Инциденции точек и прямых.

Фёдор Нилов, Александр Полянский, Никита Полянский,
при участии Михаила Харитонова и Игоря Шнурникова

Рис. 1: Пал Эрдёш

Жил-был дедушка Эрдёш. Придумывал он много задачек. Так вот однажды он загадал следующую загадку.

Пусть на плоскости живет некоторое конечное множество прямых $\mathcal{L}$ и некоторое конечное множество точек P. Тогда через $I(\mathcal{L}, P)$ будем обозначать количество инциденций между этими множествами, то есть число таких пар (l, p), $l \in \mathcal{L}$, $p \in P$, что $p \in l$.

Обозначим за $I(n,m)$ максимальное значение $I(\mathcal{L}, P)$ среди всех таких пар $(\mathcal{L}, P)$, что $|\mathcal{L}| = n$, $|P| = m$, здесь и далее через $|A|$ обозначаем количество элементов в множестве A.

Вопрос: Получить точную оценку сверху для $I(n, m)$.

П. Эрдёш предположил: существует такая константа C, что

$$I(n, n) \leqslant C \left(n^{4/3}\right).$$

Очевидно, что эта оценка лучше тривиальной $I(n, n) \leqslant n^2$.

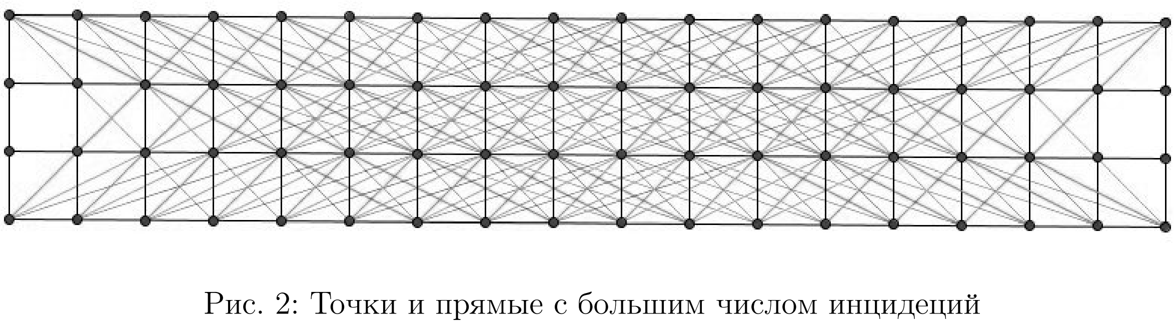

Рис. 2: Точки и прямые с большим числом инцидеций

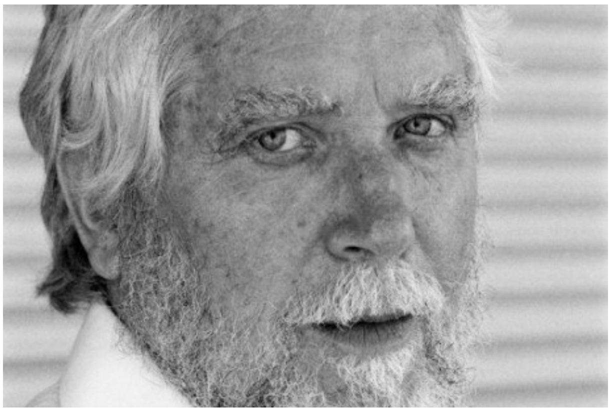

Рис. 3: Эндре Семереди

Рис. 4: Уильям Т. Троттер

В 1983 году два математика, Семереди и Троттер, доказали последнюю оценку. Этот факт известен как **теорема Семереди-Троттера**.

Наша основная цель — доказать эту теорему двумя способами. Попутно мы решим много интересных задач в геометрии и комбинаторике.

1 Комбинаторная часть

1.1 Введение. Комбинаторная геометрия

1.1. На плоскости расположено конечное количество точек. Докажите, что найдётся такая прямая, что в каждой из полуплоскостей, на которые она делит плоскость, будет не больше половины от всех точек (полуплоскость не содержит свою границу).

