каждый сплетник либо знает все сплетни из этого подмножества, либо не знает ни одной из них. Тогда при рассмотрении последующих звонков можно рассматривать такое подмножество сплетен как одну большую сплетню. Будем называть ее *объединенной* или *общей* сплетней (определение из статьи [8]). Например, пусть сплетникам, номера которых указаны ниже, известны следующие сплетни, обозначенные греческими буквами.

Сплетник	1	2	3	4
Какие сплетни знает	$\alpha\gamma$	β	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$

В этом примере сплетни α и γ образуют объединенную сплетню, поскольку каждый сплетник либо знает обе эти сплетни, либо не знает ни одной. А вот набор сплетен β, δ объединенную сплетню не образует, так как второй сплетник знает лишь одну из них.

Рассмотрим чуть более общую постановку задачи. Пусть имеются группы из a_1, a_2, \dots, a_k сплетников, причем в каждой группе всем известен один и тот же набор сплетен. Такое объединение сплетников будем называть *коллективом*. Сплетники по-прежнему общаются друг с другом по телефону и хотят, чтобы каждый из них узнал все имеющиеся сплетни. Если для такого коллектива существует хотя бы один способ оповещения, подчиненный ограничению NODUP, то будем называть этот коллектив *сплоченным*. Коллектив, содержащий только одну группу, тоже будем считать сплоченным. Так, коллектив из трех групп сплетников $\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}$ в предыдущем примере не является сплоченным. В этих терминах задача про n сплетников, знающих по одной уникальной сплетне, теперь формулируется для коллектива из n групп, каждая из которых состоит из одного сплетника.

Если в коллективе каждая группа знает лишь одну сплетню (эта сплетня может быть изначальной или объединенной, являющейся подмножеством нескольких изначальных в смысле определения выше), то такой коллектив назовем *простым*. Так, коллектив из трех групп сплетников $\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}$ в предыдущем примере не является простым (сплетник 4 знает две сплетни, не образующие объединенную сплетню).

Заметим, что если объединить два сплоченных коллектива сплетников, в которых поровну сплетников, а множества их изначальных сплетен не пересекаются, то снова получится сплоченный коллектив. Действительно, мы сразу получим способ оповещения, если сначала в каждом из коллективов все сплетники узнают все сплетни своего коллектива, а потом каждый сплетник из первого коллектива поговорит с кем-то из второго. Таким способом можно из коллективов, содержащих одну группу, построить, например, следующие коллективы:

$$(a, a), \quad (a, a, 2a, 4a, 8a, 16a), \quad (a, a, a, a, 4a, 4a, 4a, 16a), \quad \underbrace{a, a, a, \dots, a}_{2^k \text{ групп}} \quad (1)$$

Пусть имеется два коллектива (a_1, a_2, \dots, a_k) и (b_1, b_2, \dots, b_k) , для которых множества изначальных сплетен совпадают. Предположим, что при каждом i группа из a_i человек первого

коллектива и группа из b_i человек второго знают одно и то же множество сплетен. При этом мы допускаем, что a_i или b_i может быть равным нулю; если так случилось, к примеру, если $a_i = 0$, то изначальные сплетни, составляющие это множество сплетен, должны быть известны в других ненулевых группах первого коллектива. Назовем *суммой* этих коллективов коллектив $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k)$. Например, непростой коллектив из 10 сплетников, которым известны сплетни α, β, γ

Наборы сплетен	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
количество сплетников	3	3	2	2

представим в виде суммы двух коллективов:

Коллектив	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
1	3	0	0	2
2	0	3	2	0

Заметим, что если коллективы были сплоченными, то и их сумма тоже является сплоченным коллективом. Значит, если коллектив сплетников раскладывается в сумму сплоченных коллективов, каждый из которых знает в объединении тот же набор сплетен, что и исходный коллектив, то он тоже является сплоченным.

Вернемся к решению задачи. Преобразуем простой коллектив, состоящий из 12 одиночных сплетников, в простой коллектив $(4, 4, 4)$ (2^d сплетников, каждый из которых знает одну уникальную сплетню, всегда могут объединиться в группу как в примерах (1)). А теперь заметим, что он является суммой трех простых сплоченных коллективов $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ и $(2, 1, 1)$.

4.2. Ответ: да.

Сначала слегка укрупним группы.

Сплетни	α	β	γ	δ	ε	ζ	\rightarrow	α	β	γ	δ	$\varepsilon\zeta$	\rightarrow	α	γ	δ	$\beta\varepsilon\zeta$
Число сплетников	13	8	6	5	4	4		\rightarrow	13	8	6	5		8	\rightarrow	13	6

Полученный простой коллектив легко раскладывается в сумму пяти сплоченных: $(2, 1, 1, 4)$ (2 раза), $(4, 1, 1, 2)$ (2 раза), $(1, 2, 1, 4)$ (1 раз).

Другое разложение. Пусть сначала один человек, знающий сплетню γ , поговорит с человеком, знающим сплетню ζ , а также один человек, знающий сплетню δ , поговорит с человеком, знающим сплетню ε .

Коллектив	α	β	γ	δ	ε	ζ	$\delta\varepsilon$	$\gamma\zeta$
1	2	2	1	0	0	2	1	0
2	8	4	0	2	1	0	0	1
3	1	1	4	0	0	1	1	0
4	2	1	0	2	2	0	0	1

4.3. Ответ: да. [8].

Рассмотрим сначала простой коллектив сплетников $(3, 3, 2, 2)$, в котором каждая группа знает соответственно сплетню $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Пусть один сплетник из I группы переговорит с одним из III группы, а один из II — со сплетником из IV. Получится коллектив (уже не простой) из 6 групп, который легко разложить в сумму трех сплоченных.

α	β	γ	δ	\rightarrow	α	β	γ	δ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	\rightarrow	Коллектив	α	β	γ	δ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	
3	3	2	2		\rightarrow	2	2	1	1	2		2	\rightarrow	1	0	0	0	0	1
												2	2	0	1	0	0	1	
												3	0	2	0	1	1	0	

Теперь возьмем наших 20 сплетников и преобразуем их в простой коллектив $(4, 4, 4, 4, 4)$. Этот коллектив является суммой двух простых коллективов $(3, 3, 2, 1, 1)$ и $(1, 1, 2, 3, 3)$, каждый из которых может с помощью одного звонка быть преобразован в коллектив $(3, 3, 2, 2)$, который мы уже рассматривали.

