| ЛКТГ | $pqr$-метод [1 2 3] | август 2016 |
|---|---|---|

**А.В. Доледенок, А.Б. Меньщиков, А.С. Семченков, М.А. Фадин**

# 1 Вместо вступления

В этом параграфе вам предлагается решить несколько задач. Если у вас не получится это сделать (а мы считаем их непростыми), попробуйте вернуться к ним уже после доказательства $pqr$-лемм.

**1.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a+b+c=1$. Докажите, что

$$1+12abc \geqslant 4(ab+bc+ca).$$

**2.** Про вещественные числа $a$, $b$, $c$ известно, что

$$a+b+c=9, \quad ab+bc+ca=24.$$

Докажите, что $16 \leqslant abc \leqslant 20$. Докажите также, что для любого $r \in [16, 20]$ существуют вещественные $a$, $b$, $c$ такие, что $a+b+c=9$, $ab+bc+ca=24$, $abc=r$.

**3.** Пусть $P$ — симметрический многочлен от трёх переменных не более чем пятой степени. Докажите, что если $P(a,a,c) \geqslant 0$ и $P(0,b,c) \geqslant 0$ для всех неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$, то $P(a,b,c) \geqslant 0$ для любых неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$.

**4.** (Россия, отбор на IMO, 2015) Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $1+a+b+c=2abc$. Докажите, что

$$\frac{ab}{1+a+b}+\frac{bc}{1+b+c}+\frac{ca}{1+c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**5.** (Иран, отбор на IMO, 1996) Неотрицательные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

# 2 Симметрические многочлены

Начнём изучение $pqr$-метода с изучения симметрических многочленов. Основные результаты этого раздела понадобятся нам в дальнейшем.

[1] В настоящий момент общепринятым является название $uvw$-метод.

[2] Благодарим М.А. Розенберга за полезные замечания. Особо отметим его важную роль в популяризации $uvw$-метода.

[3] Благодарим А.Н. Доледенок и И.И. Богданова за помощь в переводе проекта.

## 2.1 Свойства симметрических многочленов

**6.** Выразите через $a+b$ и $ab$ выражения $a^2+b^2$, $a^3+b^3$, $a^4+b^4$, $(a-b)^2$.

Для трёх переменных $a$, $b$, $c$ введём обозначения $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$ — элементарные симметрические многочлены от трёх переменных.

**7.** Выразите через $p$, $q$, $r$ выражения $a^2+b^2+c^2$, $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$, $a^3+b^3+c^3$, $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$, $a^4+b^4+c^4$, $(a+b)(b+c)(c+a)$.

**8.** Для целых неотрицательных $k$ положим $s_k=a^k+b^k+c^k$. Выведите рекуррентную формулу (с коэффициентами, зависящими от $p$, $q$, $r$), выражающую $s_k$ $(k\geqslant 3)$ через $s_{k-1}$, $s_{k-2}$ и $s_{k-3}$.

Назовём многочлен $G(a,b,c)$ от трёх переменных *симметрическим*, если он не меняется при перестановке любых двух переменных (т.е. $G(a,b,c)=G(b,a,c)=\ldots$). Результатом следующей задачи в дальнейшем можно пользоваться без доказательства.

**9.** Докажите, что любой симметрический многочлен от переменных $a$, $b$, $c$ можно представить как многочлен от переменных $p$, $q$, $r$.

**10.** Дано вещественное число $t$. Решите систему уравнений $\begin{cases} a+b+c=t,\\ a^2+b^2+c^2=t^2,\\ a^3+b^3+c^3=t^3.\end{cases}$

Переформулировка задачи в терминах симметрических многочленов часто помогает при доказательстве неравенств, однако, есть проблема: например, очевидное неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant 0$, где $a$, $b$, $c$ — вещественные числа, перепишется как $p^2-2q\geqslant 0$, что, вообще говоря, неверно для произвольных $p$ и $q$. Оказывается, что $p$, $q$ и $r$ не могут быть произвольными, и наша дальнейшая цель — определить, какими они могут быть.