Доказательство. Пусть $\{a_1,a_2,\dots a_n\}$ – данный в условии набор точек, L – произвольная полуплоскость, граница которой не параллельна ни одному отрезку, соединяющему точки набора. Пусть L_i – полуплоскость, полученная параллельным переносом полуплоскости L, и граница которой проходит через точку a_i. Заметим, что для каждого целого числа j от 0 до n найдётся полуплоскость L_{i_j}, содержащая ровно j точек из набора $\{a_1,a_2,\dots a_n\}$. Тогда граница полуплоскости $L_{i_{[n/2]}}$ и есть искомая прямая. □

1.2. Пусть на плоскости дано $2n$ точек. Докажите, что их можно разделить на пары так, что отрезки, соответствующие парам, не будут пересекаться.

Доказательство. От противного. Предположим, что разбить точки на пары требуемым способом нельзя. Заметим, что способов разделить $2n$ точек на пары – конечное число. Значит, среди этих разбиений найдётся такое, что сумма длин отрезков, соответствующих парам, не больше, чем при любом другом разбиении. Рассмотрим это разбиение. По предположению найдётся два пересекающихся отрезка, пусть это будут AB и CD. Тогда сумма длин отрезков AC и BD меньше, чем AB и CD. Получили противоречие с минимальностью суммы длин отрезков в рассмотренном разделении на пары. □

1.3. Дано n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Между некоторыми из точек проведены отрезки. Назовём набор отрезков между точками *связным*, если между любыми двумя точками найдётся путь по отрезкам из этого набора. Построен такой связный набор Γ, что сумма длин отрезков в Γ не больше, чем в любом другом связном наборе. Докажите, что отрезки из Γ пересекаются только концами.

Доказательство. От противного. Пусть отрезки AC и BD пересекаются. По неравенству треугольника сумма отрезков AB и CD, как и сумма отрезков AD и BC, меньше суммы отрезков AC и BD. Пусть Ω – множество всех отрезков Γ кроме AC и BD. Рассмотрим набор отезков $\Gamma_1 = \Omega \bigcup \{AB, CD\}$. Если Γ_1 – не связен, то в Ω нет путей между точками A, B с одной стоороны и C, D с другой. Рассмотрим набор отезков $\Gamma_2 = \Omega \bigcup \{AD, BC\}$. Если Γ_2 – не связен, то в Ω нет путей между точками A, D с одной стоороны и C, B с другой. Значит, если и набор отрезков Γ_1, и набор отрезков Γ_2 – не связны, то в наборе Γ нет пути между точками A и B. Получено противоречие со связностью Γ. Без ограничения Γ_1 – связный. Но сумма длин отрезков в Γ_1 меньше, чем в Γ. Противоречие. $\square$

1.4. Пусть на плоскости даны n точек и n непараллельных прямых. Докажите, что можно пронумеровать точки и прямые числами от 1 до n так, чтобы отрезки перпендикуляров, опущенных из соответствующих точек на соответствующие прямые не пересекались.

Доказательство. Рассмотрим такую нумерацию, при которой сумма длин перпендикуляров минимальна. Если таких нумераций несколько, то выберем любую из них. За F_i обзначим i-ю точку, за l_i – i-ю прямую. Пусть для некоторых i и j перпендикуляры из точек F_i и F_j пересеклись в некоторой точке E. Пусть A и B – основания перпендикуляров из точек F_i и F_j на прямые l_i и l_j соответственно. Проведём перпендикуляры из точек F_i и F_j на l_j и l_i с основаниями C и D соответственно. Таким, образом,

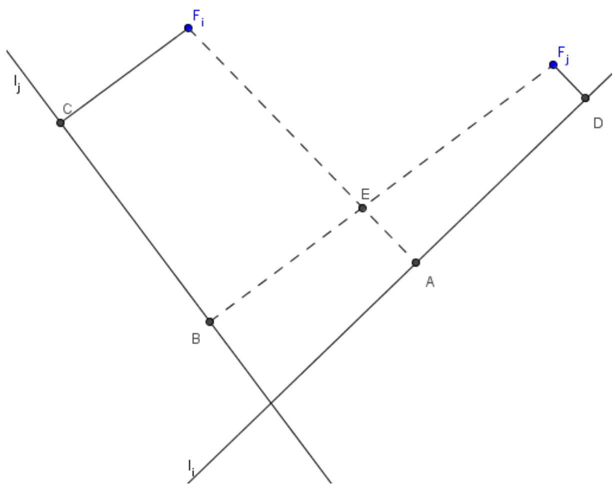

Рис. 5:

имеем

$$F_iA + F_jB = F_iE + EA + F_jE + BE = (EA + F_jE) + (F_iE + BE) \geqslant$$

$$\geqslant F_jA + F_iB \geqslant F_jD + F_iC.$$

Значит, сумма длин перпендикуляров в выбранной нумерации не минимальна. Противоречие. $\square$

1.5. Дан невыпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Если несмежные вершины A_i и A_j многоугольника таковы, что он лежит целиком по одну сторону от прямой A_iA_j, то можно взять одну из двух ломаных, на которые точки A_i и A_j его разбивают, и отразить симметрично относительно центра отрезка A_iA_j. Докажите, что рано или поздно многоугольник станет выпуклым.