4.3 $\frac{1}{2}$. Докажем, что при $n = 6, 10, 14, 18$ распространение слухов с ограничением NODUP невозможно [8, предложение 4].

Утверждение 1 [8, лемма 1]. При выполнении ограничения NODUP сплетники разбиваются на пары по первым звонкам, а также разбиваются на пары по последним звонкам.

Доказательство. Утверждение о последних звонках очевидно (если кто-либо узнал все сплетни, то его последний собеседник тоже узнал все сплетни и оба больше не могут ни с кем разговаривать).

Докажем утверждение о первых звонках. Пусть сплетник A — это первый человек, с которым разговаривал сплетник B . Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда для сплетника A первый разговор был с другим человеком C . После этого разговора сплетник C знает сплетню человека A и не знает сплетню B . После разговора сплетника B с A сплетня B всегда путешествует с A . Следовательно, C не сможет ее узнать. \square

Пусть $n = 2k$. Можно считать, что первые звонки сплетников суть в точности первые k звонков схемы оповещения, а последние звонки сплетников — это в точности последние k звонков схемы оповещения. После того как сделаны первые k звонков, образовалось k объединенных сплетен. В каждый момент времени для каждого сплетника X назовем *напарником* сплетника X того сплетника Y , с которым X непосредственно перед этим разговаривал по телефону. Сразу после их разговора оба знали одинаковый набор сплетен.

Утверждение 2. При $n > 4$ ни один из сплетников не может перед своим последним разговором знать $k - 1$ объединенных сплетен.

Доказательство. Если сплетник A перед последним разговором знает $k - 1$ объединенную сплетню, то его собеседник B в этом последнем разговоре знал всего одну объединенную сплетню. Обозначим через B_1 первого собеседника сплетника B , через A_1 — собеседника A в предпоследнем разговоре. Теперь ясно, что сплетни B и B_1 могут быть известны только перечисленным в этом рассуждении персонажам. \square

Из этих двух утверждений сразу следует, что при $n = 6$ схема NODUP невозможна: так как после первых звонков сплетни попарно объединились, то в любом последнем звонке участники могут знать лишь 2 и 4 сплетни, что запрещено вторым утверждением.

Разберем случай $n = 10$. В силу запрета из утверждения 2 в последнем разговоре могут участвовать лишь сплетники, один из которых знает две объединенные сплетни, а другой — три. Таким образом, перед тем как произошли k последних разговоров, было ровно 5 сплетников, знавших по 3 объединенные сплетни. Напарник каждого из этих пяти сплетников — один из этих же пяти сплетников (потому что человек, узнавший три сплетни, может после этого участвовать лишь в последнем разговоре). Таким образом, мы разбили 5 сплетников на пары. Это противоречие показывает, что единственный логически возможный случай не может быть реализован.

Разберем случай $n = 14$. В силу запрета из утверждения 2 в ни один из сплетников, участвующих в последнем разговоре, не должен знать ровно 6 сплетен. Так же, как в предыдущем параграфе, убеждаемся, что случай, в котором все сплетники в последнем разговоре знают по три или по четыре объединенные сплетни, невозможен (иначе мы найдем паросочетание на множестве из 7 сплетников, знающих 4 сплетни). Из тех же соображений должно быть четное число пар сплетников, знающих в последнем разговоре 2 или 5 сплетен. Тогда имеется нечетное количество пар сплетников, знающих в последнем разговоре 3 или 4 сплетни, и чтобы в очередной раз не возникло противоречия, напарник хотя бы одного из сплетников, знавших в последнем разговоре 4 сплетни, должен перед своим последним разговором «выучить» пятую сплетню.

Введем обозначения. Пусть A — сплетник, знавший в последнем разговоре объединенные сплетни номер 1, 2, 3, 4; B — его напарник, выучивший после разговора с A , сплетню номер 5 (в разговоре с C , знавшим только эту одну сплетню). Пусть B и C свои последние разговоры провели со сплетниками D и E , знавшими лишь 7-ю и 8-ю сплетни, ничто нам не мешает думать, что они узнали эти сплетни друг от друга. Пусть F, G, H — сплетники, узнавшие после своего первого разговора сплетни 5, 6, 7 (и не совпадающие с уже обозначенными сплетниками).

C	5	D	6,7
	↓		
B	1,2,3,4	E	6,7
A	1,2,3,4		
F	5,6,7		
H	5,6,7		
G	6,7		

Последний собеседник сплетника A должен был знать сплетни 5, 6, 7. В силу симметрии обозначений F, G, H , мы можем считать, что сначала F и G поговорили друг с другом, потом F поговорил с H и, наконец, F стал последним собеседником для A . Но теперь единственный способ для G узнать объединенную сплетню, известную изначально H (даже с учетом того, что мы рассматриваем сейчас не всех 14 сплетников), — это поговорить с ним. При этом G услышит повторно сплетню от F .

Случай $n = 18$ еще хуже.

4.4. Ответ: при $n = 1, 2, 4, 8, 12, 16$ и при всех четных $n \geq 20$.

Случаи $n = 1, 2$ тривиальны. Далее полагаем $n \geq 3$. Из решения задачи 4.3 $\frac{1}{2}$ сразу следует, что при нечетных n и при $n = 6, 10, 14, 18$ NODUP-схема не существует.

Утверждение [8, леммы 5, 6 и предложение 2]. При $n \equiv 0 \pmod{4}$ возможно распространение слухов с ограничением NODUP.

Доказательство. По индукции.

Для n , являющихся степенью двойки, возможность распространения слухов следует из конструкции (1). Для $n = 12, 20$ примеры распространения слухов приведены в предыдущих задачах. Отнесем случаи $n = 4, 8, 12, 16, 20$ к базе индукции.

Докажем переход. Пусть $n \geq 24$ — очередное число, для которого мы хотим построить схему распространения слухов, а для меньших n существование такой схемы уже установлено. Заметим, что если n делится на 12, то можно разделить всех сплетников на 3 группы одинакового размера, в каждой из них число сплетников делится на 4 и меньше n , значит, внутри всех этих групп существует способ оповещения. Получим простой коллектив $(4a, 4a, 4a)$, $a = n/12$, который является суммой a сплоченных простых коллективов $(4, 4, 4)$. Если n не делится на 12, то $n = 12a + r$, где остаток $r = 4$ или 8. Если удастся разбить остаток на слагаемые $r = r_1 + r_2 + r_3$ таким образом, чтобы $4a + r_i$ сплетников по-прежнему образовывали группу, а (r_1, r_2, r_3) образовывали бы сплоченный коллектив, то все будет доказано. Действительно, тогда мы организуем три группы размера $4a + r_1, 4a + r_2, 4a + r_3$, а сумма будет содержать одно новое слагаемое — коллектив из r сплетников. Остаток $r = 4$ слишком мал, но всегда можно приписать к нему $12k$. Пусть $k = 1$, получаем коллектив $(4(a - 1) + 4, 4(a - 1) + 4, 4(a - 1) + 8)$, раскладывающийся в сумму из $a - 1$ коллективов $(4, 4, 4)$ и коллектива $(4, 4, 8)$. При $r = 8$ можно положить $k = 2$ и все аналогично.

