Gossiping

Bursian O., Kokhas K., Kuyumzhiyan K.

1 Gossip problem

Each of $n > 3$ individuals (gossipers) knows a unique piece of information (a gossip) which is not known to the others. Gossipers communicate by phone. At each call, two gossipers participating in it pass on to each other all the gossips they know at that time. Each gossiper wants to transmit his gossip to every other person. A calling sequence which completes gossiping among n people is called a *gossip scheme*.

The aim of this set of problems is to find the minimal number of calls in a gossip scheme for each n. The schemes that contain this number of calls are called *fastest*. There may exist different fastest schemes for some n.

1.1. What minimal number of calls is needed for 4 gossipers?

1.2. Prove that for each gossip scheme, the reversed sequence of calls is a gossip scheme again.

1.3. Prove that there exist gossip schemes of $2n - 4$ calls.

Assume that n gossipers have a gossip scheme of at most $2n-5$ calls. Choose the minimal n for which we can find such a scheme. We call this n *interesting*, and by a *superfast* scheme we mean the fastest gossip scheme for this n. In the next problems we study properties of superfast schemes.

1.4. Let n be an interesting number. Prove that no two gossipers A and B communicate twice in the superfast scheme.

1.5. Let n be an interesting number. A sequence of calls is such that at some moment gossiper A calls to gossiper B, later B calls to C, and after that C calls to A. Prove that this sequence of calls is not superfast.

1.6. Gossipers make calls according to a superfast scheme. Fix a call from a gossiper A to a gossiper B. It turned out that this call is the last call of A in this scheme. Prove that this call is also the last call of B in this scheme.

1.7. Prove that if in a superfast scheme gossiper A calls to gossiper B, then they knew no common gossip before this call.

1.8. Prove that a superfast scheme contains at least $2n - 5$ calls.

1.9. Prove that in a superfast scheme each gossiper makes at least 3 calls.

1.10. For each n, prove that a fastest gossip scheme consists of $2n - 4$ calls.

2 Uncommunicative gossipers

Suppose that not all n gossipers know each other, and that gossipers can call only the persons they know. Let F be a graph that depicts familiarity between persons. We assume that the graph F is connected. The aim of gossipers is to transmit all their gossips to all the others by minimal number of calls.

After several calls, we can construct a *communication graph* G: its vertices are gossipers and edges are calls (multiple edges are allowed). As to the order of the calls, this information is not presented in the graph. To keep the order, we can label its edges.

2.1. Prove that for each connected graph F the fastest scheme consists of $2n-4$ or $2n-3$ calls.

2.2. Prove that if a graph F contains a 4-cycle then the fastest scheme consists of $2n - 4$ calls.

2.3. Prove that if a graph F contains a unique cycle C_k $(k \neq 4)$ then the fastest scheme consists of $2n - 3$ calls.

2.4. Prove that if a graph F does not contain a 4-cycle then the fastest scheme consists of $2n - 3$ calls.

Let F be a connected graph that depicts familiarity between n persons, but now the gossipers communicate by telegraph, i.e. gossipers can send telegrams, and every telegram contains all the gossips known to the sender.

2.5. Which minimal number of telegrams is needed?

2.6. Consider an «economical» telegraph gossip scheme which avoids duplication of information: every gossiper receives by telegram each gossip at most once. In this scheme, it may happen that a gossiper receives a telegram which contains his own gossip. Prove that in each «economical» gossip scheme there are at least $n-1$ such gossipers.

3 Variations to a gossip problem: NOHO

Suppose that n gossipers know each other. Consider the following restriction on the call scheme: no gossiper hears his own gossip from the others (NOHO: No One Hears Own). It is clear that in a NOHO gossip scheme a communication graph G has no multiple edges (and even triangles), and all the vertices have degree at least 2.

3.1. Atypical example. Consider 10 gossipers: 3 gossipers know gossip A, 3 gossipers know gossip B, 2 gossipers know gossip C and 2 gossipers know gossip D. Does a NOHO gossip scheme exist for these people?

In the next two problems, we assume that initially everybody knows his unique gossip.

3.2. For which n do NOHO gossip schemes exist?

3.3. Prove that a NOHO gossip scheme consists of $2n-4$ calls.

4 Variations to a gossip problem: NODUP

Suppose that n gossipers know each other. Consider gossip schemes with the following restriction: before each communication, the gossipers participating in it know no common gossip (NODup: No Duplication). We met this property (of a non-existing object) in Problem 1.7.

4.1. Does a NODUP gossip scheme exist for $n = 12$?

4.2. Suppose that there are 6 groups consisting of 13, 8, 6, 5, 4, 4 gossipers, and the gossipers in one group know a unique gossip. Does a NODUP gossip scheme exist?

In the next four problems, we assume that initially everybody knows his unique gossip.

4.3. Does a NODUP gossip scheme exist for $n = 20$?

4.4. For which n do NODUP gossip schemes exist?

4.5. For infinitely many values of n and some constant c, give examples of NODUP gossip schemes with $\frac{9}{4}n + c$ communications.

4.6. Prove that a NODUP gossip scheme contains at least $\frac{9}{4}n + c$ communications for some constant c.

Addition to previous variations

A gossiper is called *expert* if he knows all the gossips. A gossiper is called *semi-expert* if there exists a non-expert among the other gossipers such that this gossiper could become expert after a communication with this non-expert. Two such semi-experts are called *complementary*.

The following idea is useful. Fix a gossip scheme and two gossipers A and B in it. If A and B become experts after the 50th communication, but their first talk was the 100th communication, then we can reorder communications: let AB be the 51th communication and shift all the subsequent communications, this will be a gossip scheme again.

1.11. Among all the superfast gossip schemes, find a scheme in which the first expert appears after a minimal number of communications. (This can happen after at least $n-1$ communications.) Let us fix this gossip scheme. After the moment when the expert has appeared, at each moment let ℓ be the number of experts and m be the maximal number of non-intersecting pairs of complementary semi-experts. Prove that there remain at least $n-\ell-m$ communications in this scheme.

1.12. Give another proof of 1.10, using the semiinvariant from the preceding problem.

4.3$\frac{1}{2}$. Prove that NODUP gossip schemes do not exist for
a) $n = 14$; b) $n = 18$.

4.4$\frac{1}{2}$. Prove that in a NODUP gossip scheme for $n > 4$ each gossiper participates in at least three communications.

There are n chemists ($n > 3$). Each one has 1 kg of his unique reagent. If two chemists meet, they divide equally all the reagents they have. In a good home laboratory, all the reagents have to be represented. Clearly $2n-4$ meetings are enough to make home laboratories of all the chemists good. But for efficient work, it is necessary to have at least α grams of each reagent.

1.13. For which maximal α we can make all the home laboratories efficient after $2n-4$ meetings?

5 *Bad connection*

Take n gossipers and an integer k. We consider the following restriction: the communication schedule is strictly fixed in advance, however, it is known that "connection is bad" and k communications may cancel (i.e., the corresponding gossipers cannot pass on their gossips at time). Also, the analogous setting can be considered for the case of telegraph.

5.1. Suppose that gossipers use telegraph and the connection is bad, i.e. it is known that some k telegrams may be lost.

a) Suppose that one gossiper is commander-in-chief. A schedule of telegrams must be such that the commander-in-chief knows all the gossips at the end. Which is the minimal number of telegrams necessary for such a scheme?

b) All the gossipers want to know all the gossips at the end. Which minimal number of telegrams is needed?

5.2. Suppose that one gossiper is commander-in-chief. The connection is bad. A schedule of communications must be such that the commander-in-chief knows all the gossips at the end. Let us denote the minimal number of communications necessary in this case by $\mu(n,k)$. Prove that

a) $\mu(n,k) = \left\lceil \frac{k+1}{2} \cdot n \right\rceil$ for $k \geqslant n-2$.

b) $\mu(n,k) = \left\lceil \frac{k+2}{2} \cdot (n-1) \right\rceil$ for $k \leqslant n-2$;

5.3. Let us denote by $\tau(n,k)$ the minimal number of communications necessary for n gossipers to know all the gossips at the end if it is known that connection is bad.

a) Prove that $\tau(n,k) \leqslant \left\lfloor (k+\frac{3}{2})(n-1) \right\rfloor$.

b) Give a lower bound for $\tau(n,k)$. Please give a bound which is not much worse that the bound from a).

The exact value of $\tau(n,k)$ is not known. In Problem 5.2, the following lower bound is known: $\mu(n,k) + n - 2\sqrt{n} \leqslant \tau(n,k)$. It is not known whether the sequence $\tau(n,k) - (k+\frac{3}{2})n$ is bounded for fixed k.

5.4. We have a new setting. Suppose that communications do not cancel, but gossipers want to operate with *reliable* gossips. For a gossiper, a gossip which is not his own gossip is reliable if he heard it at least $k+1$ times. Prove that the minimal necessary number of communications $\gamma(n,k)$ satisfies the following inequalities:

a) $\gamma(n,k) \leqslant \lceil\frac{(k+4)n}{2}\rceil - 4$;

b) $\lceil\frac{(k+4)(n-1)}{2}\rceil - \lfloor\log_2 n\rfloor \leqslant \gamma(n,k)$.

6 *Lazy gossipers*

6.1. Suppose that n gossipers have performed several communications. It turned out that the communication graph is a tree, and that every gossiper knows at least k gossips after these communications.

a) Prove that $n \geqslant 2^{k-1}$.

b) Suppose that the communication graph is a tree. Also suppose that all but one gossipers know at least k gossips each after these communications. Prove that $n \geqslant 2^{k-1} - 1$.

Now let us fix integers n and k, where $k \leqslant n$. We consider the case when n gossipers know each other, but their curiosity is bounded: each one wants to know at least k gossips at the end. Let us denote by $P(n,k)$ the minimal number of communications necessary for this.

We assume below that $k \geqslant 4$. Let us introduce a useful notation. For a fixed k, let us consider the following finite sequence

$$t_i = i + 2^{k-i-2}, \quad \text{where } 0 \leqslant i \leqslant k-4.$$

This sequence is decreasing.

6.2. Suppose that k is "rather small" with respect to n, namely, $n \geqslant 2^{k-1}$. Prove that gossipers need "almost n" communications: $P(n,k) = \lceil\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \cdot n\rceil$.

6.3. For greater values of k, find i, $0 \leqslant i \leqslant k-4$, such that $t_i \leqslant n < t_{i-1}$. Prove that $P(n,k) \leqslant n+i$.

6.4. Prove that in the previous problem, we have the equality $P(n,k) = n+i$.

Solutions

1.1. Ответ: 4 calls.

1.2. If there is a chain of calls which passes the A's gossip to B, then the reversed chain will pass the B's gossip to A.

1.3. We prove this statement by induction. Induction base for $n = 4$ is already proved. To prove the induction step, we add one gossiper and two calls, the very first call is the conversation of the new gossiper with any other gossiper, then we make calls according to the old gossip scheme, and the very last call is the conversation of the new gossiper with any other gossiper.