Доказательство. Пусть для $i = 1, 2, \ldots, n$, γ_i – меньший из углов, под которыми пересекаются A_iA_{i+1} и ось абсцисс (в случае равенства углов γ_i равно 90 градусов). γ_n – угол при A_nA_1. Рассмотрим теперь множество пар вида ("длина отрезка", "угол с осью абсцисс") $\Omega = \{(|A_1A_2|, \gamma_1), (|A_2A_3|, \gamma_2), \ldots (|A_nA_1|, \gamma_n)\}$. После каждой операции из условиия задача будем пересчитывать множество Ω для нового многоугольника. Заметим, что все такие множества будут отличаться только порядком элементов. Значит, нашими операциями можно получить конечное число многоугольников. Заметим, что при каждой операции площадь многоугольника увеличивается. Значит, наступит момент, когда операцию из условия задачи проделать нельзя. В этот момент и будет получен выпуклый многоугольник. $\square$

1.2 Инциденции множеств

1.6. Пусть $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ – произвольная совокупность трёхэлементных подмножеств n-элементного множества, причём $|M_i \cap M_j| \neq 1$ для любых i, j. Найдите максимальное значение s, при котором это возможно.

Доказательство. Рассмотрим A и B – 2 пересекающихся множества из нашей совокупности. Пусть $F = A \bigcap B$, $G = A \bigcup B$. Пусть $A = \{a, b, c\}$. Без ограничения общности $B = \{b, c, d\}$, $F = \{b, c\}$. Посмотрим, какие множества могут пересекать G.

Случай 1: $\nexists C \in \mathcal{M} : C \supset F$.

Пусть $C \bigcap (A \bigcup B) \neq \varnothing$. Т.к. $C \not\supset F$, имеем $\{a, d\} \subset C$. Следовательно, либо $C = \{a, b, d\}$, либо $\{a, c, d\}$.

Заметим, что четверка $A, B, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}$ может являться подмножеством $\mathcal{M}$. Более того, больше никакое множество не из этой четверки не пересекается с $A \bigcup B$. Назовём такое объединение элементов четверки *булочкой.*

Случай 2: В $\mathcal{M}$ есть ровно $k > 0$ множеств, содержащих F.

Пусть эти множества: $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Считаем $A_i = \{a_i, b, c\}$.

Пусть найдётся $D \in \mathcal{M}$, $D \not\supset F$ такое, что

$$D \bigcap (A \bigcup B \bigcup A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_k) \neq \varnothing.$$

Без ограничения общности $D \bigcap A \neq \varnothing$. Опять же, без ограничения общности $D \bigcap A = \{a, b\}$, пусть $D = \{a, b, x\}$. Но, т.к. $D \bigcap B \neq \varnothing$, $D \bigcap A_1 \neq \varnothing$ и $x \neq c$, мы имеем $x = d$ and $x = a_1$ одновременно. Противоречие. Значит, такого D не существует.

Заметим, что набор $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_k$ может являться подмножеством $\mathcal{M}$. Назовём объединение элементов такого набора *цветочком с* $(k + 2)$ *лепестками.*

Таким образом, наше n-элементное множество распадается на попарно непересекающиеся булочки и цветочки.

Заметим, что в булочке ровно 4 элемента, в цветочке с k лепестками – $k + 2$ элемента.

Получаем, что $s \leqslant n - 2t$, где t – количество цветочков.

Отсюда следует, что **при** $n \equiv 0, 1, 2 (mod. 4)$ **максимальное** $s = 4 \cdot [\frac{n}{4}]$, достигается при разбиении множества на $[\frac{n}{4}]$ булочек (ещё могут остаться 1 или 2 элемента, которые ни в одно множество не входят). **При** $n \equiv 3 (mod. 4)$ **достигается** $s = n - 2$, если все элементы включить в один большой цветочек. □

1.7. Пусть $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ — произвольная совокупность, состоящая из четырёхэлементных подмножеств n-элементного множества, причём $|M_i \cap M_j| \neq 2$ для любых i, j. Докажите, что максимальное s, при котором это возможно, лежит в пределах от $\lfloor n/4 \rfloor^2$ до $n(n-1)/4$.