**11.** Для вещественных чисел $a,b,c$ докажите, что $q^2\geqslant 3pr$.

**12.** Для неотрицательных чисел $a,b,c$ докажите, что $\dfrac{p}{3}\geqslant\sqrt{\dfrac{q}{3}}\geqslant\sqrt[3]{r}$.

## 2.2 Симметрические многочлены от 2 переменных

Назовём *комплексным числом* упорядоченную пару $(x,y)$ вещественных чисел. Будем записывать его в виде $x+yi$, где $i$ называется *мнимой единицей*. Сложение и умножение комплексных чисел определим следующим образом:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Формула произведения такова, что $i^2=-1$. Для комплексного числа такого вида $x$ называется *вещественной частью*, а $y$ — *мнимой*. Комплексное число с нулевой вещественной частью называется *чисто мнимым*. *Сопряжённым* к комплексному числу $x + yi$ называется число $x - yi$ (оно обозначается через $\overline{x+yi}$). Отметим, что любое вещественное число $x$ является также и комплексным: $x = x + 0 \cdot i$.

Для двух комплексных чисел $a$ и $b$ введём обозначения $p = a + b$ и $q = ab$.

**13.** Докажите, что $a$ и $b$ — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$, и других корней нет.

**14.** Докажите, что если оба числа $p$ и $q$ — вещественные, то числа $a$ и $b$ или оба вещественны, или комплексно сопряжены.

**15.** Докажите, что если $p$ и $q$ вещественны, то $(a - b)$ является или вещественным, или чисто мнимым числом.

**16.** Выразите условие того, что $a$ и $b$ вещественны, в терминах $p$ и $q$ и неравенств от этих величин.

**17.** Докажите, что $a$ и $b$ вещественны и неотрицательны тогда и только тогда, когда $p$ и $q$ неотрицательны и выполнены условия на $p$ и $q$ из предыдущей задачи.

## 2.3 Симметрические многочлены от 3 переменных

Для трёх комплексных чисел $a$, $b$, $c$ введём следующие обозначения: $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$.

**18.** Докажите, что $a$, $b$, $c$ — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, и других корней нет.

Как и в случае двух переменных, мы покажем, что свойства вещественности и неотрицательности переменных $a$, $b$, $c$ выражаются через условия на $p$, $q$, $r$.

**19.** Докажите, что если числа $p'$, $q'$, $r'$ вещественны, то существуют такие числа $a'$, $b'$, $c'$ (единственные с точностью до перестановки), что $p' = a' + b' + c'$, $q' = a'b' + b'c' + c'a'$, $r' = a'b'c'$, причем либо все числа $a'$, $b'$, $c'$ вещественны, либо среди них одно вещественное, а два других комплексно сопряжены.

**20.** Известно, что все числа $p$, $q$, $r$ — вещественные. Докажите, что число

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

является вещественным, если все числа $a$, $b$, $c$ вещественны, и чисто мнимым в противном случае.

**21.** Докажите, что

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2.$$

*Подсказка.* Обозначим $l_{xy} = a^x b^y + b^x c^y + c^x a^y$. Тогда $(l_{12} - l_{21})^2 = (l_{12} + l_{21})^2 - 4l_{12}l_{21}$.

**22. Критерий вещественности.** Пусть дана тройка вещественных чисел $(p, q, r)$. Докажите, что числа $a$, $b$, $c$, определяемые как корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

(с учетом кратности), вещественны тогда и только тогда, когда $T(p,q,r) \geqslant 0$, где многочлен $T(p,q,r)$ определяется как $T(p,q,r) = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.

**23. Лемма о неотрицательности.** Докажите, что неравенства $p$, $q$, $r \geqslant 0$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$ равносильны тому, что числа $a$, $b$, $c$ вещественны и неотрицательны.

Может показаться, что формула для $T(p,q,r)$ — слишком сложная и неудобная для использования. Однако в дальнейшем мы будем пользоваться в основном следующим соображением. Посмотрим на условие $T(p,q,r) \geqslant 0$: допустим, мы зафиксировали какие-то две переменные (например, $p = p_0$ и $q = q_0$), тогда выражение $T(p,q,r)$ обратится в многочлен от оставшейся переменной (в нашем случае, от $r$). Условие $T(p,q,r) \geqslant 0$ в таком случае эквивалентно тому, что третья переменная (в нашем случае, $r$) принадлежит объединению нескольких отрезков и лучей.

## 3 $pqr$-леммы

Назовём тройку $(p,q,r)$ *допустимой*, если $p$, $q$, $r \geqslant 0$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$, то есть выполнено условие леммы о неотрицательности. Иными словами, у многочлена $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ есть три (возможно, кратных) вещественных неотрицательных корня.