1.4. [11, Lemma 2]. Let us "glue together" gossipers A and B: we will treat them as one person who knows the union of the gossips previously known by A and B in every moment. We can delete all the calls between A and B. Then we obtain a gossip scheme for $n-1$ gossipers, consisting of $2(n-1)-5$ calls, which contradicts minimality of n.

1.5. This statement is taken from [1]. We exclude gossiper A, all his calls which were made before the call BC are diverted to B, and his remaining calls are diverted to C. We diminished the number of gossipers by 1 and the number of calls by 2, this contradicts minimality of n.

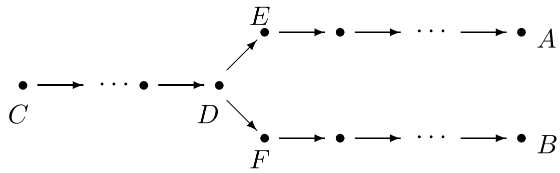
Remark. We can label the edges of the graph of calls: on every edge, we write the number of this call in the gossip scheme. Then the way of a gossip is a path in the graph such that the labels along this path increase. The condition that every gossiper knows all the gossips at the end means that for every two gossipers A and B, there is a path with increasing labels from A to B (and from B to A, too).

In the same way we can show that there do not exist longer (than 3 edges) chains from A to A such that the labels along this path increase. Indeed, let $AB_1B_2\ldots B_kA$ be such a chain. We want to exclude the gossiper A, his two calls AB_1 and AB_k, and to divert all the remaining edges incident to A. We compare labels on these edges with the labels on edges B_1B_2, $B_2B_3, \ldots$, $B_{k-1}B_k$, and those which are less than B_1B_2 are diverted to B_1, those which are among B_1B_2 and B_2B_3 are diverted to B_2, and so on. One can check that this will be a gossip scheme for $n-1$, which contradicts minimality of n.

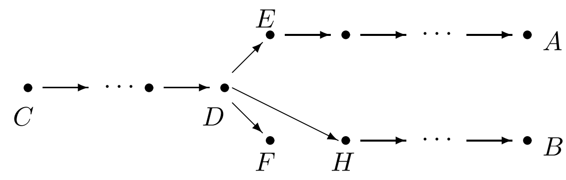
1.6. Suppose that gossiper B knows all the gossips after the conversation with A. Suppose also that after the conversation AB, there was also a conversation BC. It means that C has heard his own gossip from B, i.e., that there are cycles in the gossip scheme. But it contradicts Problem 1.5.

1.7. This statement is taken from [11, Lemma 4], it is equivalent to the intersection lemma [1].The following idea is useful: if at some moment Peter and Paul have the same information (i.e., just after the conversation between them), then we can change them in all the subsequent calls, and this will be a gossip scheme again.

Suppose that just before their conversation, gossipers A and B both knew the gossip of C. Consider the chains of calls which pass the gossip of C to A and to B:



Допустим, что в этой последовательности звонок DE был раньше звонка DF. Тогда, поменяв местами сплетников D и F, сразу после звонка DF мы можем считать, что вместо звонка FH имел место звонок DH. У нас получится последовательность звонков, в которой цепочка $DFH\ldots B$, находящаяся после «развилки», укоротилась (теперь это цепочка $DH\ldots B$).



Звонок DH по-прежнему позже DE. Продолжая такие действия, мы полностью устраним цепочку $H \dots B$ после «развилки». На последнем шаге этого процесса мы поменяем местами сплетников B и D (сразу после разговора BD), при этом разговор AB, с которого мы начали решение, заменится на AD. У нас останется цепочка $DE \dots A$ и последующий разговор AD. Это невозможно по задаче 1.4.

1.8. This statement is taken from [1]. If every gossiper participated in at least 4 communications, all in total there were at least $2n$ calls.Suppose that a gossiper A participated in three communications. To pass the gossip of A to the other gossipers is the same as to consider the union of all the increasingly labelled paths starting at A. This is a connected subgraph containing all the vertices, hence, it contains at least $n-1$ edges. Also consider the union of all the decreasingly labelled paths starting at A. It also contains at least $n-1$ edges. These two subgraphs may intersect only by the edges incident to A, otherwise the union of a decreasing path and of an increasing path will give a labelled circle which will contradict to the Remark above. This gives at least $(n-1)+(n-1)-3 = 2n-5$ edges.

1.9. If a gossiper A participates in k conversations, then, as in the previous problem, $2n-5 \geqslant (n-1)+(n-1)-k$. Hence, $k \geqslant 3$.

1.10. It is enough to explain why there are no superfast gossip schemes consisting of $2n-5$ calls. By Problem 1.6, a call can be initial (all in total $n/2$ such calls, it is the first call for both interlocutors), final (also, all in total $n/2$ such calls, it is the last call for both interlocutors) and mean calls ($n-5$ such calls). By Problem 1.9, every gossiper participates in at least one mean call. Consider the graph of mean calls. It has n vertices and $n-5$ edges, hence, at least 5 connected component, each containing at least one edge.

Fix a gossiper A and let AB and AC be his first and last calls, respectively. There are at least two connected components of the mean edge subgraph not containing vertices A, B, and C, there are at least two edges in these components.

Consider the union of all the increasingly labelled paths starting at A. This is a spanning subgraph, hence, it contains at least $n-1$ edges. Also consider the union of all the decreasingly labelled paths starting at A. It also contains at least $n-1$ edges. As in the solution of Problem 1.8, these two subgraphs may intersect only by the edges incident to A, otherwise there wil be a labelled circle. Now take two connected components chosen above. The internal edges of these connected components occur neither in increasing nor in decreasing paths starting from A. Let k be the degree of A in the initial graph. The union of two spanning subgraphs contains at least $n-1+n-1-k \geqslant 2n-5-2$ edges, hence, $k \geqslant 5$. Since A was taken arbitrarily, it means that the graph contains at least $5n/2 > 2n-5$ edges.

2.1. This statement is proved in [6]. The hardest part is done in Problem 1.10, and it remains to prove that for a tree, we need $2n-3$ communications. First, let us show that $2n-3$ communications is enough. Fix a root in the tree, and suppose that gossipers subsequently call from faraway vertices to the root (formally, we can order the edges with respect to the distance to the root; firstly, calls are made using the most far edges, then by the edges of maximal distance minus one, and so on). After these calls, we will have two gossipers who know all the gossips: the root and one of his neighbours. Then we make first $n-2$ calls in the reverse order. All in total this gives $n-1+n-2 = 2n-3$ calls.

This is the minimal possible number of calls. Indeed, otherwise there would be at least two edges used once. Let us call such edges *singular*. Two singular edges split the graph into three connected components, and we may treat it as a graph with three vertices and two (singular) edges, hence, this is not a gossip scheme.

2.2. We present here the construction from [6]. We can contract the cycle C_4 into one vertex and treat it as the root of the obtained tree. As in Problem 2.1, gossipers will subsequently call from faraway vertices to the root, then we will apply the fastest gossip scheme from Problem 1.1 to C_4, then make the calls on the edges of the tree in the reverse order. This gossip scheme needs $(n-4)+4+(n-4)=2n-4$ calls.

2.3. Доказательство приведено в [6].

Предположим, что существует способ, содержащий всего $2n-4$ звонка. Тогда заметим, что каждое ребро должно быть использовано в этом способе оповещения хотя бы один раз. Если это ребро является мостом и не было использовано, то невозможно распространение информации между двумя частями, на которые оно делит граф. Если оно лежит на цикле, то после его удаления из графа получаем дерево, в котором распространение информации невозможно быстрее, чем за $2n-3$ по решению пункта 2.1. Следовательно, при способе за $2n-4$ звонка имеется по крайней мере 4 сингулярных ребра (напомним, что мы называем ребро сингулярным, если ему соответствует лишь один звонок).

Допустим, что хотя бы одно из этих ребер является мостом. При его удалении граф распадается на две компоненты связности. Тогда к моменту звонка по этому ребру в каждом из его концов должна накопиться вся информация из соответствующей компоненты. Пусть размер одной из компонент равен a, тогда для этого потребуется $(a-1)+(n-a-1)=n-2$ звонков. После этого происходит звонок по мосту и еще столько же звонков, чтобы информация распространилась обратно. В сумме получаем $2n-3$ звонка. Таком образом, сингулярные ребра не могут быть мостами, т. е. все они лежат на цикле.

Тогда после удаления сингулярных ребер из графа получится 4 компоненты связности, каждая из которых является деревом. Перенумеруем их в порядке обхода цикла, пусть эти компоненты содержат n_1, n_2, n_3, n_4 вершин, $n_1+n_2+n_3+n_4=n$. Посмотрим, в каком порядке сингулярные ребра могут входить в последовательность звонков. Пусть сначала в последовательности звонков стоят два ребра, связанных с одной и той же компонентой i. Это невозможно, так как тогда эта компонента не получит сведений из компоненты $(i+2) \mod 4$. Значит, порядок вхождения сингулярных ребер в способ оповещения аналогичен порядку вхождения ребер графа в решении пункта 1.1: можно считать, что сначала были сделаны звонки 1–2, 3–4, а после этого 2–3 и 1–4.

К моменту совершения звонка 1–2, оба собеседника должны были знать все слухи из своей компоненты, значит, к этому времени должно было быть совершено не менее $(n_1-1)+(n_2-1)$ звонков внутри этих компонент. Аналогично к моменту звонка 3–4 должно было быть совершено не менее $(n_3-1)+(n_4-1)$ звонков внутри третьей и четвертой компонент. Мы насчитали $n-4$ звонков.

Далее, в результате совершения звонка 2–3 каждый из собеседников узнал уникальный для своей компоненты новый слух. Значит, после этого звонка в компонентах должно произойти еще не менее $(n_2-1)+(n_3-1)$ звонков, распространяющих эти уникальные слухи. Аналогично после звонка 1–4 произойдет не менее $(n_1-1)+(n_4-1)$ звонков в первой и четвертой компонентах. Мы обнаружили еще $n-4$ звонка.

Так как наш цикл содержит более 4 вершин, то есть хотя бы одна компонента, пусть для определенности первая, для которой смежные с ней два сингулярных ребра не имеют общей вершины. Следовательно, эта компонента сможет передать информацию, как это требуется при способе оповещения, только если в промежутке между звонками 1–2 и 1–4 внутри первой компоненты будет сделан хотя бы один звонок, передающий слухи второй компоненты от собеседника, только что узнавшего по звонку 1–2, к собеседнику, который будет передавать их по звонку 1–4. Этот звонок еще не был учтен нами ранее.

Итого мы имеем $(n-4)+(n-4)+4+1$ звонков.

2.4. Ф. Харари и А. Швенк [6] предлагали в 1974 г. \$10 за доказательство этого факта. В 1980 г. R. Bumby [4] решил эту задачу. Чуть позже D. Kleitman и J. Shearer [7] привели другое доказательство, причем в их рассуждениях не требовалось, чтобы все звонки были двусторонними. Мы приводим доказательство из [7], впрочем, опуская детали, возникающие в случае односторонних звонков.