Доказательство. 1) Верхняя оценка. Рассмотрим произвольный элемент A нашего n-элементного множества. Пусть $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ – подсовокупность множеств $\mathcal{M}$, содержащих A. Рассмотрим совокупность трёхэлементных множеств $\mathcal{F}'_{\mathcal{A}}$, полученную из $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ удалением элемента A из каждого множества из $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Любые два множества из $\mathcal{F}'_{\mathcal{A}}$ либо не пересекаются, либо пересекаются по двум элементам. Следовательно, к ним можно применить задачу 18, решённую выше. Получаем, что в $\mathcal{F}'_{\mathcal{A}}$ не более $(n-1)$-го множества. Количество множеств в $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ равно количеству множеств $\mathcal{F}'_{\mathcal{A}}$. Следовательно, в $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ не более $(n-1)$-го множества. Для любого элемента исходного n-элементного множества соответствующая подсовокупность содержит не более $(n-1)$-го множества, в каждом множестве ровно 4 элемента, следовательно, $s \leqslant \frac{n(n-1)}{4}$.

2) Нижняя оценка. Пронумеруем элементы числами от 1 до n. Рассмотрим множества вида $\{4k+1, 4k+2, 4k+3, 4t\}$, где $k = 0, 1, \ldots, [\frac{n}{4}]-1$, $t = 1, 2, \ldots, [\frac{n}{4}]$. Таких множеств ровно $[\frac{n}{4}]^2$. Несложно проверить, что их совокупность удовлетворяет условию задачи.

3) Вывод. Мы получили, что максимальное s лежит в пределах от $[\frac{n}{4}]^2$ до $\frac{n(n-1)}{4}$. □

Определение. Пусть $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_n\}$ – произвольная совокупность подмножеств m- элементного множества $P = \{p_1, \ldots p_m\}$. Назовём пару (l_i, p_k) *инциденцией,* если $p_k \in l_i$. Тогда через $I(\mathcal{L}, P)$ будем обозначать число инциденций, образованных элементами из $\mathcal{L}$ и P, а через $I(n, m)$ максимальное значение $I(\mathcal{L}, P)$ по всем таким множествам $\mathcal{L}$ и P, что $|\mathcal{L}| = n, |P| = m$.

Один из важных вопросов всего проекта состоит в том, чтобы оценить число инциденций в случае, когда даны какие-то условия на множества. Если нет никаких условий на множества, то можем получить лишь тривиальную оценку $I(\mathcal{L}, P) \leqslant mn$.

Есть следующий способ воспринимать инциденции:

Рассмотрим пустую табличку, состоящую из n строчек и m столбцов. Строки будут соответствовать элементам множества $\{l_1, \ldots, l_n\}$, а столбцы — элементы $\{p_1, \ldots p_m\}$. Тогда мы будем ставить на позицию, находящуюся на пересечении i-ой строчки, и j-го столбца, звездочку тогда и только тогда, когда $p_j \in l_i$. Вопрос о числе инциденций можно теперь поставить так: сколько звездочек стоит в таблице?

Если вам это будет удобно, то переводите задачи на язык табличек (см. задачу **1.11.**).

В оставшихся задачах этого параграфа мы считаем, что $n, m, r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_n\}$ – произвольная совокупность подмножеств m- элементного множества $P = \{p_1, \dots p_m\}$, причем $|l_i \cap l_j| \leqslant r$ для любых $i \neq j$.

1.8. Пусть $r = 1$. Докажите, что

а) $I(\mathcal{L}, P) \leqslant n^2 + m$, $I(\mathcal{L}, P) \leqslant m^2 + n$.

б) $I(\mathcal{L}, P) \leqslant \sqrt{m(n^2 - n)} + m$, $I(n, m) \leqslant \sqrt{n(m^2 - m)} + n$.