**24. Лемма об $r$.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно $r$ такое, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима. Докажите, что для минимального $r$ такого, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима, в соответствующей тройке корней или есть два равных, или один из них равен 0. А для максимального $r$ такого, что $(p_0, q_0, r)$ допустима, верно, что в соответствующей тройке корней есть два равных.

**25. Лемма о $q$.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно $q$ такое, что тройка $(p_0, q, r_0)$ допустима. Докажите, что для минимального и максимального $q$ такого, что $(p_0, q, r_0)$ допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.

**26. Лемма о $p$.** Пусть для заданных $q = q_0$ и $r = r_0 > 0$ существует хотя бы одно $p$ такое, что тройка $(p, q_0, r_0)$ допустима. Докажите, что для минимального и максимального $p$ такого, что $(p, q_0, r_0)$ допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.
Останется ли утверждение верным, если $r_0 = 0$?

После долгого теоретического вступления мы наконец-то можем рассмотреть пример доказательства совсем простого неравенства с помощью $pqr$-метода.

**Пример.** Докажите, что для неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$ выполнено неравенство
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

**Доказательство.** Перепишем неравенство в виде $p^2 - 2q \geqslant q \Leftrightarrow p^2 \geqslant 3q$. Зафиксируем, к примеру, значения $p = p_0$ и $r = r_0$. Теперь нам надо доказать неравенство

$q \leqslant \frac{p_0^2}{3}$, то есть показать, что $q$ ограничено сверху некоторой константой. Заметим, что если мы докажем неравенство для максимального $q$, то оно будет верно для всех $q$. По лемме о $q$ максимальное значение $q$ достигается, когда какие-нибудь из переменных $a$, $b$, $c$ равны. Без ограничения общности, $a = b = x$, $c = z$. Поскольку неравенство $q \leqslant \frac{p_0^2}{3}$ равносильно исходному, то после подстановки в исходное неравенство получим

$$2x^2 + z^2 \geqslant x^2 + 2xz \Leftrightarrow (x - z)^2 \geqslant 0,$$

что верно. Следовательно, неравенство верно для всех положительных чисел $a$, $b$, $c$. Равенство возможно, только если $x = z$, то есть если $a = b = c$.

Теперь вы можете вернуться к параграфу 1 и применить $pqr$-метод для решения предложенных там задач!

# 4 Неравенства

*Допустим, мы доказываем симметрическое неравенство от трёх неотрицательных переменных $a$, $b$, $c$. Зафиксируем две из трёх переменных $p, q, r \geqslant 0$. Перепишем исходное неравенство в виде $f \geqslant 0$, где $f$ — функция от оставшейся переменной. Тогда, если $f$ является монотонной или вогнутой, то неравенство достаточно проверять в случае $a = b$ (и случае $a = 0$, если мы фиксировали $p$ и $q$).*

**Во всех неравенствах требуется указать те значения переменных $a$, $b$, $c$, при которых неравенство обращается в равенство!**

**27.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$

**28.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}.$$

**29.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant \frac{2}{1+abc}.$$

**30.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$, $a + b + c = 4$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Докажите, что

$$a^6 + b^6 + c^6 \leqslant a^5 + b^5 + c^5 + 32.$$

**31.** Неотрицательные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geqslant\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

**32.** Известно, что $a$, $b$, $c\geqslant 0$. Докажите, что

$$a^5+b^5+c^5+abc(ab+bc+ca)\geqslant a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a).$$

**33. а)** Известно, что $a$, $b$, $c\geqslant 0$. Докажите, что

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{3abc}{a+b+c}\geqslant\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

**б)** Найдите наименьшее $k\geqslant 0$ такое, что для любых $a$, $b$, $c\geqslant 0$ справедливо

$$k\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+(1-k)\frac{3abc}{a+b+c}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

**34.** Известно, что $a,b,c>0$, $X=\frac{a^2+b^2}{2c^2}+\frac{b^2+c^2}{2a^2}+\frac{c^2+a^2}{2b^2}$, $Y=\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}$. Докажите, что

$$4X+69\geqslant 27Y.$$

**35. а)** Дан однородный симметрический многочлен $P(a,b,c)$ степени не выше 8. Приведите алгоритм проверки того, что он принимает только неотрицательные значения при неотрицательных значениях переменных. Можно считать, что мы умеем находить нули и экстремумы любой функции одной переменной.