Пусть дана схема оповещения, состоящая из $2n-4$ звонков. Докажем, что она содержит 4-цикл.

Порядок звонков в схеме оповещения не задан жестко. Разные перестановки последовательности звонков, реализующие оповещение, будем называть *упорядочиваниями* схемы оповещения.

Рассмотрим граф, изображающий первые $n-1$ звонков, и отметим его наименьшую компоненту связности, являющуюся деревом. Такая компонента всегда найдется, так как в противном случае суммарное число ребер окажется не меньше суммарного числа вершин. Пусть S — минимальная отмеченная компонента-дерево, выбранная по всем упорядочиваниям.

Пусть в компоненте S содержится m вершин. Отметим, что $m \geqslant 2$, поскольку иначе, если $m=1$, а мы изобразили уже $n-1$ звонков, то чтобы информация от этой вершины дошла до остальных, потребуется еще не менее $n-1$ звонков, т. е. в сумме будет больше $2n-4$ звонков. Рассмотрим $(m-1)$-й по порядку звонок внутри компоненты S. Если его отменить, компонента распадется на две части — S_1 и S_2. Опять перебирая упорядочения, меняющие местами звонки внутри S, мы можем дополнительно считать, что S_1 — наименьшая возможная компонента в том смысле, что другие упорядочения не могут дать нам компоненту строго содержащуюся в S_1. Пусть $(m-1)$-й звонок происходит между вершинами $x_1 \in S_1$ и $y_1 \in S_2$. Мы последовательно проверим следующие пять утверждений, выделенных курсивом. Из пятого утверждения следует, что схема оповещения содержит 4-цикл, что нам и требуется.

Утверждения.

1) *Компонента S_1 содержит не менее двух вершин.*

2) Пусть компонента S_1 состоит из j вершин. Тогда $(j-1)$ звонков, сделанные внутри S_1, (среди первых $m-2$ звонков в S) превращают эту компоненту в дерево, обозначим его T (а обозначение S_1 будем относить скорее к множеству вершин). Пусть дана некоторая последовательность звонков. Будем называть звонок между вершинами a и b *особенным*, если этот звонок произошел позже всех остальных звонков с участием a или b. *Дерево T содержит единственный особенный звонок, в этом звонке обязательно участвует вершина x_1.* Обозначим через x_2 второго участника этого звонка.

3) Для построения множеств S, S_1 и дерева T мы использовали $n-1$ первых звонков. Способ оповещения содержит еще $n-3$ звонка, обозначим множество этих звонков через $\mathcal{L}$. Если удалить из дерева T ребро x_1x_2, дерево распадется на две части T_1 и T_2, где обозначения выбраны так, что $x_1 \in T_1$, $x_2 \in T_2$, см. рис. 1. *Для каждой вершины $z \notin T_1$ (в том числе*

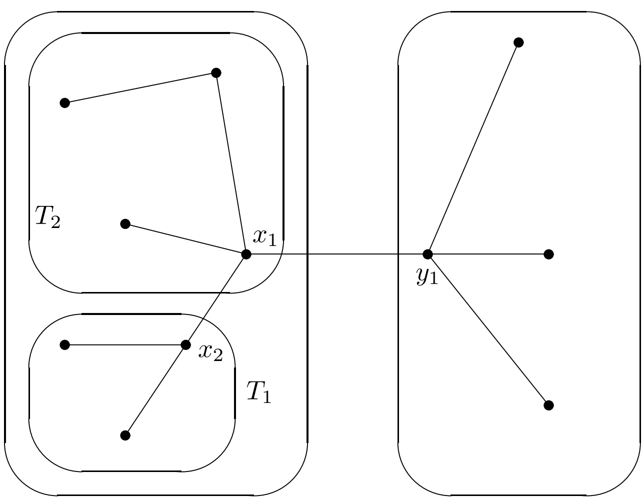


Рис. 1. Компонента связности S

для вершин z, лежащих вне S) существует цепочка звонков, содержащая лишь звонки из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, по которой к z может прийти слух от вершины x_1. То же касается распространения информации от x_2 к вершинам вне T_2. Более того, множество звонков $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$ образует дерево.

4) *Последовательность звонков, которая доставляет слух вершине x_1 (или x_2) от остальных, может содержать не более одного звонка из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, и если таковой звонок встретился в этой последовательности, он является в ней последним.*

5) Рассмотрим какую-нибудь последовательность звонков, по которой слух y_1 дошел до x_2. Пусть y_2x_2 — последний звонок в этой последовательности. Теперь рассмотрим какую-нибудь последовательность звонков, по которой слух y_2 дошел до x_1. Пусть y_3x_1 — последний звонок в этой последовательности. Продолжая это построение, скажем, что y_{i+1} — это тот сплетник (не совпадающий с x_1 и x_2), который участвовал в последнем звонке из последовательности, доставившей слух от y_i к x_1 (если i четно) или x_2 (если i нечетно). *Все вершины y_i лежат в S_2. Найдутся нечетное i_1, четное i_2, такие что $y_{i_1}y_{i_2}$ — звонок из S_2. Более того, в этом случае $y_{i_1}x_1$, $y_{i_2}x_2$ — звонки, принадлежащие нашей схеме оповещения, причем они совершены позже звонков x_1x_2 и $y_{i_1}y_{i_2}$.*

Доказательства.

1) Можно считать, что звонок x_1y_1 был $(n-1)$-м по счету. Если S_1 состоит из одной вершины, то после первых $n-2$ звонков, слух из этой вершины еще никуда не ушел. Для его распространения понадобится еще по крайней мере $n-1$ звонков, т.е. в сумме будет не менее $2n-3$ звонков.

2) Это следует из условия минимальности, наложенного нами на S_1. Последний звонок — всегда особенный, так что хотя бы один особенный звонок существует. Если бы в S_1 нашелся особенный звонок ab, не задевающий вершину x_1, мы могли бы переупорядочить звонки в S, поставив звонок ab на $(m-1)$-е по счету место. Тогда первые $m-2$ звонка порождали бы компоненту, строго содержащуюся в S_1, что противоречит ее минимальности.

3) В нашей схеме оповещения слух от x_1 по какой-то цепочке звонков дошел до z. Пусть ab — первый звонок в этой цепочке, не лежащий в T_1. Тогда ab и все последующие звонки в этой цепочке лежат в $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Если существует цепочка звонков из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, предшествующая ab и доставляющая информацию от x_1 к a или b, объединим ее с предыдущей рассмотренной цепочкой и получим требуемую цепочку от x_1 к z. Если же такой цепочки не существует, то схема оповещения допускает следующее переупорядочивание звонков: пусть звонок x_1y_1 идет n-м по счету, звонок x_1x_2 — $(n-1)$-м, а звонок ab или какой-то звонок из $\mathcal{L}$, предшествующий звонку ab, — $(n-2)$-м по счету (относительный порядок остальных звонков не изменился).

Если теперь $(n-2)$-й звонок не задевает S_1 (или S_2), то в начале в качестве S можно было взять S_1 (или S_2), что противоречит минимальности S. Если же $(n-2)$-й звонок соединяет S_1 с S_2, то это противоречит минимальности S_1, так как удаление $(n-1)$-го по счету звонка x_1x_2 теперь создает компоненту, строго содержащуюся в S_1.

Мы доказали существование цепочки звонков, передающих информацию от x_1 к z и лежащих в $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$. Аналогично существуют цепочки, передающие информацию от x_2 к $z \notin T_2$. Таким образом, множество $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, содержащее $n-1$ ребро, позволяет распространять информацию от x_1 и x_2 к остальным $n-2$ вершинам. Следовательно, ребра из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$ порождают остовное дерево графа звонков.

4) Остовное дерево, описанное в предыдущем пункте, состоит из звонков $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$. Эти звонки в нашем способе оповещения хронологически последние. Поэтому если последовательность звонков, передающая информацию из z в x_1 (для x_2 рассуждения аналогичны), содержит звонок из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, то и все последующие звонки тоже лежат в этом множестве. Но цепочки звонков в этом остовном дереве «уводят» информацию от «центра» $x_1 \cup x_2$ к другим вершинам, поэтому единственный способ передать информацию в x_1 — передать ее от непосредственного соседа вершины x_1, т. е. по цепочке, содержащей лишь один звонок

с участием x_1, чтд.

5) По определению $y_1 \in S_2$. В силу свойства 4) в цепочке звонков, доставившей информацию от y_1 к x_2 все звонки, кроме, быть может, последнего звонка y_2x_2, — это какие-то из первых $n-1$ звонков, кроме x_1y_1, x_1x_2. По отношению к этим звонкам мы определяли S_2 как компоненту связности, поэтому $y_2 \in S_2$. Аналогично проверяется, что и все остальные вершины y_i лежат в S_2. Отметим, что тогда звонки вида y_ix_1 или y_ix_2 из определения вершин y_i принадлежат остовному дереву $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Поскольку компонента S_2 конечна, какие-то две из вершин совпадают, скажем, $y_i = y_{i+k}$. При этом число k — обязательно четное, так как ребра y_ix_1 и y_ix_2 не могут одновременно принадлежать остовному дереву $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Рассмотрим теперь цепочку путей

$$y_i \to y_{i+1} \to \cdots \to y_{i+k} = y_i$$

(каждый путь в этой цепочке хронологически упорядочен, но соседние пути могут нарушать хронологию). Поскольку этот замкнутый маршрут расположен на дереве, каждое ребро в нем было пройдено в обоих направлениях. Мы утверждаем, что все вершины, по которым проходит этот маршрут, лежат в множестве $\{y_j, i \leqslant j \leqslant i+k\}$. Действительно, если маршрут проходит через вершину a, не совпадающую ни с одним из y_j, рассмотрим хронологически самый последний звонок в этом маршруте с участием вершины a, пусть это звонок ab. В какой-то момент, проходя очередной путь $y_j \to y_{j+1}$, мы двигались в направлении от b к a, но поскольку этот звонок хронологически последний, мы не можем продолжить движение за точку a. Значит, $a = y_{j+1}$.

Теперь мы без труда можем выбрать звонок $y_{i_1}y_{i_2}$, где i_1 нечетное, i_2 четное (и разумеется, он лежит в S_2). Звонки $y_{i_1}x_1$ и $y_{i_2}x_2$ также присутствуют в схеме оповещения, поскольку по определению точек y_i они использовались для передачи информации вершинам x_1, x_2.

2.5. Ответ: $2n-2$ телеграммы.

Мы взяли эту задачу в [6]. До того как появится первый человек, узнавший все слухи, должно быть послано не менее $n-1$ телеграммы. После этого каждый из остальных должен получить хотя бы одну телеграмму, чтобы завершить ознакомление со слухами. Значит, еще будет послано еще не менее $n-1$ телеграмм.

Пример строится на базе любого дерева, если сначала посылать телеграммы от периферии к корню, а потом обратно.