Доказательство. а) Покажем, что $I(\mathcal{L}, P) \leqslant m^2 + n$. Мы можем разделить множество $\mathcal{L}$ на две группы: первое подмножество $\mathcal{L}_1$ будет состоять из тех элементов $\mathcal{L}$, которые инциденты не более чем одному элементу P, и пусть $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \backslash \mathcal{L}_1$. Тогда очевидно, что $I(\mathcal{L}_1{,}P) \leqslant |\mathcal{L}_1| \leqslant n$. Оценим $I(\mathcal{L}_2{,}P)$. Заметим, что всякий элемент p из P может иметь не более чем $m-1$ инцидентный из $\mathcal{L}_2$, поскольку в противном случае найдутся такие два элемента из $\mathcal{L}_2$, которые будут содержать по крайней мере 2 общих элемента из P (p и какой-то еще). А потому $I(\mathcal{L}_2{,}P) \leqslant m(m-1) \leqslant m^2$.

Другое неравенство следует из принципа двойственности, из которого легко вывести, что $I(n{,}m) = I(m{,}n)$.

б) Воспользуемся вышеупомянутой аналогией с матрицей. Пусть r_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, означает число звезд в i-й строке. Также пусть $r_i \geqslant r_j$ для $i \leqslant j$ и определим число k следующим образом: $r_k \geqslant 2$ и $r_i = 1$ for $i > k$. Тогда заметим

$$\binom{m}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{2},$$

поскольку в противном случае найдутся строки, в которых стоят 2 звезды в пересечении с одинаковыми столбцами. Значит

$$2n \cdot \binom{m}{2} \geqslant 2n \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{2} + \frac{n-k}{2} - \frac{n-k}{2} \right) \geqslant I^2 - nI \geqslant (I-n)^2.$$

$\square$

1.9. Докажите, что

$$I(\mathcal{L}, P) \leqslant \sqrt{mr(n^2 - n)} + m.$$

Доказательство. Для вывода формулы используйте ту же аргументацию, что и в решении **1.8(b)**, при этом добавиться множитель r в левой части первого неравенства. $\square$

1.10. Пусть $r = 1$.

(a) Найдите $\max I(\mathcal{L}, P)$ при $n \leqslant 3$.

(b) Найдите $\max I(\mathcal{L}, P)$ при $m \geqslant C_n^2$. При каких условиях достигается этот максимум?

Решение. (b) $\max I(\mathcal{L}, P) = m + C_n^2$. Достигается при n прямых в общем положении. Возьмем точку, через которую проходит i прямых и пошевелим ее. Тогда число инциденций изменится на $-i+2C_i^2-(C_i^2-1) > 0$ при $i \geqslant 3$. Таким образом, максимальное число инциденций будет при расположении прямых в общем положении, при этом все точки пересечения прямых — отмеченные точки.

1.11. Квадрат 13×13 разбит на единичные квадратики. Центры некоторых из них отмечены так, что нет прямоугольника с вершинами в отмеченных точках и сторонами, параллельными сторонам квадрата. Найдите наибольшее возможное число отмеченных точек.

Ответ: 52. Пример строится, если каждой строке отметить по 4 точки. Верхняя оценка выводится из следующей задачи.

	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$	$\mathbf{A}_7$	$\mathbf{A}_8$	$\mathbf{A}_9$	$\mathbf{A}_{10}$	$\mathbf{A}_{11}$	$\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{A}_{13}$
l_1	*	*		*						*			
l_2		*	*		*						*		
l_3			*	*		*						*	
l_4				*	*		*						*
l_5	*				*	*		*					
l_6		*				*	*		*				
l_7			*				*	*		*			
l_8				*				*	*		*		
l_9					*				*	*		*	
l_{10}						*				*	*		*
l_{11}	*						*				*	*	
l_{12}		*						*				*	*
l_{13}	*		*						*				*

1.12. 100 (a) мышей вместе грызут 1000 (b) кусков сыра. Каждая мышь может попробовать несколько кусков сыра, сделав в каждом из них по одной дырке. Любые две мыши имеют дырки не более чем в 10 (c) общих кусках сыра. Докажите, что число дырок не больше 11000 ($b + a\sqrt{bc}$). Докажите, что число дырок не больше 10500 $\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4bca(a-1)}}{2}\right)$.