**б)** Приведите аналогичный алгоритм для однородного симметрического многочлена степени не выше 17.

**в*)** Приведите аналогичный алгоритм для однородного симметрического многочлена произвольной степени.

Чтобы применить $pqr$-метод, иногда бывает удобно сделать подходящую замену переменных.

**36.** Известно, что $a$, $b$, $c\geqslant 0$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Докажите, что

$$2(a+b+c-2)^2+(ab+bc+ca)(2+3(a+b+c))\geqslant 35.$$

**37.** Известно, что $a$, $b$, $c\geqslant 1$ и $a+b+c=9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab+bc+ca}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

**38.** Известно, что $a$, $b$, $c>0$. Докажите, что

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3+\frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 2.$$

**39.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{4 - bc} + \frac{b^2}{4 - ca} + \frac{c^2}{4 - ab} \leqslant 1.$$

**40.** Для вещественных чисел $a$, $b$, $c$ докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 3(a^3b + b^3c + c^3a),$$

причём равенство возможно только в случаях $a = b = c$ и

$$\frac{a}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}, \quad \frac{b}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{7}},$$

$$\frac{c}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}.$$

*Подсказка.* Сделайте замену $a = x + 2ty$, $b = y + 2tz$, $c = z + 2tx$ для некоторого $t$.

# 5 Необычные условия

До сих пор мы работали с достаточно простыми условиями на переменные: например, они все неотрицательны или их сумма равна 3. Эти условия легко можно переформулировать в терминах $p$, $q$, $r$. Можно ли сделать то же самое и с необычными условиями?

**41.** Какие условия на числа $p$, $q$, $r$ равносильны тому, что

**а)** все числа $a$, $b$, $c$ не меньше 1?

**б)** $a$, $b$, $c$ являются длинами сторон некоторого треугольника (возможно, вырожденного)?

**в)** для неотрицательных $a$, $b$, $c$ выполнено неравенство

$$2\min(a, b, c) \geqslant \max(a, b, c)?$$

**42.** Известно, что $a$, $b$, $c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Докажите, что

$$\frac{a}{a + b} + \frac{b}{b + c} + \frac{c}{c + a} \geqslant \frac{7}{5}.$$

**43.** Известно, что $a$, $b$, $c$ — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{b + a}\right).$$

**44.** Докажите, что существует многочлен $S(x,y,z)$ такой, что тройка $a$, $b$, $c$ является вещественной тогда и только тогда, когда $S(x,y,z) \geqslant 0$, где

$$x = a+b+c, \quad y = a^2+b^2+c^2, \quad z = a^3+b^3+c^3.$$

**45.** Докажите, что для любого числа $s \in \left[\frac{86}{9}, 10\right]$, существуют числа $a$, $b$, $c$ такие, что

$$a+b+c = 4, \quad a^2+b^2+c^2 = 6, \quad a^3+b^3+c^3 = s,$$

а ни для каких других $s$ таких чисел не существует.

**46.** (США, отбор на IMO, 2001) Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Докажите, что

$$ab+bc+ca-abc \leqslant 2.$$

**47.** (Китай-запад, 2004) Известно, что $a$, $b$, $c > 0$. Докажите, что

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

**48.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+nabc = n+3$.

**а)** Пусть $0 \leqslant n \leqslant \frac{3}{2}$. Докажите, что $a+b+c \leqslant 3$.

**б)** Пусть $\frac{3}{2} \leqslant n \leqslant 2$. Докажите, что $a+b+c \leqslant \sqrt{2(n+3)}$.

**в)** Пусть $n = 2$. Докажите, что $ab+bc+ac-abc \leqslant \frac{5}{2}$.

**49.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Докажите, что

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(2+\sqrt{4-3abc}).$$

## Задачи после промежуточного финиша

# 6 Особые случаи

Допустим, мы хотим доказать симметрическое неравенство (на множестве неотрицательных чисел) со сложным симметрическим условием, содержащим все три элементарных симметрических многочлена. Стандартный метод $pqr$ здесь не проходит: если зафиксировать два числа из тройки $p$, $q$, $r$, то третье будет почти наверняка определяться однозначно. Что же делать?