2.6. Это теорема 3 [9]. Пример способа оповещения, в котором $n-1$ человек прочтет в телеграмме свой собственный слух, тривиален: пусть все сначала телеграфируют Васе, а потом Вася посылает всем телеграммы с полным комплектом слухов.

Оценка. Рассмотрим минимальный контрпример, в котором не более $n-1$ человек прочли в телеграмме свой собственный слух. Пусть последняя телеграмма была послана сплетником A сплетнику B. Очевидно, сплетник A уже знает все слухи, значит, сплетник B, во-первых, один из тех, кто прочел свой слух в полученной телеграмме, а во-вторых, не знает ни одного слуха, кроме своего собственного (иначе он какой-то слух выучил из телеграмм дважды). Значит, ранее сплетник B не получил ни одной телеграммы, а только посылал. Удаляя из этой компании сплетника B и соответствующие телеграммы, мы получим меньший контрпример. Противоречие.

3.1. Ответ: это возможно даже с ограничением NODUP. См. начало решения задачи **??**.

3.2. Ответ: при четных n. [12]

Для каждого сплетника отметим последний звонок, в котором он участвовал. При выполнении ограничения NOHO эти последние звонки разбивают всех сплетников на пары — см. рассуждение в решении задачи 1.6 без последнего предложения. Таким образом, n должно быть четным.

Отметим, что первые звонки тоже разбивают сплетников на пары.

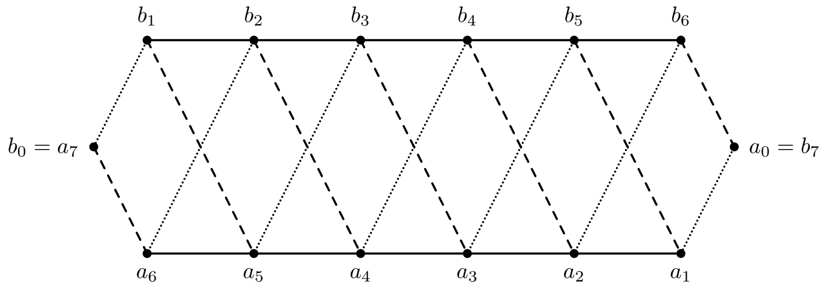


Рис. 2. Оптимальные звонки с ограничением NOHO.

Для каждого четного n предъявим способ оповещения, подчиненный ограничению NOHO, состоящий из $2n-4$ звонков [12, лемма 2.4]. Пусть $m = \frac{1}{2}n - 1$. Обозначим сплетников a_i, b_i, $i = 0, 1, \ldots, m+1$, — но здесь $n+2$ сплетника, будем считать, что $a_0 = b_{m+1}$, $a_{m+1} = b_0$. В качестве первых звонков возьмем звонки (в порядке возрастания i, см. рис. 2)

$$a_i b_{m+2-i}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m+1;$$

далее выполним средние звонки

$$a_i a_{i+1}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad \text{и} \qquad b_i b_{i+1}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m-1;$$

и, наконец, последние звонки

$$b_i a_{m-i}, \qquad \text{где } i = 0, 1, \ldots, m.$$

Непосредственно проверяется, что указанная система звонков является способом оповещения, подчиненным ограничению NOHO.

3.3. Поскольку любая схема оповещения содержит не менее $2n-4$ звонков, достаточно привести пример, удовлетворяющий ограничению NOHO и содержащий $2n-4$ звонка. Этот пример приведен в предыдущем решении.

4.1. Ответ: да. [8]. Прежде чем приводить решение задачи, дадим несколько определений.

Уникальные сплетники, известные сплетникам до того как они стали обмениваться информацией, будем называть также *изначальными.* Пусть после нескольких звонков имеется такое подмножество изначальных сплетен, что каждый сплетник либо знает все сплетни из этого подмножества, либо не знает ни одной из них. Тогда при рассмотрении последующих звонков можно рассматривать такое подмножество сплетен как одну большую сплетню. Будем называть ее *объединенной* или *общей* сплетней (определение из статьи [8]). Например, пусть сплетникам, номера которых указаны ниже, известны следующие сплетни, обозначенные греческими буквами.

Сплетник	1	2	3	4
Какие сплетни знает	$\alpha\gamma$	β	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$

В этом примере сплетни α и γ образуют объединенную сплетню, поскольку каждый сплетник либо знает обе эти сплетни, либо не знает ни одной. А вот набор сплетен β, δ объединенную сплетню не образует, так как второй сплетник знает лишь одну из них.

Рассмотрим чуть более общую постановку задачи. Пусть имеются группы из $a_1, a_2, \ldots, a_k$ сплетников, причем в каждой группе всем известен один и тот же набор сплетен. Такое объединение сплетников будем называть *коллективом.* Сплетники по-прежнему общаются друг с другом по телефону и хотят, чтобы каждый из них узнал все имеющиеся сплетни. Если для такого коллектива существует хотя бы один способ оповещения, подчиненный ограничению

NODUP, то будем называть этот коллектив *сплоченным.* Коллектив, содержащий только одну группу, тоже будем считать сплоченным. Так, коллектив из трех групп сплетников $\{1,3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ в предыдущем примере не является сплоченным. В этих терминах задача про n сплетников, знающих по одной уникальной сплетне, теперь формулируется для коллектива из n групп, каждая из которых состоит из одного сплетника.

Если в коллективе каждая группа знает лишь одну сплетню (эта сплетня может быть изначальной или объединенной, являющейся подмножеством нескольких изначальных в смысле определения выше), то такой коллектив назовем *простым.* Так, коллектив из трех групп сплетников $\{1,3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ в предыдущем примере не является простым (сплетник 4 знает две сплетни, не образующие объединенную сплетню).

Заметим, что если объединить два сплоченных коллектива сплетников, в которых поровну сплетников, а множества их изначальных сплетен не пересекаются, то снова получится сплоченный коллектив. Действительно, мы сразу получим способ оповещения, если сначала в каждом из коллективов все сплетники узнают все сплетни своего коллектива, а потом каждый сплетник из первого коллектива поговорит с кем-то из второго. Таким способом можно из коллективов, содержащих одну группу, построить, например, следующие коллективы:

$$(a,a),\quad (a,a,2a,4a,8a,16a),\quad (a,a,a,a,4a,4a,4a,16a),\quad \underbrace{a,a,a,\ldots,a}_{2^k\ \text{групп}} \tag{1}$$

Пусть имеется два коллектива $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ и $(b_1,b_2,\ldots,b_k)$, для которых множества изначальных сплетен совпадают. Предположим, что при каждом i группа из a_i человек первого коллектива и группа из b_i человек второго знают одно и то же множество сплетен. При этом мы допускаем, что a_i или b_i может быть равным нулю; если так случилось, к примеру, если $a_i=0$, то изначальные сплетни, составляющие это множество сплетен, должны быть известны в других ненулевых группах первого коллектива. Назовем *суммой* этих коллективов коллектив $(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_k+b_k)$. Например, непростой коллектив из 10 сплетников, которым известны сплетни α, β, γ

Наборы сплетен	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
количество сплетников	3	3	2	2

представи́м в виде суммы двух коллективов:

Коллектив	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
1	3	0	0	2
2	0	3	2	0

Заметим, что если коллективы были сплоченными, то и их сумма тоже является сплоченным коллективом. Значит, если коллектив сплетников раскладывается в сумму сплоченных коллективов, каждый из которых знает в объединении тот же набор сплетен, что и исходный коллектив, то он тоже является сплоченным.

Вернемся к решению задачи. Преобразуем простой коллектив, состоящий из 12 одиночных сплетников, в простой коллектив $(4,4,4)$ (2^d сплетников, каждый из которых знает одну уникальную сплетню, всегда могут объединиться в группу как в примерах (1)). А теперь заметим, что он является суммой трех простых сплоченных коллективов $(1,1,2)$, $(1,2,1)$ и $(2,1,1)$.

4.2. Ответ: да.

Сначала слегка укрупним группы.

Сплетни	α	β	γ	δ	ε	ζ
Число сплетников	13	8	6	5	4	4

$\to$

α	β	γ	δ	$\varepsilon\zeta$
13	8	6	5	8

$\to$

α	γ	δ	$\beta\varepsilon\zeta$
13	6	5	16

Полученный простой коллектив легко раскладывается в сумму пяти сплоченных: $(2,1,1,4)$ (2 раза), $(4,1,1,2)$ (2 раза), $(1,2,1,4)$ (1 раз).

Другое разложение. Пусть сначала один человек, знающий сплетню γ, поговорит с человеком, знающим сплетню ζ, а также один человек, знающий сплетню δ, поговорит с человеком, знающим сплетню ε.

Коллектив	α	β	γ	δ	ε	ζ	$\delta\varepsilon$	$\gamma\zeta$
1	2	2	1	0	0	2	1	0
2	8	4	0	2	1	0	0	1
3	1	1	4	0	0	1	1	0
4	2	1	0	2	2	0	0	1

4.3. Ответ: да. [8].

Рассмотрим сначала простой коллектив сплетников $(3,3,2,2)$, в котором каждая группа знает соответственно сплетню α, β, γ, δ. Пусть один сплетник из I группы переговорит с одним из III группы, а один из II — со сплетником из IV. Получится коллектив (уже не простой) из 6 групп, который легко разложить в сумму трех сплоченных.

α	β	γ	δ
3	3	2	2

$\rightarrow$

α	β	γ	δ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$
2	2	1	1	2	2

$\rightarrow$

Коллектив	α	β	γ	δ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$
1	0	0	0	0	1	1
2	2	0	1	0	0	1
3	0	2	0	1	1	0

Теперь возьмем наших 20 сплетников и преобразуем их в простой коллектив $(4,4,4,4,4)$. Этот коллектив является суммой двух простых коллективов $(3,3,2,1,1)$ и $(1,1,2,3,3)$, каждый из которых может с помощью одного звонка быть преобразован в коллектив $(3,3,2,2)$, который мы уже рассматривали.

4.3$\frac{1}{2}$. Докажем, что при $n = 6$, 10, 14, 18 распространение слухов с ограничением NODUP невозможно [8, предложение 4].

Утверждение 1 [8, лемма 1]. При выполнении ограничения NODUP сплетники разбиваются на пары по первым звонкам, а также разбиваются на пары по последним звонкам.

Доказательство. Утверждение о последних звонках очевидно (если кто-либо узнал все сплетни, то его последний собеседник тоже узнал все сплетни и оба больше не могут ни с кем разговаривать).

Докажем утверждение о первых звонках. Пусть сплетник A — это первый человек, с которым разговаривал сплетник B. Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда для сплетника A первый разговор был с другим человеком C. После этого разговора сплетник C знает сплетню человека A и не знает сплетню B. После разговора сплетника B с A сплетня B всегда путешествует с A. Следовательно, C не сможет ее узнать. $\square$

Пусть $n = 2k$. Можно считать, что первые звонки сплетников суть в точности первые k звонков схемы оповещения, а последние звонки сплетников — это в точности последние k звонков схемы оповещения. После того как сделаны первые k звонков, образовалось k объединенных сплетен. В каждый момент времени для каждого сплетника X назовем *напарником* сплетника X того сплетника Y, с которым X непосредственно перед этим разговаривал по телефону. Сразу после их разговора оба знали одинаковый набор сплетен.