Утверждение [8, леммы 7, 8, 9 и предложение 3]. При $n \equiv 2 \pmod{4}$, $n \geq 22$ возможно распространение слухов с ограничением NODUP.

Доказательство. Мы наметим лишь план действий, подробности см. в [8].

Будем доказывать утверждение по индукции. База здесь представляет некоторую проблему: нужно проверить существование NODUP-схемы для всех четных маленьких n (а именно, при $20 \leq n \leq 62$).

Заметим, что если бы n делилось на 16, то можно было бы разделить сплетников на 4 группы одинакового размера, образующих простой сплоченный коллектив $(4a, 4a, 4a, 4a)$, $a = n/16$ (в каждой группе число сплетников делится на 4, а для таких чисел уже все доказано).

Но в рассматриваемом случае n не делится даже на 4, значит, $n = 16a + r$, где остаток r может быть равен 2, 6, 10, 14. Если в каждом из этих случаев удастся разбить остаток на слагаемые $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ таким образом, чтобы для $4a + r_i$ сплетников существовал способ оповещения и коллектив (r_1, r_2, r_3, r_4) был сплоченным, то мы получим доказательство утверждения для n сплетников все получится. Действительно, тогда можно было бы разбить n сплетников на группы $4a + r_1, 4a + r_2, 4a + r_3, 4a + r_4$, а потом разбиваем коллектив на слагаемые: $(4a, 4a, 4a, 4a)$ и (r_1, r_2, r_3, r_4) .

Однако остатки 2–14 слишком маленькие. Можно приписать ко всем остаткам $16k$. Полагая $k = 3$, получаем сплоченный коллектив $(4a, 4a, 4a, 4a)$, где $a \geq 3$, и остатки $r = 50, 54, 58, 62$. Например, в первом случае $r = 50 = 8 + 8 + 12 + 22, (8, 8, 12, 22)$ — сплоченный коллектив, и для $n = 4a + 8, 4a + 12, 4a + 22$ существует способ оповещения в силу базы индукции. В случае остатков $r = 54, 58, 62$ можно выполнить аналогичную конструкцию.

4.4 $\frac{1}{2}$. Это лемма 2.5 [10]. Заметим, что в любой схеме оповещения с ограничением NODUP сплетники разбиваются первыми звонками на пары (как в задаче 1.6). Доказательство см. в начале решения задачи 4.3 $\frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что утверждение задачи неверно, и некоторый сплетник A поговорил по телефону всего два раза. Пусть первый раз он беседовал со сплетником B , тогда после их беседы A -слух и B -слух циркулируют вместе. Если во второй раз A беседовал с C , то в этот момент C знал все слухи, кроме A -слуха и B -слуха. Если предыдущий разговор сплетника C был с D , то D тот момент тоже знал все слухи, кроме A -слуха и B -слуха. Единственный возможный способ для D завершить ознакомление со слухами — это поговорить с B , когда B знает только эти два слуха. Но тогда A -слух и B -слух не станут известны остальным $n - 4$ сплетникам.

4.5. Следующее утверждение доказано в заметках Д. Веста [13] и А. Сереша [10, § 3]

Утверждение Пусть $n = 4k$. Тогда достаточно $9k - 6$ звонков.

Доказательство. Разобьем сплетников на k групп по 4 человека, в каждой из которых организуем звонки таким образом, чтобы все узнали сплетни своей группы. Это можно сделать за $4k$ звонков. Теперь поделим сплетников на два одинаковых множества по $2k$ человек, в каждое попадет пара сплетников, знающая все сплетни i -той группы, $i = 1, \dots, k$. Организуем звонки в первом множестве таким образом, чтобы все сплетники разбились на пары и каждая пара сплетников узнала все сплетни, кроме одной. Тогда каждой паре сплетников первого множества будет соответствовать пара сплетников из второго множества, с которой они могут поговорить, чтобы узнать все. Для этого потребуется $2k$ звонков. Осталось в первом множестве построить нужную конфигурацию из $3k - 6$ звонков.

Нужная последовательность звонков показана на рисунках 3–5. Пронумеруем сплетников первого множества и расположим их на окружности. Сначала $k - 2$ звонка делает второй сплетник: он звонит всем сплетникам, имеющим нечетные номера, кроме $(2k - 1)$ -го: 3, 5, 7, ... (именно в такой последовательности). Следующие $k - 2$ звонка делает $(2k - 1)$ -й сплетник: он звонит всем сплетникам, имеющим четные номера, кроме второго: $2(k - 1), 2(k - 2), \dots$ (тоже последовательно). После этих звонков 4 сплетника уже знают все сплетни, кроме одной, а именно: второй и $(2k - 3)$ -й сплетники знают все сплетни, кроме k -й, а четвертый и $(2k - 1)$ -й — все сплетни, кроме первой, см. рис. 5. Остальных сплетников разобьем на пары: для $i = 2, \dots, k - 1$ пусть сплетник, знающий сплетни 1, 2, ..., $i - 1$, позвонит сплетнику, знающему сплетни $i + 1, i + 2, \dots, n$ (см. рис. 5), в результате чего образуется пара сплетников, знающая все сплетни, кроме i -й. На это потребуется еще $k - 2$ звонков.

4.6. Это доказано в статье [10, теорема 4.1].

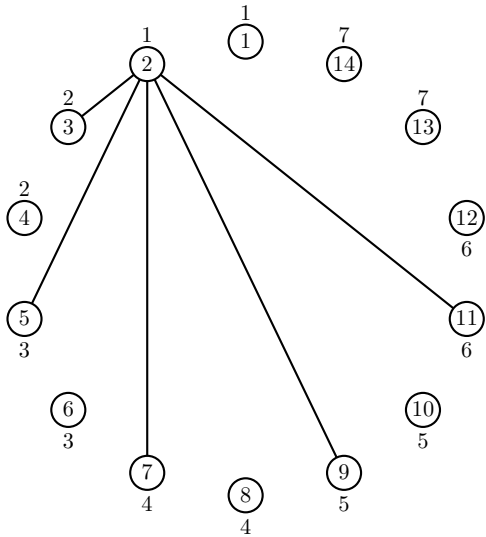


Рис. 3. В кружках номера сплетников первого множества. Линии означают звонки второго сплетника. Рядом с кружком записаны номера объединенных сплетен, известных этому сплетнику до показанных на рисунке звонков.