Зафиксируем какое-то одно число из тройки $p$, $q$, $r$ (скажем, $r$). Тогда условие станет описывать зависимость между двумя оставшимися числами. Постараемся выразить одно через другое. Если нам это удастся, то мы сможем воспринимать условие как то, что один из элементарных симметрических многочленов (скажем, $p$) является функцией от другого (скажем, $q$). То есть, по значению $q$ не более чем однозначно определяется тройка $(p, q, r)$. Тогда неравенство естественным образом перепишется в виде $h(q) \geqslant 0$, где $h$ — некоторая функция вещественного неотрицательного аргумента. Если $h$ окажется монотонной или вогнутой, то неравенство достаточно проверять лишь для экстремальных значений $q$. Значит, задача сведётся к нахождению экстремальных значений $q$ (с учётом условия и фиксированного $r$).

Перед тем, как формализовать описанное выше, дадим несколько определений.

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим множество упорядоченных наборов из $n$ вещественных чисел. Множеству $\mathbb{R}^n$ при маленьких $n$ соответствует естественная геометрическая интерпретация. Например, при $n = 1$ — это прямая, при $n = 2$ — плоскость. Вследствие этого, элементы $\mathbb{R}^n$ будем называть точками.

*Расстоянием* в $\mathbb{R}^n$ между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ назовем величину $||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$. В частности, при $n = 1$ расстояние между точками — это модуль разности соответствующих чисел, при $n = 2$ — обычное расстояние на плоскости.

Пусть множество $M$ является подмножеством $\mathbb{R}^n$. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется ***непрерывной*** в точке $x \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta$, зависящее от $x$ и $\varepsilon$, такое, что если для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$ верно $||x - y|| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

**Пример.** Докажем, что функция $f(x) = x^2$ является непрерывной для любого $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |(y - x) + 2x| \leqslant |x - y| \cdot (|x - y| + |2x|) < \delta^2 + 2|x|\delta.$$

Положим $\delta = \min(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\varepsilon}{4|x|})$. Тогда оба слагаемых не превосходят $\frac{\varepsilon}{2}$, поэтому всё выражение $|x^2 - y^2|$ строго меньше $\varepsilon$.

Следующими тремя задачами в дальнейшем можно будет пользоваться без доказательства.

**50.** Докажите, что следующие функции непрерывны: $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна для любого $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна для любого $x \in (0, +\infty)$, $f(x, y) = x + y$ непрерывна для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**51.** Пусть функция $g(x)$ непрерывна для всех $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, а все её значения лежат в множестве $N \subset \mathbb{R}$. Пусть также функция $f(y)$ непрерывна для всех $y \in N$ и принимает вещественные значения. Докажите, что функция $f(g(x))$ непрерывна для всех $x \in M$.

**52. а)** Докажите, что многочлен $P(x)$ от одной переменной является непрерывной функцией для всех $x \in \mathbb{R}$.

**б)** Докажите, что многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ от $n$ переменных является непрерывной функцией для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что на переменные $a$, $b$, $c$ наложено *симметрическое условие* $G$, если выполнено равенство $G(p, q, r) = 0$, где $G$ — некоторая непрерывная функция от трёх переменных.

**53.** Предположим, на переменные $a$, $b$, $c$ наложено симметрическое условие $G$. Зафиксируем $r = r_0$, для которого существует допустимая тройка $(p_0, q_0, r_0)$ такая, что $G(p_0, q_0, r_0) = 0$. Предположим, что условие $G$ равносильно тому, что $p = f(q)$ (с учётом фиксированного $r$), где $f$ — некоторая функция, а множество возможных значений $q$ ограничено. Докажите, что $q$ достигает своего максимума и минимума, причём в экстремальных точках обязательно какие-то две из переменных равны,

**а)** если $f$ — линейная функция;

**б)** если $f$ — многочлен.

**54.** Предположим, на переменные $a$, $b$, $c$ наложено симметрическое условие $G$. Пусть $(x, y, z)$ — произвольная перестановка $(p, q, r)$. Зафиксируем $z = z_0$, для которого существует допустимая тройка $(p, q, r)$ такая, что $G(p, q, r) = 0$. Предположим, что условие $G$ равносильно тому, что $x = f(y)$ (с учётом фиксированного $z$), где $f$ — многочлен, а множество возможных значений $y$ ограничено. Тогда $y$ достигает своего максимума и минимума, причём если $z = r$, то в любой точке экстремума $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, иначе в любой точке экстремума $abc(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

**Замечание.** Утверждение предыдущей задачи останется верным, если $f$ — не многочлен, а функция, непрерывная на объединении конечного числа отрезков, содержащих множество возможных значений $y$. В дальнейшем этим можно пользоваться без доказательства (при условии решения предыдущей задачи).