Утверждение 2. При $n > 4$ ни один из сплетников не может перед своим последним разговором знать $k - 1$ объединенных сплетен.

Доказательство. Если сплетник A перед последним разговором знает $k-1$ объединенную сплетню, то его собеседник B в этом последнем разговоре знал всего одну объединенную сплетню. Обозначим через B_1 первого собеседника сплетника B, через A_1 — собеседника A в предпоследнем разговоре. Теперь ясно, что сплетни B и B_1 могут быть известны только перечисленным в этом рассуждении персонажам. $\square$

Из этих двух утверждений сразу следует, что при $n = 6$ схема NODUP невозможна: так как после первых звонков сплетни попарно объединились, то в любом последнем звонке участники могут знать лишь 2 и 4 сплетни, что запрещено вторым утверждением.

Разберем случай $n = 10$. В силу запрета из утверждения 2 в последнем разговоре могут участвовать лишь сплетники, один из которых знает две объединенные сплетни, а другой — три. Таким образом, перед тем как произошли k последних разговоров, было ровно 5 сплетников, знавших по 3 объединенные сплетни. Напарник каждого из этих пяти сплетников — один из этих же пяти сплетников (потому что человек, узнавший три сплетни, может после этого участвовать лишь в последнем разговоре). Таким образом, мы разбили 5 сплетников на пары. Это противоречие показывает, что единственный логически возможный случай не может быть реализован.

Разберем случай $n = 14$. В силу запрета из утверждения 2 в ни один из сплетников, участвующих в последнем разговоре, не должен знать ровно 6 сплетен. Так же, как в предыдущем параграфе, убеждаемся, что случай, в котором все сплетники в последнем разговоре знают по три или по четыре объединенные сплетни, невозможен (иначе мы найдем паросочетание на множестве из 7 сплетников, знающих 4 сплетни). Из тех же соображений должно быть четное число пар сплетников, знающих в последнем разговоре 2 или 5 сплетен. Тогда имеется нечетное количество пар сплетников, знающих в последнем разговоре 3 или 4 сплетни, и чтобы в очередной раз не возникло противоречия, напарник хотя бы одного из сплетников, знавших в последнем разговоре 4 сплетни, должен перед своим последним разговором «выучить» пятую сплетню.

Введем обозначения. Пусть A — сплетник, знавший в последнем разговоре объединенные сплетни номер 1, 2, 3, 4; B — его напарник, выучивший после разговора с A, сплетню номер 5 (в разговоре с C, знавшим только эту одну сплетню). Пусть B и C свои последние разговоры провели со сплетниками D и E, знавшими лишь 7-ю и 8-ю сплетни, ничто нам не мешает думать, что они узнали эти сплетни друг от друга. Пусть F, G, H — сплетники, узнавшие после своего первого разговора сплетни 5, 6, 7 (и не совпадающие с уже обозначенными сплетниками).

C	5	D	6,7
	$\updownarrow$		
B	1,2,3,4	E	6,7
A	1,2,3,4		
F	5,6,7		
H	5,6,7		
G	6,7		

Последний собеседник сплетника A должен был знать сплетни 5, 6, 7. В силу симметрии обозначений F, G, H, мы можем считать, что сначала F и G поговорили друг с другом, потом F поговорил с H и, наконец, F стал последним собеседником для A. Но теперь единственный способ для G узнать объединенную сплетню, известную изначально H (даже с учетом того, что мы рассматриваем сейчас не всех 14 сплетников), — это поговорить с ним. При этом G услышит повторно сплетню от F.

Случай $n = 18$ еще хуже.

4.4. Ответ: при $n = 1$, 2, 4, 8, 12, 16 и при всех четных $n \geqslant 20$.

Случаи $n = 1$, 2 тривиальны. Далее полагаем $n \geqslant 3$. Из решения задачи $4.3\frac{1}{2}$ сразу следует, что при нечетных n и при $n = 6$, 10, 14, 18 NODUP-схема не существует.

Утверждение [8, леммы 5, 6 и предложение 2]. При $n \equiv 0 \pmod 4$ возможно распространение слухов с ограничением NODUP.

Доказательство. По индукции.

Для n, являющихся степенью двойки, возможность распространения слухов следует из конструкции (1). Для $n = 12$, 20 примеры распространения слухов приведены в предыдущих задачах. Отнесем случаи $n = 4$, 8, 12, 16, 20 к базе индукции.

Докажем переход. Пусть $n \geqslant 24$ — очередное число, для которого мы хотим построить схему распространения слухов, а для меньших n существование такой схемы уже установлено. Заметим, что если n делится на 12, то можно разделить всех сплетников на 3 группы одинакового размера, в каждой из них число сплетников делится на 4 и меньше n, значит, внутри всех этих групп существует способ оповещения. Получим простой коллектив $(4a, 4a, 4a)$, $a = n/12$, который является суммой a сплоченных простых коллективов $(4, 4, 4)$. Если n не делится на 12, то $n = 12a + r$, где остаток $r = 4$ или 8. Если удастся разбить остаток на слагаемые $r = r_1 + r_2 + r_3$ таким образом, чтобы $4a + r_i$ сплетников по-прежнему образовывали группу, а (r_1, r_2, r_3) образовывали бы сплоченный коллектив, то все будет доказано. Действительно, тогда мы организуем три группы размера $4a + r_1$, $4a + r_2$, $4a + r_3$, а сумма будет содержать одно новое слагаемое — коллектив из r сплетников. Остаток $r = 4$ слишком мал, но всегда можно приписать к нему $12k$. Пусть $k = 1$, получаем коллектив $(4(a-1)+4, 4(a-1)+4, 4(a-1)+8)$, раскладывающийся в сумму из $a-1$ коллективов $(4, 4, 4)$ и коллектива $(4, 4, 8)$. При $r = 8$ можно положить $k = 2$ и все аналогично.

Утверждение [8, леммы 7, 8, 9 и предложение 3]. При $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \geqslant 22$ возможно распространение слухов с ограничением NODUP.

Доказательство. Мы наметим лишь план действий, подробности см. в [8].

Будем доказывать утверждение по индукции. База здесь представляет некоторую проблему: нужно проверить существование NODUP-схемы для всех четных маленьких n (а именно, при $20 \leqslant n \leqslant 62$).

Заметим, что если бы n делилось на 16, то можно было бы разделить сплетников на 4 группы одинакового размера, образующих простой сплоченный коллектив $(4a, 4a, 4a, 4a)$, $a = n/16$ (в каждой группе число сплетников делится на 4, а для таких чисел уже все доказано).

Но в рассматриваемом случае n не делится даже на 4, значит, $n = 16a + r$, где остаток r может быть равен 2, 6, 10, 14. Если в каждом из этих случаев удастся разбить остаток на слагаемые $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ таким образом, чтобы для $4a + r_i$ сплетников существовал способ оповещения и коллектив (r_1, r_2, r_3, r_4) был сплоченным, то мы получим доказательство утверждения для n сплетников все получится. Действительно, тогда можно было бы разбить n сплетников на группы $4a + r_1$, $4a + r_2$, $4a + r_3$, $4a + r_4$, а потом разбиваем коллектив на слагаемые: $(4a, 4a, 4a, 4a)$ и (r_1, r_2, r_3, r_4).

Однако остатки 2–14 слишком маленькие. Можно приписать ко всем остаткам $16k$. Полагая $k = 3$, получаем сплоченный коллектив $(4a, 4a, 4a, 4a)$, где $a \geqslant 3$, и остатки $r = 50$, 54, 58, 62. Например, в первом случае $r = 50 = 8 + 8 + 12 + 22$, $(8, 8, 12, 22)$ — сплоченный коллектив, и для $n = 4a + 8$, $4a + 12$, $4a + 22$ существует способ оповещения в силу базы индукции. В случае остатков $r = 54$, 58, 62 можно выполнить аналогичную конструкцию.

4.4$\frac{1}{2}$. Это лемма 2.5 [10]. Заметим, что в любой схеме оповещения с ограничением NODUP сплетники разбиваются первыми звонками на пары (как в задаче 1.6). Доказательство см. в начале решения задачи 4.3$\frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что утверждение задачи неверно, и некоторый сплетник A поговорил по телефону всего два раза. Пусть первый раз он беседовал со сплетником B, тогда после их беседы A-слух и B-слух циркулируют вместе. Если во второй раз A беседовал с C, то в этот момент C знал все слухи, кроме A-слуха и B-слуха. Если предыдущий разговор сплетника C был с D, то D тот момент тоже знал все слухи, кроме A-слуха и B-слуха. Единственный возможный способ для D завершить ознакомление со слухами — это поговорить с B, когда B знает только эти два слуха. Но тогда A-слух и B-слух не станут известны остальным $n-4$ сплетникам.

4.5. Следующее утверждение доказано в заметках Д. Веста [13] и А. Сереша [10, § 3]

Утверждение Пусть $n = 4k$. Тогда достаточно $9k - 6$ звонков.

Доказательство. Разобьем сплетников на k групп по 4 человека, в каждой из которых организуем звонки таким образом, чтобы все узнали сплетни своей группы. Это можно сде-

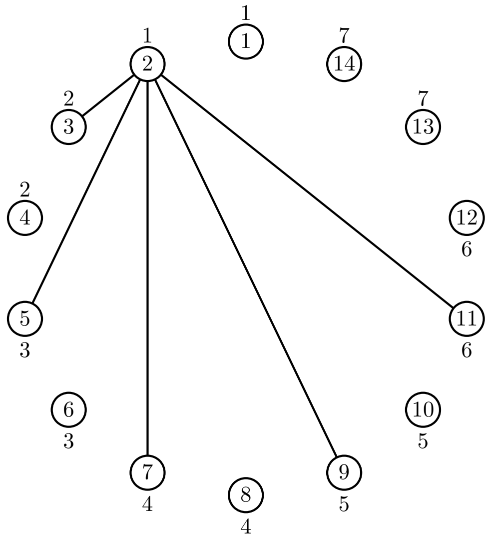


Рис. 3. В кружках номера сплетников первого множества. Линии означают звонки второго сплетника. Рядом с кружком записаны номера объединенных сплетен, известных этому сплетнику до показанных на рисунке звонков.