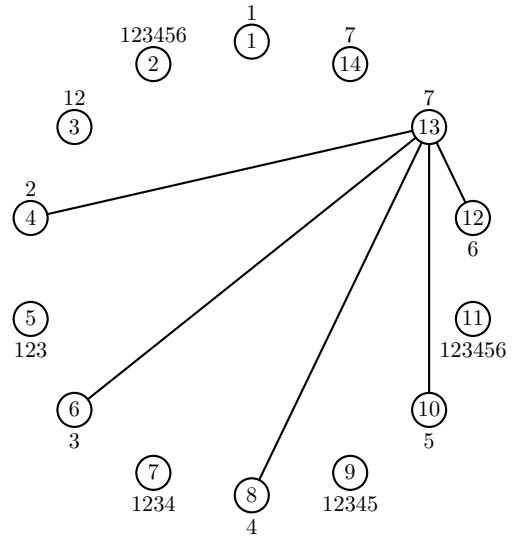


Рис. 4. Линии означают звонки $2k - 1$ -го сплетника

5.1. а) Ответ: $(n - 1)(k + 1)$ телеграмм.

Мы взяли это утверждение в [2, Теорема 4.1].

Пример. Пусть каждый рядовой пошлет $k + 1$ телеграмму генералу.

Оценка. Каждый рядовой должен послать не менее $k + 1$ телеграммы.

б) Ответ: $(k + 2)n - 2$ телеграммы.

Мы взяли это утверждение в [2, Теорема 4.2]

Пример. Приведем пример ориентированного графа, в котором от каждой вершины до любой другой существует $k + 1$ реберно непересекающихся восходящих путей. Проведем $k + 2$ ребра от вершины с номером i к вершине с номером $i + 1$ с весами $i, n + i, 2n + i, \dots, (k + 1)n + i$ при $i = 1, 2, \dots, n - 2$; $k + 1$ ребро от вершины с номером $n - 1$ к вершине с номером n с весами $n - 1, 2n - 1, \dots, (k + 1)n - 1$ и $k + 1$ ребро от вершины с номером n к вершине с номером 1 с весами $n, 2n, \dots, (k + 1)n$. На рис. 6 показан пример такого графа при $n = 6$,

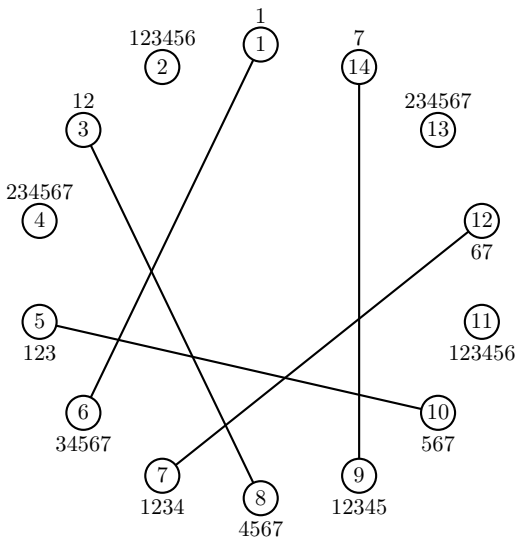


Рис. 5. с) Оставшиеся звонки в первом множестве.

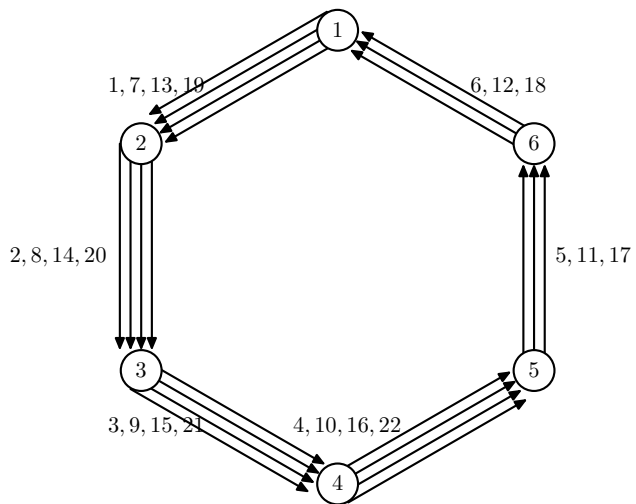


Рис. 6. Плохая почта

$k = 2$.

Оценка. Пусть дан граф звонков, в котором от каждой вершины до любой другой доходят телеграммы даже в случае удаления k ребер. Пусть H — подграф этого графа, содержащий только первые $n - 2$ ребер. Граф H не является связным. Значит, для каждой вершины существует по крайней мере $k + 1$ ребро, не лежащее в H . Следовательно, общее число ребер графа звонков не меньше $(n - 2) + (k + 1)n$.

5.2. Это утверждение мы взяли в статье [2, теорема 2.1].

Для построения примеров нам понадобится граф на n вершинах, обозначим его T_n , в котором у генерала степень 0 или 1, остальные вершины имеют степень k , где $k \leq n - 1$. Строение T_n зависит от четности n и k . Пронумеруем вершины, пусть номер генерала равен n . При четном k между вершинами с номерами i и j , $1 \leq i < j \leq n - 1$, есть ребро, если $((i - j) \bmod (n - 1)) \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k/2\}$. Если k нечетно, а n четно, то проведем ребра при $((i - j) \bmod (n - 1)) \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(k - 1)/2\}$, а также добавим любое паросочетание на n вершинах. Если n и k оба нечетные, то проведем ребра при $((i - j) \bmod (n - 1)) \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(k - 1)/2, (n - 1)/2\}$.

Вернемся к решению задачи. Напомним, что в графе звонков могут быть кратные ребра. Чтобы следить за порядком совершения звонков, поставим на ребрах метки (вещественные числа): чем позже был звонок, тем крупнее должна быть соответствующая метка. Допустимы одинаковые метки звонков, если звонки совершаются последовательно и при этом могут быть переставлены друг с другом. Назовем путь в графе звонков *восходящим*, если при движении вдоль пути веса ребер возрастают.