Доказательство. Можно считать, что каждый кусок сыра ела хотя бы одна мышь. Пусть d_i — число кусков сыра, поеденных i мышами. Обозначим число дырок через I. Тогда

$$\sum_i d_i = b, \quad \sum id_i = I, \quad \sum \frac{i(i-1)}{2} d_i \le c\frac{a(a-1)}{2}.$$

Тогда по неравенству о среднем арифметическом и квадратическом, примененному к числам $(i-1)$, взятым в количестве d_i, получаем:

$$I-b = \sum(i-1)d_i = b\frac{\sum(i-1)d_i}{\sum d_i} \le b\sqrt{\frac{\sum(i-1)^2 d_i}{\sum d_i}} \le \sqrt{b(ca(a-1)-(I-b))}.$$

Откуда (пренебрегая $I-b$ под корнем) получаем $I \le b+a\sqrt{bc}$. Для более точной оценки сводим к квадратному неравенству $(I-b)^2+b(I-b)-bca(a-1) \le 0$ и решаем его. $\square$

1.3 Теорема о сэндвиче.

1.13. Докажите, что если на плоскости даны красные и синие точки в общем положении, то найдётся прямая, которая будет делить плоскость на две такие полуплоскости, что в каждой из них будет находиться не более половины красных и не более половины синих точек.

Доказательство. Обозначим через $R(\phi)$ множество прямых с углом наклона ϕ (отсчитанного против хода часовой стрелки от горизонтального направления), по обе стороны от каждой из которых лежит одинаковое число красных точек. Аналогично, для синих точек введём множество $B(\phi)$. Каждое из множеств $R(\phi)$ и $B(\phi)$ представляет собой полосу (возможно, из одной прямой), обозначим через $r(\phi)$ и $b(\phi)$ направленные прямые, проходящие посередине этих полос. Докажем, что для некоторого ϕ_0 имеет место равенство $r(\phi_0) = b(\phi_0)$. Если $r(0) = b(0)$, то $\phi_0 = 0$. Если же $r(0) \neq b(0)$, можно считать, что $r(0)$ проходит левее $b(0)$, если смотреть вдоль направления $r(0)$. Будем изменять ϕ от 0 до π. Поскольку прямые $r(\pi)$ и $b(\pi)$ отличаются от прямых $r(0)$ и $b(0)$ соответственно только направлением, то $r(\pi)$ проходит правее $b(\pi)$. Но $r(\phi)$ и $b(\phi)$ непрерывно зависят от ϕ, и по теореме о промежуточном значении $r(\phi) = b(\phi)$ для некоторого $\phi = \phi_0$. □

1.14. Докажите, что если в пространстве $\mathbb{R}^3$ даны красные, синие и зелёные точки в общем положении, то найдётся плоскость, которая будет делить $\mathbb{R}^3$ на два такие полупространства, что в каждом из них будет находиться не более половины точек каждого цвета.

Доказательство. Очевидно, что эта задача явлется обобщение предыдущей. Зафиксируем некоторую сферическую систему координат, т.е. систему координат для отображения геометрических свойств фигуры в трёх измерениях посредством задания трёх координат $(r,\, \theta,\, \varphi)$, где r — расстояние до начала координат, а θ и φ — зенитный и азимутальный углы соответственно. (Смотрите рисунок 6.)

С помощью $R(\phi{,}\psi)$ обозначим множество плоскостей, имеющих одинаковый нормальный вектор, который равен $\vec{n}= (1, \phi, \psi)$, и делящий пополам множество красных точек. Таким же образом, через $G(\phi{,}\psi)$ и $F(\phi{,}\psi)$ множество плоскостей, делящих пополам множество синих и красных точек соответственно. Выберем средние плоскости в множествах $R(\phi{,}\psi)$, $G(\phi{,}\psi)$ и $F(\phi{,}\psi)$ и обозначим их через $r(\phi{,}\psi)$, $g(\phi{,}\psi)$ и $f(\phi{,}\psi)$. Можно считать, что если смотреть по направление вектора $\vec{n}$,