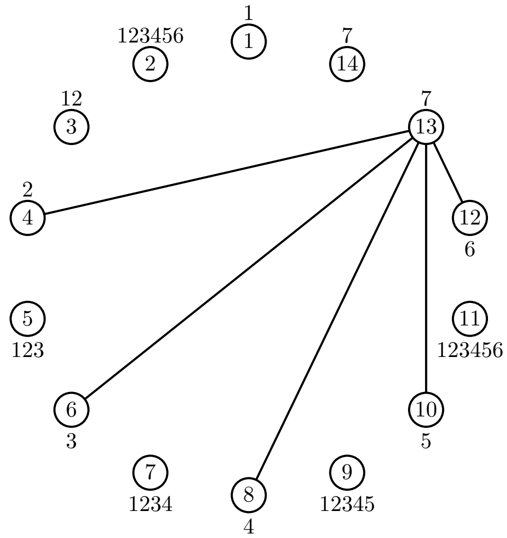


Рис. 4. Линии означают звонки $2k-1$-го сплетника

лать за $4k$ звонков. Теперь поделим сплетников на два одинаковых множества по $2k$ человек, в каждое попадет пара сплетников, знающая все сплетни i-той группы, $i = 1, \ldots, k$. Организуем звонки в первом множестве таким образом, чтобы все сплетники разбились на пары и каждая пара сплетников узнала все сплетни, кроме одной. Тогда каждой паре сплетников первого множества будет соответствовать пара сплетников из второго множества, с которой они могут поговорить, чтобы узнать все. Для этого потребуется $2k$ звонков. Осталось в первом множестве построить нужную конфигурацию из $3k-6$ звонков.

Нужная последовательность звонков показана на рисунках 3–5. Пронумеруем сплетников первого множества и расположим их на окружности. Сначала $k-2$ звонка делает второй сплетник: он звонит всем сплетникам, имеющим нечетные номера, кроме $(2k-1)$-го: $3, 5, 7, \ldots$ (именно в такой последовательности). Следующие $k-2$ звонка делает $(2k-1)$-й сплетник: он звонит всем сплетникам, имеющим четные номера, кроме второго: $2(k-1)$, $2(k-2), \ldots$ (тоже последовательно). После этих звонков 4 сплетника уже знают все сплетни, кроме одной, а именно: второй и $(2k-3)$-й сплетники знают все сплетни, кроме k-й, а четвертый и $(2k-1)$-й — все сплетни, кроме первой, см. рис. 5. Остальных сплетников разобьем на пары: для $i = 2, \ldots, k-1$ пусть сплетник, знающий сплетни $1, 2, \ldots, i-1$, позвонит сплетнику, знающему сплетни $i+1, i+2, \ldots, n$ (см. рис. 5), в результате чего образуется пара сплетников, знающая все сплетни, кроме i-й. На это потребуется еще $k-2$ звонков.

4.6. Это доказано в статье [10, теорема 4.1].

5.1. a) Ответ: $(n-1)(k+1)$ телеграмм.

Мы взяли это утверждение в [2, Теорема 4.1].

Пример. Пусть каждый рядовой пошлет $k+1$ телеграмму генералу.

Оценка. Каждый рядовой должен послать не менее $k+1$ телеграммы.

b) Ответ: $(k+2)n-2$ телеграммы.

Мы взяли это утверждение в [2, Теорема 4.2]

Пример. Приведем пример ориентированного графа, в котором от каждой вершины до любой другой существует $k+1$ реберно непересекающихся восходщих путей. Проведем $k+2$ ребра от вершины с номером i к вершине с номером $i+1$ с весами $i, n+i, 2n+i, \ldots, (k+1)n+i$ при $i = 1, 2, \ldots, n-2$; $k+1$ ребро от вершины с номером $n-1$ к вершине с номером n с весами $n-1, 2n-1, \ldots, (k+1)n-1$ и $k+1$ ребро от вершины с номером n к вершине с номером 1 с весами n, $2n$, $\ldots$, $(k+1)n$. На рис. 6 показан пример такого графа при $n=6$, $k=2$.

Оценка. Пусть дан граф звонков, в котором от каждой вершины до любой другой доходят телеграммы даже в случае удалении k ребер. Пусть H — подграф этого графа, содержащий только первые $n-2$ ребер. Граф H не является связным. Значит, для каждой вершины существует по крайней мере $k+1$ ребро, не лежащее в H. Следовательно, общее число ребер графа звонков не меньше $(n-2)+(k+1)n$.

5.2. Это утверждение мы взяли в статье [2, теорема 2.1].

Для построения примеров нам понадобится граф на n вершинах, обозначим его T_n, в котором у генерала степень 0 или 1, остальные вершины имеют степень k, где $k \leqslant n-2$. Строение T_n зависит от четности n и k. Пронумеруем вершины, пусть номер генерала равен n. При четном k между вершинами с номерами i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, есть ребро, если $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm1, \pm2, \ldots, \pm k/2\}$. Если k нечетно, а n четно, то проведем ребра при $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm1, \pm2, \ldots, \pm(k-1)/2\}$, а также добавим любое паросочетание на n вершинах. Если n и k оба нечетные, то проведем ребра при $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm1, \pm2, \ldots, \pm(k-1)/2, (n-1)/2\}$.

Вернемся к решению задачи. Напомним, что в графе звонков могут быть кратные ребра. Чтобы следить за порядком совершения звонков, поставим на ребрах метки (вещественные числа): чем позже был звонок, тем крупнее должна быть соответствующая метка. Допустимы одинаковые метки звонков, если звонки совершаются последовательно и при этом могут быть переставлены друг с другом. Назовем путь в графе звонков *восходящим*, если при движении вдоль пути веса ребер возрастают.

а) Поскольку после удаления k ребер граф должен остаться связным, степень каждой вершины не может быть меньше $k+1$. Так как сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер, получаем, что число звонков больше либо равно $\left\lceil \frac{k+1}{2} \cdot n \right\rceil$.

Осталось предъявить граф, который обеспечивает возможность передать все слухи генералу и у которого все вершины имеют степень $k+1$ (при неблагоприятной четности одна из вершин будет вынуждена иметь степень $k+2$). При $k \geqslant n-1$ такой граф действительно существует, а при меньших k имеются проблемы с расстановкой весов.

Поделим $k+1$ на $n-1$ с остатком: $k+1 = a(n-1)+b$, где $a>0$, $0 \leqslant b < n-1$. Построим граф, состоящий из объединения a графов K_n (полных графов на n вершинах) и графа R, у которого все вершины имеют степень b, кроме вершины-генерала, степень которой равна b или $b+1$. Такой граф нетрудно построить, взяв граф T_{n+1} из начала решения

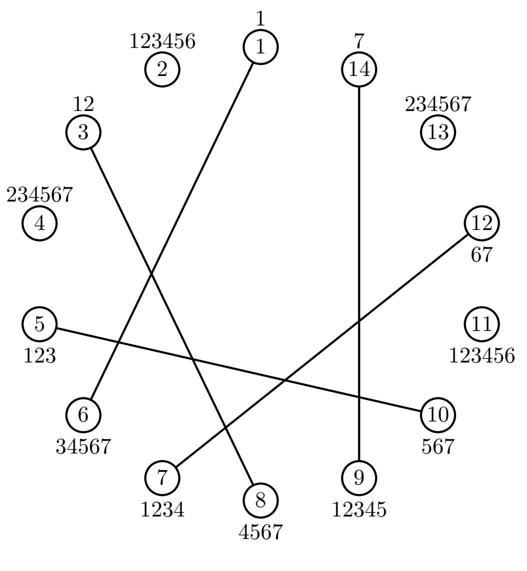


Рис. 5. c) Оставшиеся звонки в первом множестве.

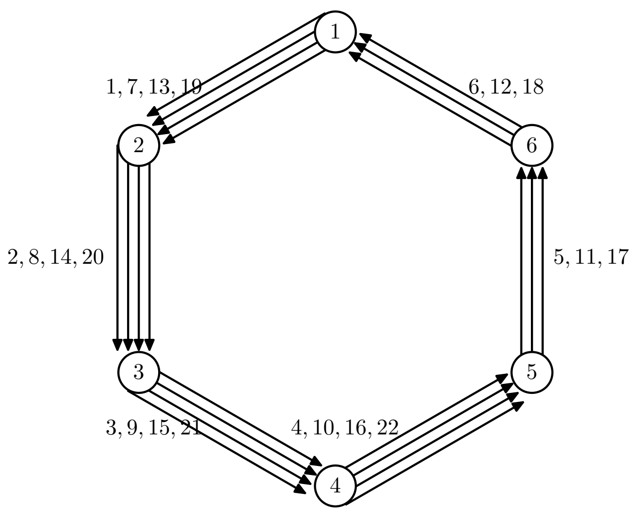


Рис. 6. Плохая почта

и объединив вершину-генерала с одной из «обычных» вершин. Теперь назначим веса ребер. Пусть самые маленькие веса имеют ребра графа R, не соединенные с генералом. Пусть ребра графов K_n, тоже не соединенные с генералом, имеют вес побольше. А ребра всех графов, соединенные с генералом, имеют самые большие веса. Внутри каждого из этих трех множеств ребер веса могут быть упорядочены произвольно. Тогда от каждой вершины до генерала идут $k+1$ непересекающихся по ребрам путей. Следовательно, даже после удаления из графа произвольных k ребер информация все равно дойдет до генерала. Все вершины построенного графа имеют степень $k+1$, кроме генерала, который может иметь степень $k+1$ или $k+2$.

b) При $k = 0$ граф звонков должен быть связным, следовательно, в нем не менее $n-1$ ребер, а с другой стороны, дерево, корнем которого является генерал, а все пути к корню восходящие, является примером подходящего графа.

Рассмотрим теперь граф звонков при $1 \leqslant k < n-1$. Возьмем произвольную вершину v (отличную от генерала) и среди инцидентных ей ребер выберем ребро ℓ максимального веса. Пусть некоторый восходящий путь проходит через это ребро: он пришел в вершину v по ребру меньшего веса и вышел по ребру ℓ. Перенаправим ребро ℓ сразу в вершину-генерала. В результате число ребер графа осталось прежним и, как нетрудно видеть, после этого изменения генерал по-прежнему сможет получить все слухи в условиях плохой связи. Сделаем такую операцию для всех вершин, тогда каждая вершина окажется соединенной с генералом. Значит, степень генерала не меньше $n-1$. Суммируя степени вершин, получаем теперь, что число звонков больше либо равно $\lceil\frac{(k+1)\cdot(n-1)+(n-1)}{2}\rceil$.

Теперь построим граф, обеспечивающий генерала слухами, в котором степени всех рядовых равны $k+1$, а степень генерала равна $n-1$ или n (за счет кратного ребра, при неблагоприятной четности). Возьмем граф T_n, описанный в начале решения, произвольно назначим (небольшие) веса его ребер, после чего соединим все вершины T_n с генералом, назначив новым ребрам большие веса.