**Пример.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$a + b + c \geqslant 2 + \sqrt{abc(4 - a - b - c)}.$$

**Доказательство.** Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$p \geqslant 2 + \sqrt{r(4-p)},$$

при условии $\frac{p^2-4+r}{2} = q$. Зафиксируем $r$. Тогда наше неравенство перепишется в виде $f(p) \geqslant 0$, где $f(x) = x - 2 - \sqrt{r(4-x)}$ — монотонная функция. Значит, достаточно проверять неравенство при минимальном возможном значении $p$. Согласно задаче 54, это означает, что достаточно проверять неравенство в случае $a = b$. Тогда $c = 2 - a^2$ и исходное неравенство переписывается в виде

$$a^4(a-1)^2 \geqslant 0.$$

Случаи равенства $a = b = c = 1$; $a = b = 0, c = 2$; $a = c = 0, b = 2$; $b = c = 0, a = 2$.

**55.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 10$. Докажите, что

$$\frac{9}{8} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \leqslant \frac{6}{5}.$$

**56.** Известно, что $a$, $b$, $c > 0$ и $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что

$$(a+b+c)(1+abc) \geqslant 6.$$

**57.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $ab+bc+ca = a^3+b^3+c^3$. Докажите, что

$$ab+bc+ca \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

**58.** Известно, что $a, b, c \geqslant 0$. Им естественным образом соответствуют $p, q, r$, причём оказалось, что $q + r = 4$. Докажите, что

$$p^3 - 27r \geqslant 7(p^2 - 3q).$$

**59.** Известно, что $a$, $b$, $c > 0$ и $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca+(abc-1)^2$. Докажите, что

$$ab+bc+ca+3 \geqslant 2(a+b+c).$$

# 7 $n$ переменных

До этого мы доказывали только симметрические неравенства от не более чем 3 переменных. Но что делать, если переменных больше, чем 3?

*Шаром* и *сферой* в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x$ и радиусом $r$ назовём множество точек $y$ таких, что $||x-y|| \leqslant r$ и $||x-y|| = r$ соответственно. В частности, если $n = 2$, то шар — это просто круг, а сфера — окружность.

Рассмотрим последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$ в $\mathbb{R}^n$. Скажем, что эта последовательность *сходится* к точке $z$, если для любого $\varepsilon > 0$ вне шара с центром в точке $z$ и радиуса $\varepsilon$ лежит лишь конечное число точек из последовательности.

**Пример.** Последовательность $z_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к точке $z = 0$, поскольку вне отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ лежат лишь те точки, для которых $n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, а их конечное число.

Рассмотрим множество точек $M$ в $\mathbb{R}^n$. Назовём точку $z$ *предельной точкой* множества $M$, если существует последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$ из $M$, каждая из которых отлична от $z$, сходящаяся к точке $z$. Множество точек $M$ в $\mathbb{R}^n$ назовём *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

**Пример.** Интервал $(0, 1)$ не является замкнутым множеством, поскольку 0 является предельной точкой, но не лежит в интервале. А вот отрезок $[0, 1]$ является замкнутым множеством.

Множество точек $M$ в $\mathbb{R}^n$ назовём *ограниченным*, если существует константа $C$ такая, что для любой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ для всех $i$ от 1 до $n$ выполнено неравенство $|x_i| < C$. Множество точек $M$ в $\mathbb{R}^n$ назовём *компактом*, если $M$ ограничено и замкнуто.

**60.** Является ли отрезок $[0, 1]$ компактом? Является ли луч $[0, +\infty)$ компактом? А множество, состоящее из точки $(1, 1, \ldots, 1)$? Шар радиуса 1 с центром в точке $(1, 1, \ldots, 1)$? Этот же шар без точки $(1, 1, \ldots, 1, 0)$? А сфера радиуса 1 с центром в точке $(1, 1, \ldots, 1)$?

Следующей задачей в дальнейшем можно будет пользоваться без доказательства.

**61.** Рассмотрим набор условий

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, P_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, P_{s+1}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ldots, P_m(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

где $m$ — натуральное, а $s$ — целое неотрицательное число, $P_1, \ldots, P_m$ — многочлены от $n$ переменных. Предположим, что множество точек $M$ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих всем этим условиям, ограничено. Докажите, что $M$ является компактом.