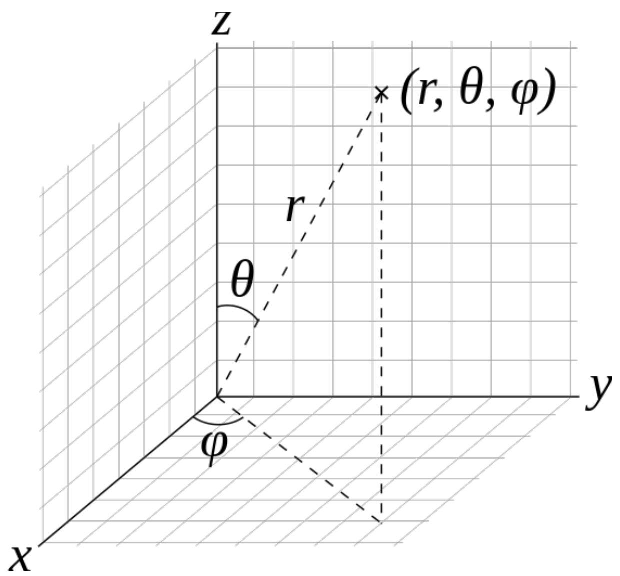

Рис. 6: Сферическая система координат

то $r(0,0)$ лежит выше $g(0,0)$ и $f(0,0)$, а $g(0,0)$ – между $r(0,0)$ и $f(0,0)$. Введем отображение A. Определим

$$A(0,0) = (dist(r(0,0); g(0,0)), -dist(g(0,0); f(0,0))),$$

где $d$ist означает расстояние между плоскостями. Таким же образом определим $A(\phi,\psi)$ для всех значений (ϕ,ψ) , причем знак перед расстоянием зависит от взаимного расположения плоскостей (по отношению к направлению нормального вектора). Заметим, что это отображение непрерывно при $\{0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\} \times \{-\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2\}$, и удовлетворяет следующему свойству $A(\phi,\psi) = -A(\phi+\pi, -\psi)$ для любого $\phi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Тогда остается доказать, что найдется такая пара (ϕ,ψ), при подстановки которой это отображение обнуляется.

Предположим $A(0,\pi/2) \neq (0,0)$. Зафиксируем произвольное ψ. Образ $A(\phi,\psi), \phi \in [0,2\pi]$ является замкнутой кривой (возможно точкой). Если $\psi = 0$, то из симметрии A следует, что такой образ является симметричным относительно $(0,0)$, и точка $(0,0)$ принадлежит внутренности, ограниченной этой замкнутой кривой. Если мы меняем параметр ψ, то тем самым мы непрерывно меняем внутренность замкнутой кривой. В частности, отсюда следует, что существует такое ψ_0, при котором $A(\phi,\psi_0) = (0,0)$ для некоторого ϕ. □

1.15. Пусть на плоскости дано $2m$ точек общего положения, из них m красных и m синих. Докажите, что их можно разделить на пары так, что точки в каждой паре разного цвета и отрезки, соответствующие парам, не будут пересекаться.

Доказательство. Будем нумеровать красные и синие точки от 1 до n, и соединим те пары (красная-синяя) из них, которые имеют одинаковый номер. Предположим, что не существует удовлетворяющей условии нумерации. Тогда рассмотрим такую нумерацию, при которой общая длина отрезков наименьшая, и пусть AB и CD - это два пересекающихся отрезка. Несложно проверить, что $AC + AD \leqslant AB + CD$ и $AD+BC \leqslant AB+CD$. Но это противоречит тому, что данная нумерация имеет минимальную общую длину отрезков. □

Будем обозначать прямую через $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, плоскость — через $\mathbb{R}^2$, а трёхмерное пространство — через $\mathbb{R}^3$. Проще всего воспринимать эти объекты следующим образом: $\mathbb{R}$ — это множество всевозможных вещественных (действительных) чисел, $\mathbb{R}^2$ — это множество всех пар $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, а $\mathbb{R}^3$ — множество всех троек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где $_1, _2, x_3 \in \mathbb{R}$. Аналогично определяется и $\mathbb{R}^n$. Элементами $\mathbb{R}^n$ являются векторы (точки) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = l,...,n$ (x_i — координаты).

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_d$ — некоторые действительные числа, не равные одновременно нулю, а a_0 — произвольное действительное число. Назовём *гиперплоскостью* в пространстве $\mathbb{R}^d$ множество таких точек $\mathbf{x}$, что $\sum\limits_{i=1}^{d} a_i x_i = a_0$, где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – координаты $\mathbf{x}$.

Контрольный вопрос. Что такое гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$?

Теорема о сэндвиче. Множества $A_1, \ldots, A_d \in \mathbb{R}^d$ — конечные. Тогда существует такая гиперплоскость l, что в каждом из полупространств, образованных данной гиперплоскостью, будет не более $\lfloor A_i/2 \rfloor$ точек из A_i (некоторые точки могли лежать в гиперплоскости).

Если в случае $d = 3$ заменить множества A_1, A_2, A_3 на хлеб, сыр и ветчину, то будет существовать такой разрез ножем (плоскость), что в каждом из полученных полупространств будет одинаковое количество каждого из ингридиентов.