5.3. [2, Теорема 3.1]

a) Приведем пример подходящего графа звонков. Пусть n нечетно. Тогда от каждой вершины с нечетным номером, не равным 1, проведем k ребер к вершине с номером 1 с весами 3, 5, $\ldots$, $2k+1$, а от каждой вершины с четным номером проведем $k+1$ ребер к вершине с номером 1 с весами 2, 4, $\ldots$, $2k+2$. Теперь проведем два ребра между вершинами с номерами i и $i+1$ с весами 1 и $2k+3$. Получилось много ребер с одинаковыми весами. В данном случае веса ребер обозначают не номера звонков, а имеется в виду, что ребра разбиваются на классы (множества ребер с одинаковыми весами), в каждом классе ребра могут быть упорядочены произвольно, но ребро класса i всегда имеет меньший номер, чем ребро класса j при $i < j$. Пример такого графа при $n = 7$ и $k = 3$ показан на рис. 7. Можно проверить, что тогда от каждой вершины до каждой проходят $k+1$ реберно непересекающихся путей.

Если n четно, то к предыдущей конструкции присоединим еще одну вершину, соединив ее $k+1$ ребром с первой вершиной, веса ребер будут 2.5, 3.5, 5.5, 7.5, $\ldots$, $2k+1.5$.

b) Оценим $\tau(n,k)$ через $\mu(n,k)$. Пусть G — граф звонков, в котором даже после удаления k ребер информация от каждой вершины будет доходить до любой другой. Посмотрим на ситуацию после того, как мы сделали r первых звонков. Оставшиеся звонки образуют граф на тех же вершинах, который будем называть H. Рассмотрим произвольную вершину v графа H. Заметим, что этой вершине для получения полной информации (даже с учетом удаления k ребер) требуются только первые r звонков и звонки внутри ее компоненты связности в графе H. Значит, число ребер графа, содержащего ребра, которые ей могут пригодиться, больше либо равно $\mu(n,k)$. Будем считать, что $r = \mu(n,k) - \xi$, где ξ подберем таким образом, чтобы получить наилучшую оценку. Очевидно, $|E(G)| = r + |E(H)|$. Чтобы оценить число ребер H снизу, будем считать, что вершина v лежит в компоненте связности наименьшего размера, пусть l — число ребер этой компоненты, тогда количество компонент не меньше $\frac{n}{l}$, и $|E(H)| \geqslant n - \frac{n}{l}$ (правая часть — это количество ребер в графе в предположении, что все компоненты содержат по l вершин и являются деревьями). При этом $l \geqslant \xi$, так как в противном

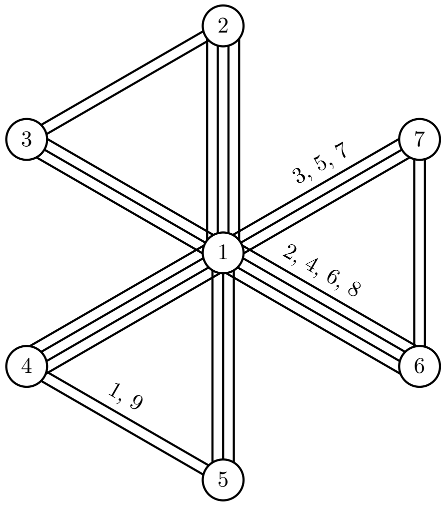


Рис. 7. Конструкция графа

случае рассматриваемая вершина v может не получить полной информации, следовательно, $|E(H)| \geqslant n - \frac{n}{\xi}$. Получим $|E(G)| \geqslant (\mu(n,k) - \xi) + E(H) \geqslant (\mu(n,k) - \xi) + (n - \frac{n}{\xi})$. Правая часть минимальна при $\xi = \sqrt{n}$ и мы получаем неравенство $E(G) \geqslant \mu(n,k) + n - 2\lceil\sqrt{n}\,\rceil$.

5.4. Мы взяли это утверждение в [3, Теорема 3.2].

а) Как обычно, оценка сверху получается предъявлением примера. Пусть R — регулярный (или почти регулярный) (мульти)граф на n вершинах, в котором каждая вершина имеет степень k (за исключением, возможно, одной вершины, имеющей степень $k+1$). Рассмотрим следующую схему оповещения. Сначала выполним $2n-4$ звонка в соответствии с любым наибыстрейшим способом оповещения. После этого произвольно выполним звонки, соответствующие ребрам графа R. Все слухи, полученные всеми сплетниками в этой схеме, очевидно, являются надежными. При этом схема содержит $\lceil\frac{(k+4)n}{2}\rceil - 4$ звонков.

б) Лемма 1 [3, лемма 3.1]. Пусть дано дерево T на n вершинах, в котором на каждом ребре задан вес, позволяющий «хронологически» упорядочивать ребра. Для каждой вершины u обозначим через r_u наибольшее количество вершин, в которые можно прийти из вершины u, двигаясь так, чтобы вес при движении возрастал. Минимальное по всем вершинам дерева значение r_u обозначим через $R(T)$. Обозначим через $r(n)$ максимум величины $R(T)$ по множеству всех ориентированных деревьев T с n вершинами. Тогда $r(n) = \lfloor\log_2 n\rfloor$.

Доказательство. Рассмотрим дерево T, для которого $R(T) = r(n)$. Пусть xy — ребро максимального веса, T_x, T_y — компоненты связности, которые получаются после его удаления ($x \in T_x$, $y \in T_y$). Можно считать, что в T_x не больше вершин, чем в T_y, тогда $R(T_x) \leqslant r(\lfloor n/2\rfloor)$. Выберем в T_x вершину u, реализующую значение $R(T_x)$. В дереве T путь из вершины u не может пройти в компоненту T_y дальше вершины y, поскольку xy — ребро максимального веса. Тогда $r(n) = R(T) \leqslant r_u + 1 = R(T_x) + 1 \leqslant r(\lfloor n/2\rfloor) + 1$. Вместе с начальным условием $r(1) = 0$ мы получаем неравенство $r(n) \leqslant \lfloor\log_2 n\rfloor$.

Пример, реализующий равенство, строится по индукции. На очередном шаге берем две копии дерева, служащего примером для $n-1$, и, сохраняя относительный порядок ребер внутри каждой копии, соединяем их корни ребром максимального веса. □

Лемма 2 [3, следствие 2.1]. Пусть в (мульти)графе G на n вершинах на каждом ребре задан вес, с помощью которого можно хронологически упорядочить ребра. Пусть u — фиксированная вершина графа G. Пусть оказалось, что для каждой вершины $v \neq u$ существует не менее k возрастающих путей из u в v, которые отличаются друг от друга последними ребрами. Пусть, наконец, среди всех графов с такими свойствами граф G имеет наименьшее число ребер. Тогда в нем $\lceil\frac{(k+2)(n-1)}{2}\rceil$ ребер.

Доказательство. Граф G представляет собой объединение остовного дерева и k-

регулярного подграфа (или почти k-регулярного подграфа) на множестве всех вершин, за исключением u. В этом случае формула очевидна.

Построим это остовное дерево: для каждой вершины $v \neq u$ отметим ребро e_v с наименьшим весом, принадлежащее какому-нибудь восходящему пути из u в v. Мы отметили $n-1$ ребер, они задевают все вершины графа (минимальное ребро вершины u тоже окажется отмеченным), поэтому это остовное дерево. Далее, среди ребер вершины v ребро e_v — единственное ребро, принадлежащее хоть какому-то восходящему пути из u в v. Действительно, если ребро e_w инцидентно вершине v и лежит на пути из u в v, то этот путь проходит через w и тогда он должен входить в w по ребру, у которого вес меньше, чем вес e_w, что невозможно. Таким образом, граф G для каждой вершины u содержит, помимо e_u, еще не менее k ребер, инцидентных u. Ясно, что минимальное число ребер будет в k-регулярном случае. □

С помощью этих двух лемм решим задачу. Пусть имеется способ оповещения, обеспечивающий сплетников надежными слухами. Первые $n-1$ звонков этого способа оповещения задают подграф H в графе звонков. В силу малости количества звонков хотя бы одна из компонент подграфа H является деревом, обозначим его T. По лемме 1 в дереве T можно выбрать вершину u, из которой можно добраться по возрастающим путям лишь не более чем в $\lfloor \log_2 n \rfloor$ вершин. Уберем ребра всех этих путей из графа H, полученный граф назовем H', он содержит не менее $n-1-\lfloor \log_2 n \rfloor$ ребер.

Для графа $G - H'$ и вершины u выполнены условия леммы 2 (отброшенные нами ребра не могли быть использованы для построения путей из вершины u, так как они были хронологически «слишком ранними»), значит, в нем не менее $\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \rceil$ ребер. Тогда в G не менее $n-1-\lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \rceil$ ребер.

6.1. а) [5, Лемма 3] Индукция по k. База тривиальна. Для доказательства перехода отменим первый звонок. В результате дерево окажется разбитым на две компоненты, в каждой из которых перестанет быть известным один слух из противоположной компоненты. По индукционному предположению тогда каждая из компонент содержит не менее 2^{k-1} вершин.

Пункт б) решается аналогично.

6.2. Пример [5, Лемма 1]. Поделим n на 2^{k-1} с остатком: $n = 2^{k-1}n_1 + n_2$. Разобьем сплетников на n_1 групп по 2^{k-1} человек и последнюю группу из n_2 человек. В каждой группе из 2^{k-1} человек можно сделать 2^{k-1} звонок так, чтобы в результате все члены группы знали по k слухов (двое звонят друг другу — в результате двое знают по 2 слуха; потом каждый из них разговаривает новым членом группы, в результате четверо знают по 3 слуха; потом каждый из четырех разговаривает с новым членом группы, в результате восемь человек знают по 4 слуха и т.д.). Что касается последней группы, пусть каждый человек из нее позвонит комунибудь из первых групп, когда там уже закончатся звонки, чтобы узнать k слухов. Итого, $P(n,k) \leqslant (2^{k-1}-1)n_1 + n_2 = \lceil \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \cdot n \rceil$.

Оценка [5, Лемма 4]. Докажем оценку $P(n,k) \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} n$, не накладывая никаких условий на k.

Рассмотрим последовательность, дающую $P(n,k)$ звонков. Пусть для каждого $i \geqslant 1$ этот граф звонков G имеет n_i компонент связности, содержащих i вершин, тогда

$$\sum_i i n_i = n.$$

Заметим, что каждая компонента с i вершинами имеет не менее $i-1$ ребер. Более того, по утверждению задачи 6.1 малые компоненты (те, для которых $i < 2^{k-1}$) не могут быть деревьями, значит, в них не менее i ребер. Таким образом,

$$P(n,k) \geqslant \sum_{i<2^{k-1}} i n_i + \sum_{i \geqslant 2^{k-1}} (i-1) n_i.$$

Осталось заметить, что $i-1 \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} i$ при $i \geqslant 2^{k-1}$, и следовательно,

$$P(n,k) \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \sum_i i n_i = \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} n.$$

6.3. [5, Лемма 2] Выделим из множества всех сплетников два непересекающихся набора: набор X, состоящий из i сплетников, и набор $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{2^{k-i-2}}\}$ из 2^{k-i-2} сплетников. Звонки организуем следующим образом. Сначала каждый человек из множества X сообщает сплетнику y_1 свой слух. В результате сделано i звонков, а сплетник y_1 знает теперь $i+1$ слух. Далее итерационным процессом мы начинаем удваивать число «осведомленных» сплетников в множестве Y. База: делаем звонки: y_1y_2, y_3y_4, y_1y_3, y_2y_4; в результате сделано 4 звонка и первые 4 человека из множества Y знают по $i+4$ слуха. Переход. Если на предыдущем шаге первые 2^r человек из множества Y знали $i+r+2$ слуха, то на очередном шаге мы делаем 2^r звонков

$$y_1y_{1+2^r}, \quad y_2y_{2+2^r}, \quad \dots, \quad y_{2^r}y_{2^{r+1}}$$

и теперь первые 2^{r+1} сплетников из множества Y знают по $i+r+3$ слухов. Процесс завершится, когда будет «охвачено» все множество Y. К этому моменту будет всего сделано $i+2^{k-i-2}$ звонков и все сплетники из Y будут знать k слухов. После этого пусть y_1 позвонит всем сплетниками не из Y, сообщив им свои k слухов. Таким образом, $P(n,k) \leqslant i+2^{k-i-2}+(n-2^{k-i-2}) = n+i$.