В дальнейшем нам потребуется следующая классическая теорема из математического анализа, которой можно пользоваться без доказательства.

**Теорема Вейерштрасса.** Непрерывная функция, определённая на компакте, достигает на нём наибольшего и наименьшего значений.

**Пример.** Функция $x^2$ достигает на отрезке $[0, 1]$ наибольшего и наименьшего значений. Однако из предыдущей теоремы нельзя утверждать, что она достигает наибольшего и наименьшего значений на интервале $(0, 1]$.

**62.** Дана симметрическая непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на компакте $M \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, $f$ такова, что при любых фиксированных $a_4, \ldots, a_n$ (для которых существуют $a_1$, $a_2$, $a_3$ такие, что $(a_1, \ldots a_n) \in M$) функция

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, a_4, \ldots, a_n)$$

достигает своих экстремальных значений только когда $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1) = 0$ (или $x_1x_2x_3(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$). Докажите, что функция $f$ достигает своих экстремальных значений, причём в точке экстремума среди $x_1, \ldots, x_n$ есть максимум два различных числа (или максимум два различных ненулевых числа).

**Пример.** Известно, что $a$, $b$, $c$, $d \geqslant 0$, $a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geqslant 16.$$

**Доказательство.** По задаче 61 условия задают компакт. Положим

$$f(a, b, c, d) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd.$$

По задаче 52 $f$ является непрерывной функцией. Зафиксируем $d = d_0 \geqslant 0$. Положим $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ac$, $r = abc$. Рассмотрим функцию

$$h(a, b, c) = f(a, b, c, d_0) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d_0^2) + 4abcd_0 = 3p^2 - 6q + 4d_0r + 3d_0^2 =$$

$$= 3p^2 - 6q + 4d_0r + 3d_0^2.$$

Зафиксируем $p$ и $r$. Поскольку $h$ линейна по $q$, то минимум $h$ достигается, причём только когда $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$. Согласно задаче 62, нам достаточно проверять исходное неравенство, когда среди чисел $a$, $b$, $c$, $d$ не более двух различных.

- Если $a = b$ и $c = d = 2 - a$, то неравенство перепишется следующим образом:

  $$4(a - 1)^2((a - 1)^2 + 1) \geqslant 0.$$

  Случай равенства $a = b = c = d = 1$.

- Если $a = b = c$ и $d = 4 - 3a$, то неравенство перепишется следующим образом:

  $$4(a - 1)^2(4 - 3a)(a + 2) \geqslant 0.$$

  Поскольку $a \leqslant \frac{4}{3}$, то неравенство верно. Случаи равенства $a = b = c = \frac{4}{3}, d = 0$; $a = b = d = \frac{4}{3}, c = 0$; $a = c = d = \frac{4}{3}, b = 0$; $b = c = d = \frac{4}{3}, a = 0$.

**63.** Известно, что $a$, $b$, $c$, $d \geqslant 0$, $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$(1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2 + (1 - d^2)^2 \geqslant 3.$$

**64.** (Россия, отбор на IMO, 2015) Известно, что $a$, $b$, $c$, $d \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + bcd + cda + dab \leqslant 1.$$

**65.** (IMO Shortlist, 2010) Про вещественные $a$, $b$, $c$, $d$ известно, что $a+b+c+d=6$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Докажите, что

**а)** $abcd \leqslant 3$;

**б)** $36 \leqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \leqslant 48$.

**66.** Известно, что $a$, $b$, $c$, $d \geqslant 0$. Докажите, что

$$a^3+b^3+c^3+d^3+4\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3} \geqslant 2(abc+bcd+cda+dab).$$

**67.** (Всероссийская олимпиада, 2016) Известно, что $a$, $b$, $c$, $d>0$ и $a+b+c+d=3$.

**а)** Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

**б)** Докажите, что

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

**в)** Известно, что $x \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b^x}+\frac{1}{c^x}+\frac{1}{d^x}+\left|\frac{(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})(1-\frac{1}{c})(1-\frac{1}{d}))}{2}\right|^x \leqslant \frac{1}{a^xb^xc^xd^x}.$$

**68.** Известно, что $a$, $b$, $c$, $d \geqslant 0$ и $a+b+c+d=4$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+4 \geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

**69.** Известно, что $a$, $b$, $c$, $d$, $e \in \mathbb{R}$, $a+b+c+d+e=20$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=100$. Найдите экстремальные значения выражения

$$abcd+abce+abde+acde+bcde.$$

**70.** Известно, что $a$, $b$, $c$, $d>0$ и $a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Докажите, что

$$(a+b+c+d)(17+46abcd) \geqslant 252.$$

# 8 Дополнительные задачи

В этом разделе собраны задачи, где $pqr$-метод можно применить неожиданным, неочевидным с первого взгляда путём.