а) Поскольку после удаления k ребер граф должен остаться связным, степень каждой вершины не может быть меньше $k + 1$. Так как сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер, получаем, что число звонков больше либо равно $\lceil \frac{k+1}{2} \cdot n \rceil$.

Осталось предъявить граф, который обеспечивает возможность передать все слухи генералу и у которого все вершины имеют степень $k + 1$ (при неблагоприятной четности одна из вершин будет вынуждена иметь степень $k + 2$). При $k \geq n - 1$ такой граф действительно существует, а при меньших k имеются проблемы с расстановкой весов.

Поделим $k + 1$ на $n - 1$ с остатком: $k + 1 = a(n - 1) + b$, где $a > 0$, $0 \leq b < n - 1$. Построим граф, состоящий из объединения a графов K_n (полных графов на n вершинах) и графа R , у которого все вершины имеют степень b , кроме вершины-генерала, степень которой равна b или $b + 1$. Такой граф нетрудно построить, взяв граф T_{n+1} из начала решения и объединив вершину-генерала с одной из «обычных» вершин. Теперь назначим веса ребер. Пусть самые маленькие веса имеют ребра графа R , не соединенные с генералом. Пусть ребра графов K_n , тоже не соединенные с генералом, имеют вес побольше. А ребра всех графов, соединенные с генералом, имеют самые большие веса. Внутри каждого из этих трех множеств ребер веса могут быть упорядочены произвольно. Тогда от каждой вершины до генерала идут $k + 1$ непересекающихся по ребрам путей. Следовательно, даже после удаления из графа произвольных k ребер информация все равно дойдет до генерала. Все вершины построенного графа имеют степень $k + 1$, кроме генерала, который может иметь степень $k + 1$ или $k + 2$.

б) При $k = 0$ граф звонков должен быть связным, следовательно, в нем не менее $n - 1$ ребер, а с другой стороны, дерево, корнем которого является генерал, а все пути к корню восходящие, является примером подходящего графа.

Рассмотрим теперь граф звонков при $1 \leq k < n - 1$. Возьмем произвольную вершину v (отличную от генерала) и среди инцидентных ей ребер выберем ребро ℓ максимального веса. Пусть некоторый восходящий путь проходит через это ребро: он пришел в вершину v по ребру меньшего веса и вышел по ребру ℓ . Перенаправим ребро ℓ сразу в вершину-генерала. В результате число ребер графа осталось прежним и, как нетрудно видеть, после этого изменения генерал по-прежнему сможет получить все слухи в условиях плохой связи. Сделаем такую операцию для всех вершин, тогда каждая вершина окажется соединенной с генералом. Значит, степень генерала не меньше $n - 1$. Суммируя степени вершин, получаем теперь, что

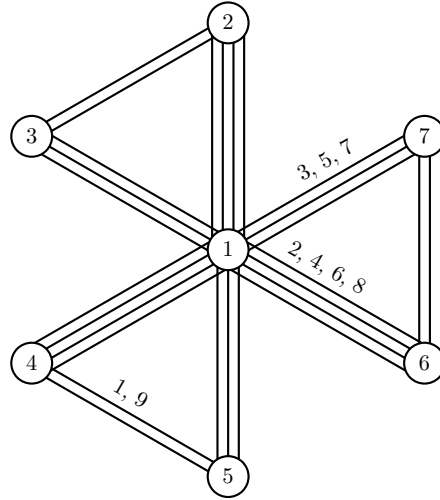


Рис. 7. Конструкция графа

число звонков больше либо равно $\lceil \frac{(k+1) \cdot (n-1) + (n-1)}{2} \rceil$.

Теперь построим граф, обеспечивающий генерала слухами, в котором степени всех рядовых равны $k + 1$, а степень генерала равна $n - 1$ или n (за счет кратного ребра, при неблагоприятной четности). Возьмем граф T_n , описанный в начале решения, произвольно назначим (небольшие) веса его ребер, после чего соединим все вершины T_n с генералом, назначив новым ребрам большие веса.

5.3. [2, Теорема 3.1]

а) Приведем пример подходящего графа звонков. Пусть n нечетно. Тогда от каждой вершины с нечетным номером, не равным 1, проведем k ребер к вершине с номером 1 с весами $3, 5, \dots, 2k + 1$, а от каждой вершины с четным номером проведем $k + 1$ ребер к вершине с номером 1 с весами $2, 4, \dots, 2k + 2$. Теперь проведем два ребра между вершинами с номерами i и $i + 1$ с весами 1 и $2k + 3$. Получилось много ребер с одинаковыми весами. В данном случае веса ребер обозначают не номера звонков, а имеется в виду, что ребра разбиваются на классы (множества ребер с одинаковыми весами), в каждом классе ребра могут быть упорядочены произвольно, но ребро класса i всегда имеет меньший номер, чем ребро класса j при $i < j$. Пример такого графа при $n = 7$ и $k = 3$ показан на рис. 7. Можно проверить, что тогда от каждой вершины до каждой проходят $k + 1$ реберно непересекающихся путей.

Если n четно, то к предыдущей конструкции присоединим еще одну вершину, соединив ее $k + 1$ ребром с первой вершиной, веса ребер будут $2.5, 3.5, 5.5, 7.5, \dots, 2k + 1.5$.

б) Оценим $\tau(n, k)$ через $\mu(n, k)$. Пусть G — граф звонков, в котором даже после удаления k ребер информация от каждой вершины будет доходить до любой другой. Посмотрим на ситуацию после того, как мы сделали r первых звонков. Оставшиеся звонки образуют граф на тех же вершинах, который будем называть H . Рассмотрим произвольную вершину v графа H . Заметим, что этой вершине для получения полной информации (даже с учетом удаления k ребер) требуются только первые r звонков и звонки внутри ее компоненты связности в графе H . Значит, число ребер графа, содержащего ребра, которые ей могут пригодиться, больше либо равно $\mu(n, k)$. Будем считать, что $r = \mu(n, k) - \xi$, где ξ подберем таким образом, чтобы получить наилучшую оценку. Очевидно, $|E(G)| = r + |E(H)|$. Чтобы оценить число ребер H снизу, будем считать, что вершина v лежит в компоненте связности наименьшего размера, пусть l — число ребер этой компоненты, тогда количество компонент не меньше $\frac{n}{l}$, и $|E(H)| \geq n - \frac{n}{l}$ (правая часть — это количество ребер в графе в предположении, что все компоненты содержат по l вершин и являются деревьями). При этом $l \geq \xi$, так как в противном случае рассматриваемая вершина v может не получить полной информации, следовательно, $|E(H)| \geq n - \frac{n}{\xi}$. Получим $|E(G)| \geq (\mu(n, k) - \xi) + E(H) \geq (\mu(n, k) - \xi) + (n - \frac{n}{\xi})$. Правая часть

минимальна при $\xi = \sqrt{n}$ и мы получаем неравенство $E(G) \geq \mu(n, k) + n - 2\lceil \sqrt{n} \rceil$.