В этом рассуждении мы использовали лишь неравенство $t_i \leqslant n$.

6.4. Пусть имеется последовательность c_i звонков сплетников ($1 \leqslant i \leqslant s$). Заметим, что если во время некоторого звонка c_i поговорили два человека, а следующий звонок c_{i+1} осуществляют два других человека, то мы можем переставить эти звонки друг с другом, что не повлияет на результат распространения сплетен с помощью данной последовательности звонков. Такое же *перестановочное правило* действует для наборов из нескольких звонков: если две группы из нескольких последовательных звонков $c_{j-p}, c_{j-p+1}, \dots, c_{j-1}$ и $c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+q-1}$ непосредственно следуют одна за другой и не пересекаются по множеству разговаривавших в них людей, эти две группы звонков можно поменять местами. Получится последовательность

$$c_1, \dots, c_{j-p-1}, \quad c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+q-1}, \quad c_{j-p}, c_{j-p+1}, \dots, c_{j-1}, \quad c_{j+q}, \dots, c_s,$$

которая дает то же финальное распределение сплетен, что и исходная. Последовательности звонков, полученные друг из друга с помощью таких перестановок, будем называть *эквивалентными.*

С учетом результата предыдущей задачи, для доказательства требуемого утверждения достаточно проверить, что при $t_i \leqslant n < t_{i-1}$, где $0 \leqslant i \leqslant k-4$, имеет место неравенство $P(n,k) \geqslant n+i$. Мы докажем более тонкий вариант этого неравенства [5, Лемма 5], из которого это утверждение сразу следует. Будем называть сплетника *осведомленным*, если в результате разговоров он узнает не менее k слухов.

Лемма. Предположим, что $n \leqslant t_{i-1}-1$, где $0 \leqslant i \leqslant k-4$. Пусть $c_1, \dots, c_{i+j}$ — последовательность из $i+j$ звонков. Тогда

1) в результате этих звонков образовалось не более j осведомленных сплетников;

2) если в результате этих звонков образовалось ровно j осведомленных сплетников (запомним их), то существует эквивалентная последовательность $c'_1, \dots, c'_{i+j}$, в которой последние j звонков $c'_{i+1}, c'_{i+2}, \dots, c'_{i+j}$ были только строго между осведомленными сплетниками (т.е. только между теми людьми, которых мы запомнили).

Доказательство. Индукция по j.

База $1 \leqslant j \leqslant k-i-2$. Тогда $i+j \leqslant k-2$, т.е. любая компонента связности графа звонков содержит не более $k-1$ вершины, поэтому ни один из сплетников пока еще не стал осведомленным. Оба доказываемых утверждения оказались неинтересными.

Переход. Пусть $j \geqslant k-i-1$, и для $j' = j-1$ выполняется предположение индукции.

Докажем утверждение 1). Пусть в результате последовательности из j звонков имеется $j+1$ осведомленный сплетник. Поскольку в результате последнего звонка c_{i+j} могло появиться не более двух осведомленных сплетников, к моменту завершения звонка c_{i+j-1} было в точности $j-1$ осведомленных сплетников $x_1, \ldots, x_{j-1}$, а последний звонок состоялся между «новыми» осведомленными сплетниками x_j и x_{j+1}. В силу второго утверждения предположения индукции мы можем считать, что все звонки $c_{i+1}, \ldots, c_{i+j-1}$ были строго между сплетниками $x_1, \ldots, x_{j-1}$, и тогда эту группу звонков можно переставить с c_{i+j}. Но тогда в результате $i+1$ звонка $c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+j-1}$ появилось два осведомленных сплетника. Этого не может быть, поскольку при ограничениях $i \leqslant k-4$ на переменную i не может появиться вообще ни одного осведомленного сплетника (компонента связности, содержащая осведомленного сплетника – это как минимум дерево, содержащее k вершин, поэтому в ней не менее $k-1 > i+1$ ребер).

Докажем утверждение 2). Предположим что в результате $i+j$ звонков мы имеем ровно j осведомленных сплетников, но при этом последние j звонков затрагивали не только этих сплетников. Тогда выберем максимально возможное p, такое что последние звонки $c_{i+p+1}, \ldots, c_{i+j}$ были только между осведомленными сплетниками. Заметим, что тогда один из собеседников звонка c_{i+p} — тоже осведомленный, так как иначе мы могли бы перенести этот звонок в конец последовательности звонков и мы получили бы тех же j осведомленных сплетников уже после $i+j-1$ звонков, что противоречит предположению индукции.

Пусть G — граф звонков, G' — его подграф, образованный звонками $c_{i+p}, \ldots, c_{i+j}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $p=1$ и при этом граф G' оказался связным. Тогда G' — дерево (в нем j ребер и $j+1$ вершина — все осведомленные сплетники и один неосведомленный участник звонка c_{i+p}). Рассмотрим компоненту C' графа G, которая содержит G'. Пусть эта компонента содержит i' вершин вне G', тогда она должна содержать еще по крайней мере i' ребер (кроме ребер, лежащих в G'). Эти ребра задают какие-то из звонков $c_1, \ldots, c_i$, поэтому $i' \leqslant i$. Удалим эти i' звонков из полной последовательности звонков, это приведет к тому, что по окончании звонков в дереве G' все сплетники, кроме одного, будут знать не менее $k-i'$ слухов. Тогда по утверждению задачи 6.1 б) выполнено неравенство $j+1 \geqslant 2^{k-i'-1}-1$. Тогда

$$t_{i-1} - 1 = i - 2 + 2^{k-i-1} \geqslant n \geqslant i' + j + 1 \geqslant i' + 2^{k-i'-1} - 1 \geqslant i + 2^{k-i-1} - 1 = t_{i-1}.$$

Противоречие. В последнем неравенстве мы воспользовались убыванием последовательности t_i.

Теперь рассмотрим остальные случаи: когда $p > 1$ или граф G' состоит из двух или более компонент. Обозначим через C компоненту графа G', содержащую звонок c_{i+j}. Переобозначим звонки: пусть $c'_1 = c_{i+j}, c'_2, \ldots, c'_r$ — это звонки в хронологическом порядке, совершенные в компоненте C, и пусть $c''_1, c''_2, \ldots, c''_s$ — остальные звонки в G'. В обоих рассматриваемых случаях $r < j$ (а вот параметр s может быть равен нулю, когда $p > 1$).

В силу перестановочного правила все звонки $c''_1, \ldots, c''_s$ можно осуществить до звонков $c'_1, \ldots, c'_r$, т. е. исходная последовательность звонков эквивалентна последовательности

$$c_1, c_2, \ldots, c_{i+p-1}, \quad c''_1, \ldots, c''_s, \quad c'_1, \ldots, c'_r.$$

Поскольку звонок c'_1 затрагивает только одного осведомленного сплетника, компонента C содержит не более r осведомленных сплетников (в ней r ребер и не более $r+1$ вершин). Значит, после $i+j-r$ звонков из выписанной последовательности образовалось не менее $j-r$ осведомленных сплетников. Тогда по индукционному предположению количество осведомленных сплетников должно быть в точности равно $j-r$ (и тогда компонента C содержит ровно r осведомленных сплетников), и можно реорганизовать эти $i+j-r$ звонков так, что последние $j-r$ звонков будут между осведомленными сплетниками (не лежащими в C):

$$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}, \quad c'_1, \ldots, c'_r.$$

Так как в этой последовательности звонки $\tilde{c}_{i+1}, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}$ совершаются между осведомленными сплетниками не из C, мы можем переставить их со звонками $c'_1, \ldots, c'_r$. Получится эквивалентная последовательность

$$\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_i, \quad c'_1, \ldots, c'_r, \quad \tilde{c}_{i+1}, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}.$$

Первые $i+r$ звонков этой последовательности приводят к появлению r осведомленных сплетников. Значит, по предположению индукции можно переупорядочить эти $i+r$ звонков так, чтобы последние r звонков из них осуществлялись между осведомленными сплетниками. Сделав это, мы получим требуемое: в образовавшейся последовательности последние j звонков происходят между осведомленными сплетниками. Лемма доказана. □

Список литературы

[1] *Шаповалов А.В.* Задача о сплетниках // Математическое просвещение. Сер. 3. 2015. Вып. 19. С. 249–253

[2] *Berman K., Hawrylycz M.* Telephone problems with failures // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1986. Vol. 7. P. 13–17.

[3] *Berman K., Paul J.* Verifiable broadcasting and gossiping in communication networks // Discr. Appl. Math. 2002. Vol. 118. P. 293–298.

[4] *Bumby R.* A problem with telephones // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1981. Vol. 2. P. 13–18.

[5] *Chumg G., Tsay Y.-J.* The partial gossiping problem // Discr. Math. 1996. Vol. 148. P. 9–14.

[6] *Harary F., Schwenk A.J.* The communication problem of graphs and digraphs // J. Franklin Inst. 1974. Vol. 297. P. 491-–495.

[7] *Kleitman D. J., Shearer J. B.* Further gossip problems // Discr. Math. 1980. Vol. 30. P. 151–156.

[8] *Seress A.* Gossiping old ladies // Discrete Math. 1983. Vol. 46. P. 75–81.

[9] *Seress A.* Gossips by conference calls // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1987. Vol. 22. P. 229-—238.

[10] *Seress A.* Quick Gossiping without Duplicate Transmissions // Graphs and Combinatorics. 1986. Vol. 2 P. 363–381.

[11] *Tijdeman R.* On a telephone problem // Nieuw Arch. Wisk. 1971. Vol. 19. P. 188–192.

[12] *West D.* A class of solutions to the gossip problem, I // Discrete Mathematics. 1982. Vol. 39. P. 307–326.

[13] *West D.* Gossiping without duplicate transmissions // SIAM J. Alg. Disc. Math. 1982. Vol. 3. P. 418–419.

[14] *West D.* Introduction to graph theory. 2nd edition. Univ. of Illinois, 2001.