**71.** (APMO, 2004) Для вещественных чисел $a$, $b$, $c$ докажите, что

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

**72.** (Иран, 2005) Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2$. Докажите, что

$$ab + bc + ca \leqslant \frac{3}{2}.$$

**73.** В остроугольном треугольнике со сторонами $a$, $b$, $c$ радиус описанной окружности равен $R$. Докажите, что

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} > 5R.$$

**74.** (Shortlist IMO, 2011) Пусть $a$, $b$, $c$ — длины сторон некоторого треугольника, причём $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(a+c-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \geqslant \frac{3}{(abc)^2}.$$

**75.** Назовём многочлен от трёх переменных $G(a, b, c)$ *циклическим*, если его значение не меняется при циклической перестановке переменных (то есть $G(a, b, c) = G(b, c, a) = G(c, a, b)$). Докажите, что любой циклический многочлен от $a$, $b$, $c$ можно представить в виде $X(a, b, c) + Y(a, b, c)(l_{12} - l_{21})$, где $X$ и $Y$ — симметрические многочлены.

**76.** Известно, что $a$, $b$, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{2}(ab + bc + ca)$. Докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant \frac{25}{8}(a^3b + b^3c + c^3a).$$

**77.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leqslant 9.$$

**78.** Известно, что $a$, $b$, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + 3b^2}{a + 3b} + \frac{b^2 + 3c^2}{b + 3c} + \frac{c^2 + 3a^2}{c + 3a} \geqslant 3.$$

**79.** Для неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$ докажите, что

$$10(a + b + c)^5 \geqslant 81(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b + b^2c + c^2a + 7abc).$$

**80.** (Корея, 2012) Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$. Найдите максимум выражения

$$(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab).$$

**81.** Известно, что $a$, $b$, $c \in [0,1]$ и $(1-a)(1-b)(1-c) = abc$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a+b+c}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**82.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$, $a^2+b^2+c^2+abc = 4$ и $a+b+c \geqslant \sqrt{8}$. Докажите, что

$$a+b+c \geqslant 2 + \sqrt[3]{abc}.$$

**83.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = 11(a+b+c-3)$. Докажите, что

$$\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2} + \sqrt{c+2} \geqslant \sqrt{a+b+c+24}.$$

**84.** Известно, что $a$, $b$, $c > 0$ и $abc = 1$. Докажите, что

**а)**

$$a^{10} + b^{10} + c^{10} \geqslant 3 + 45\left((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right);$$

**б*)**

$$a^{10} + b^{10} + c^{10} \geqslant 3 + 46\left((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right);$$

**в)** существует константа $k > 0$ такая, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n + b^n + c^n \geqslant 3 + kn\left((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right);$$

**г*)** существует константа $k > 0$ такая, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n + b^n + c^n \geqslant 3 + kn^2((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2),$$

но ни для какого $\varepsilon > 0$ не существует константы $k' > 0$ такой, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n + b^n + c^n \geqslant 3 + k'n^{2+\varepsilon}((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2).$$

**85.** Известно, что $a$, $b$, $c \geqslant 0$, $(a+1)(b+1)(c+1) = 84$, $(a+b+c)(ab+bc+ac) = \frac{14256}{abc}$. Найдите максимум выражения

$$(a+b+c)^2 + (ab+bc+ac)^2 + a^2b^2c^2.$$

**86.** Известно что $a$, $b$, $c$, $d \geqslant 0$, $a+b+c+d = 3$, $a^2+b^2+c^2+d^2 = 5$, $a^4+b^4+c^4+d^4 = 17$. Найдите максимально возможное значение $d$.

# Список литературы


[1] М.А. Розенберг "Метод uvw для доказательства неравенств", Математическое образование, № 3-4 (59-60), 2011.

[2] M.B.T. Knudsen "The uvw method", http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h278791.