5.4. Мы взяли это утверждение в [3, Теорема 3.2].

а) Как обычно, оценка сверху получается предъявлением примера. Пусть R — регулярный (или почти регулярный) (мульти)граф на n вершинах, в котором каждая вершина имеет степень k (за исключением, возможно, одной вершины, имеющей степень $k + 1$). Рассмотрим следующую схему оповещения. Сначала выполним $2n - 4$ звонка в соответствии с любым наибоыстрейшим способом оповещения. После этого произвольно выполним звонки, соответствующие ребрам графа R . Все слухи, полученные всеми сплетниками в этой схеме, очевидно, являются надежными. При этом схема содержит $\lceil \frac{(k+4)n}{2} \rceil - 4$ звонков.

б) Лемма 1 [3, лемма 3.1]. Пусть дано дерево T на n вершинах, в котором на каждом ребре задан вес, позволяющий «хронологически» упорядочивать ребра. Для каждой вершины u обозначим через r_u наибольшее количество вершин, в которые можно прийти из вершины u , двигаясь так, чтобы вес при движении возрастал. Минимальное по всем вершинам дерева значение r_u обозначим через $R(T)$. Обозначим через $r(n)$ максимум величины $R(T)$ по множеству всех ориентированных деревьев T с n вершинами. Тогда $r(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Доказательство. Рассмотрим дерево T , для которого $R(T) = r(n)$. Пусть xy — ребро максимального веса, T_x, T_y — компоненты связности, которые получаются после его удаления ($x \in T_x, y \in T_y$). Можно считать, что в T_x не больше вершин, чем в T_y , тогда $R(T_x) \leq r(\lfloor n/2 \rfloor)$. Выберем в T_x вершину u , реализующую значение $R(T_x)$. В дереве T путь из вершины u не может пройти в компоненту T_y дальше вершины y , поскольку xy — ребро максимального веса. Тогда $r(n) = R(T) \leq r_u + 1 = R(T_x) + 1 \leq r(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$. Вместе с начальным условием $r(1) = 0$ мы получаем неравенство $r(n) \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Пример, реализующий равенство, строится по индукции. На очередном шаге берем две копии дерева, служащего примером для $n - 1$, и, сохраняя относительный порядок ребер внутри каждой копии, соединяем их корни ребром максимального веса. \square

Лемма 2 [3, следствие 2.1]. Пусть в (мульти)графе G на n вершинах на каждом ребре задан вес, с помощью которого можно хронологически упорядочить ребра. Пусть u — фиксированная вершина графа G . Пусть оказалось, что для каждой вершины $v \neq u$ существует не менее k возрастающих путей из u в v , которые отличаются друг от друга последними ребрами. Пусть, наконец, среди всех графов с такими свойствами граф G имеет наименьшее число ребер. Тогда в нем $\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \rceil$ ребер.

Доказательство. Граф G представляет собой объединение остовного дерева и k -регулярного подграфа (или почти k -регулярного подграфа) на множестве всех вершин, за исключением u . В этом случае формула очевидна.

Построим это остовное дерево: для каждой вершины $v \neq u$ отметим ребро e_v с наименьшим весом, принадлежащее какому-нибудь восходящему пути из u в v . Мы отметили $n - 1$ ребер, они задевают все вершины графа (минимальное ребро вершины u тоже окажется отмеченным), поэтому это остовное дерево. Далее, среди ребер вершины v ребро e_v — единственное ребро, принадлежащее хоть какому-то восходящему пути из u в v . Действительно, если ребро e_w инцидентно вершине v и лежит на пути из u в v , то этот путь проходит через w и тогда он должен входить в w по ребру, у которого вес меньше, чем вес e_w , что невозможно. Таким образом, граф G для каждой вершины u содержит, помимо e_u , еще не менее k ребер, инцидентных u . Ясно, что минимальное число ребер будет в k -регулярном случае. \square

С помощью этих двух лемм решим задачу. Пусть имеется способ оповещения, обеспечивающий сплетников надежными слухами. Первые $n - 1$ звонков этого способа оповещения задают подграф H в графе звонков. В силу малости количества звонков хотя бы одна из компонент подграфа H является деревом, обозначим его T . По лемме 1 в дереве T можно выбрать вершину u , из которой можно добраться по возрастающим путям лишь не более чем в $\lfloor \log_2 n \rfloor$ вершин. Уберем ребра всех этих путей из графа H , полученный граф назовем H' , он содержит не менее $n - 1 - \lfloor \log_2 n \rfloor$ ребер.

Для графа $G - H'$ и вершины u выполнены условия леммы 2 (отброшенные нами ребра не могли быть использованы для построения путей из вершины u , так как они были хронологически «слишком ранними»), значит, в нем не менее $\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \rceil$ ребер. Тогда в G не менее $n - 1 - \lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \rceil$ ребер.

6.1. а) [5, Лемма 3] Индукция по k . База тривиальна. Для доказательства перехода отменим первый звонок. В результате дерево окажется разбитым на две компоненты, в каждой из которых перестанет быть известным один слух из противоположной компоненты. По индукционному предположению тогда каждая из компонент содержит не менее 2^{k-1} вершин.

Пункт б) решается аналогично.

6.2. Пример [5, Лемма 1]. Поделим n на 2^{k-1} с остатком: $n = 2^{k-1}n_1 + n_2$. Разобьем сплетников на n_1 групп по 2^{k-1} человек и последнюю группу из n_2 человек. В каждой группе из 2^{k-1} человек можно сделать 2^{k-1} звонок так, чтобы в результате все члены группы знали по k слухов (двое звонят друг другу — в результате двое знают по 2 слуха; потом каждый из них разговаривает новым членом группы, в результате четверо знают по 3 слуха; потом каждый из четырех разговаривает с новым членом группы, в результате восемь человек знают по 4 слуха и т.д.). Что касается последней группы, пусть каждый человек из нее позвонит кому-нибудь из первых групп, когда там уже закончатся звонки, чтобы узнать k слухов. Итого, $P(n, k) \leq (2^{k-1} - 1)n_1 + n_2 = \lceil \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \cdot n \rceil$.

Оценка [5, Лемма 4]. Докажем оценку $P(n, k) \geq \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}n$, не накладывая никаких условий на k .

Рассмотрим последовательность, дающую $P(n, k)$ звонков. Пусть для каждого $i \geq 1$ этот граф звонков G имеет n_i компонент связности, содержащих i вершин, тогда

$$\sum_i i n_i = n.$$

Заметим, что каждая компонента с i вершинами имеет не менее $i - 1$ ребер. Более того, по утверждению задачи 6.1 малые компоненты (те, для которых $i < 2^{k-1}$) не могут быть деревьями, значит, в них не менее i ребер. Таким образом,

$$P(n, k) \geq \sum_{i < 2^{k-1}} i n_i + \sum_{i \geq 2^{k-1}} (i - 1) n_i.$$

Осталось заметить, что $i - 1 \geq \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}i$ при $i \geq 2^{k-1}$, и следовательно,

$$P(n, k) \geq \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \sum_i i n_i = \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} n.$$

6.3. [5, Лемма 2] Выделим из множества всех сплетников два непересекающихся набора: набор X , состоящий из i сплетников, и набор $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{2^{k-i-2}}\}$ из 2^{k-i-2} сплетников. Звонки организуем следующим образом. Сначала каждый человек из множества X сообщает сплетнику y_1 свой слух. В результате сделано i звонков, а сплетник y_1 знает теперь $i + 1$ слух. Далее итерационным процессом мы начинаем удваивать число «осведомленных» сплетников в множестве Y . База: делаем звонки: $y_1 y_2, y_3 y_4, y_1 y_3, y_2 y_4$; в результате сделано 4 звонка и первые 4 человека из множества Y знают по $i + 4$ слуха. Переход. Если на предыдущем шаге первые 2^r человек из множества Y знали $i + r + 2$ слуха, то на очередном шаге мы делаем 2^r звонков

$$y_1 y_{1+2^r}, \quad y_2 y_{2+2^r}, \quad \dots, \quad y_{2^r} y_{2^r+1}$$

и теперь первые 2^{r+1} сплетников из множества Y знают по $i + r + 3$ слухов. Процесс завершится, когда будет «охвачено» все множество Y . К этому моменту будет всего сделано $i + 2^{k-i-2}$

звонков и все сплетники из Y будут знать k слухов. После этого пусть y_1 позвонит всем сплетниками не из Y , сообщив им свои k слухов. Таким образом, $P(n, k) \leq i + 2^{k-i-2} + (n - 2^{k-i-2}) = n + i$.

В этом рассуждении мы использовали лишь неравенство $t_i \leq n$.

6.4. Пусть имеется последовательность c_i звонков сплетников ($1 \leq i \leq s$). Заметим, что если во время некоторого звонка c_i поговорили два человека, а следующий звонок c_{i+1} осуществляют два других человека, то мы можем переставить эти звонки друг с другом, что не повлияет на результат распространения сплетен с помощью данной последовательности звонков. Такое же *перестановочное правило* действует для наборов из нескольких звонков: если две группы из нескольких последовательных звонков $c_{j-p}, c_{j-p+1}, \dots, c_{j-1}$ и $c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+q-1}$ непосредственно следуют одна за другой и не пересекаются по множеству разговаривавших в них людей, эти две группы звонков можно поменять местами. Получится последовательность

$$c_1, \dots, c_{j-p-1}, \quad c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+q-1}, \quad c_{j-p}, c_{j-p+1}, \dots, c_{j-1}, \quad c_{j+q}, \dots, c_s,$$

которая дает то же финальное распределение сплетен, что и исходная. Последовательности звонков, полученные друг из друга с помощью таких перестановок, будем называть *эквивалентными*.

С учетом результата предыдущей задачи, для доказательства требуемого утверждения достаточно проверить, что при $t_i \leq n < t_{i-1}$, где $0 \leq i \leq k - 4$, имеет место неравенство $P(n, k) \geq n + i$. Мы докажем более тонкий вариант этого неравенства [5, Лемма 5], из которого это утверждение сразу следует. Будем называть сплетника *осведомленным*, если в результате разговоров он узнает не менее k слухов.

Лемма. Предположим, что $n \leq t_{i-1} - 1$, где $0 \leq i \leq k - 4$. Пусть c_1, \dots, c_{i+j} — последовательность из $i + j$ звонков. Тогда

- 1) в результате этих звонков образовалось не более j осведомленных сплетников;
- 2) если в результате этих звонков образовалось ровно j осведомленных сплетников (запомним их), то существует эквивалентная последовательность c'_1, \dots, c'_{i+j} , в которой последние j звонков $c'_{i+1}, c'_{i+2}, \dots, c'_{i+j}$ были только строго между осведомленными сплетниками (т.е. только между теми людьми, которых мы запомнили).

Доказательство. Индукция по j .

База $1 \leq j \leq k - i - 2$. Тогда $i + j \leq k - 2$, т.е. любая компонента связности графа звонков содержит не более $k - 1$ вершины, поэтому ни один из сплетников пока еще не стал осведомленным. Оба доказываемых утверждения оказались неинтересными.

Переход. Пусть $j \geq k - i - 1$, и для $j' = j - 1$ выполняется предположение индукции.

Докажем утверждение 1). Пусть в результате последовательности из j звонков имеется $j + 1$ осведомленный сплетник. Поскольку в результате последнего звонка c_{i+j} могло появиться не более двух осведомленных сплетников, к моменту завершения звонка c_{i+j-1} было в точности $j - 1$ осведомленных сплетников x_1, \dots, x_{j-1} , а последний звонок состоялся между «новыми» осведомленными сплетниками x_j и x_{j+1} . В силу второго утверждения предположения индукции мы можем считать, что все звонки $c_{i+1}, \dots, c_{i+j-1}$ были строго между сплетниками x_1, \dots, x_{j-1} , и тогда эту группу звонков можно переставить с c_{i+j} . Но тогда в результате $i + 1$ звонка $c_1, c_2, \dots, c_i, c_{i+j-1}$ появилось два осведомленных сплетника. Этого не может быть, поскольку при ограничениях $i \leq k - 4$ на переменную i не может появиться вообще ни одного осведомленного сплетника (компонента связности, содержащая осведомленного сплетника — это как минимум дерево, содержащее k вершин, поэтому в ней не менее $k - 1 > i + 1$ ребер).

Докажем утверждение 2). Предположим что в результате $i + j$ звонков мы имеем ровно j осведомленных сплетников, но при этом последние j звонков затрагивали не только этих сплетников. Тогда выберем максимально возможное p , такое что последние звонки $c_{i+p+1}, \dots, c_{i+j}$ были только между осведомленными сплетниками. Заметим, что тогда один из собеседников звонка c_{i+p} — тоже осведомленный, так как иначе мы могли бы перенести

этот звонок в конец последовательности звонков и мы получили бы тех же j осведомленных сплетников уже после $i + j - 1$ звонков, что противоречит предположению индукции.

Пусть G — граф звонков, G' — его подграф, образованный звонками c_{i+p}, \dots, c_{i+j} .

Рассмотрим сначала случай, когда $p = 1$ и при этом граф G' оказался связным. Тогда G' — дерево (в нем j ребер и $j+1$ вершина — все осведомленные сплетники и один неосведомленный участник звонка c_{i+p}). Рассмотрим компоненту C' графа G , которая содержит G' . Пусть эта компонента содержит i' вершин вне G' , тогда она должна содержать еще по крайней мере i' ребер (кроме ребер, лежащих в G'). Эти ребра задают какие-то из звонков c_1, \dots, c_i , поэтому $i' \leq i$. Удалим эти i' звонков из полной последовательности звонков, это приведет к тому, что по окончании звонков в дереве G' все сплетники, кроме одного, будут знать не менее $k - i'$ слухов. Тогда по утверждению задачи 6.1 б) выполнено неравенство $j + 1 \geq 2^{k-i'-1} - 1$. Тогда

$$t_{i-1} - 1 = i - 2 + 2^{k-i-1} \geq n \geq i' + j + 1 \geq i' + 2^{k-i'-1} - 1 \geq i + 2^{k-i-1} - 1 = t_{i-1}.$$

Противоречие. В последнем неравенстве мы воспользовались убыванием последовательности t_i .

Теперь рассмотрим остальные случаи: когда $p > 1$ или граф G' состоит из двух или более компонент. Обозначим через C компоненту графа G' , содержащую звонок c_{i+j} . Переобозначим звонки: пусть $c'_1 = c_{i+j}$, c'_2, \dots, c'_r — это звонки в хронологическом порядке, совершенные в компоненте C , и пусть $c''_1, c''_2, \dots, c''_s$ — остальные звонки в G' . В обоих рассматриваемых случаях $r < j$ (а вот параметр s может быть равен нулю, когда $p > 1$).

В силу перестановочного правила все звонки c''_1, \dots, c''_s можно осуществить до звонков c'_1, \dots, c'_r , т. е. исходная последовательность звонков эквивалентна последовательности

$$c_1, c_2, \dots, c_{i+p-1}, \quad c''_1, \dots, c''_s, \quad c'_1, \dots, c'_r.$$

Поскольку звонок c'_1 затрагивает только одного осведомленного сплетника, компонента C содержит не более r осведомленных сплетников (в ней r ребер и не более $r + 1$ вершин). Значит, после $i + j - r$ звонков из выписанной последовательности образовалось не менее $j - r$ осведомленных сплетников. Тогда по индукционному предположению количество осведомленных сплетников должно быть в точности равно $j - r$ (и тогда компонента C содержит ровно r осведомленных сплетников), и можно реорганизовать эти $i + j - r$ звонков так, что последние $j - r$ звонков будут между осведомленными сплетниками (не лежащими в C):

$$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_{i+j-r}, \quad c'_1, \dots, c'_r.$$

Так как в этой последовательности звонки $\tilde{c}_{i+1}, \dots, \tilde{c}_{i+j-r}$ совершаются между осведомленными сплетниками не из C , мы можем переставить их со звонками c'_1, \dots, c'_r . Получится эквивалентная последовательность

$$\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_i, \quad c'_1, \dots, c'_r, \quad \tilde{c}_{i+1}, \dots, \tilde{c}_{i+j-r}.$$

Первые $i+r$ звонков этой последовательности приводят к появлению r осведомленных сплетников. Значит, по предположению индукции можно переупорядочить эти $i+r$ звонков так, чтобы последние r звонков из них осуществлялись между осведомленными сплетниками. Сделав это, мы получим требуемое: в образовавшейся последовательности последние j звонков происходят между осведомленными сплетниками. Лемма доказана. \square

Список литературы

- [1] Шаповалов А.В. Задача о сплетниках // Математическое просвещение. Сер. 3. 2015. Вып. 19. С. 249–253
- [2] Berman K., Hawrylycz M. Telephone problems with failures // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1986. Vol. 7. P. 13–17.
- [3] Berman K., Paul J. Verifiable broadcasting and gossiping in communication networks // Discr. Appl. Math. 2002. Vol. 118. P. 293–298.

-
- [4] *Bumby R.* A problem with telephones // *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* 1981. Vol. 2. P. 13–18.
 - [5] *Chung G., Tsay Y.-J.* The partial gossiping problem // *Discr. Math.* 1996. Vol. 148. P. 9–14.
 - [6] *Harary F., Schwenk A.J.* The communication problem of graphs and digraphs // *J. Franklin Inst.* 1974. Vol. 297. P. 491–495.
 - [7] *Kleitman D. J., Shearer J. B.* Further gossip problems // *Discr. Math.* 1980. Vol. 30. P. 151–156.
 - [8] *Seress A.* Gossiping old ladies // *Discrete Math.* 1983. Vol. 46. P. 75–81.
 - [9] *Seress A.* Gossips by conference calls // *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.* 1987. Vol. 22. P. 229–238.
 - [10] *Seress A.* Quick Gossiping without Duplicate Transmissions // *Graphs and Combinatorics.* 1986. Vol. 2 P. 363–381.
 - [11] *Tijdeman R.* On a telephone problem // *Nieuw Arch. Wisk.* 1971. Vol. 19. P. 188–192.
 - [12] *West D.* A class of solutions to the gossip problem, I // *Discrete Mathematics.* 1982. Vol. 39. P. 307–326.
 - [13] *West D.* Gossiping without duplicate transmissions // *SIAM J. Alg. Disc. Math.* 1982. Vol. 3. P. 418–419.
 - [14] *West D.* Introduction to graph theory. 2nd edition. Univ. of Illinois, 2001.