1.16. Пусть в пространстве дано $3n$ точек общего положения, из них n красных, n синих и n зелёных. Докажите, что их можно разделить на тройки так, что точки в каждой тройке разного цвета и треугольники, соответствующие тройкам, не будут пересекаться.

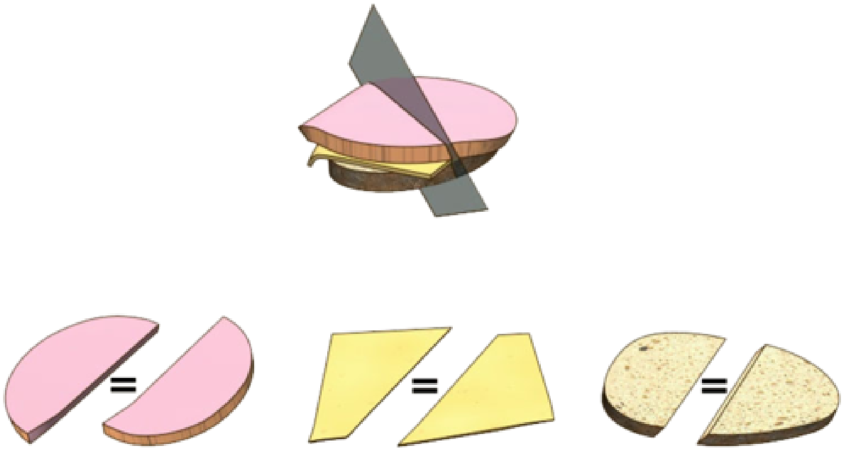

Рис. 7: Разрез сэндвича

Доказательство. Пусть A_i, $i = 1{,}2{,}3$ – это множество точек i-го цвета. Докажем индукцией по n. Если $n > 1$ нечетно, то существует плоскость h, делящая пополам каждое A_i и содержащая ровно по одной точке каждого цвета. Тогда пусть точки в h образуют треугольник. Далее рассматриваем каждое из открытых полупространств и пользуемся индукцией. Если n четно, опять воспользуемся теоремой о сэндвиче, которая говорит, что существует плоскость делящая пополам каждое из A_i. Опять рассматриваем каждое из полупространств и пользуемся индукцией. В конечном счете, придем к ситуации, когда все точки будут поделены на разноцветные тройки, образующие непересекающиеся треугольники. $\square$

1.17.* Два вора украли ожерелье с двумя концами, состоящее из платиновой цепочки, на которую нанизаны драгоценные камни d видов. Они не знают ценности каждого камня, поэтому хотят поделить камни каждого вида поровну (известно, что камней каждого вида четное количество). Чтобы потерять как можно меньше платины, воры хотят сделать наименьшее число разрезов. Могут ли они поделить ожерелье с помощью

а) $(d - 1)$ разрезов?

б) d разрезов?

Комментарий. Эту задачу проще воспринимать, если решить задачи на отображение Веронеза.

Доказательство. а) Заметим, что нам может не хватить $d - 1$ разрезов. Для доказательства этого достаточно рассмотреть ожерелье, в котором сначала идут все драгоценные камни первого вида, после них - второго вида и т.д.

б) Расположим рассматриваемое ожерелье в пространстве $\mathbb{R}^d$ вдоль

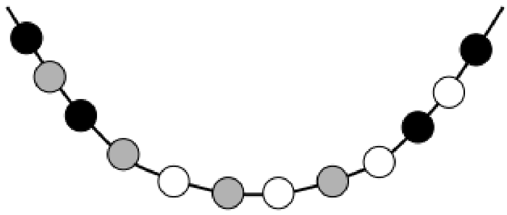

Рис. 8: Для данного ожерелья достаточно 3 разрезов

так называемой кривой моментов γ. Пусть $\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$ параметрическая запись этой кривой γ. Будем считать, что у ожерелья n камней. Тогда определим

$$A_i = \{\gamma(k) : \text{k-й камень является представителем i-го вида}, \ k = 1, 2, \ldots n\}.$$

Тогда множество A_i представляет собой все камни i-го вида. По теореме о сэндвиче существует гиперплоскость h, которая одновременно делит множества A_i пополам. Заметим, что h пересекает кривую γ в не более чем d точках. Тогда очевидно, что соответствующие этой гиперплоскости d разрез являются требуемыми. $\square$

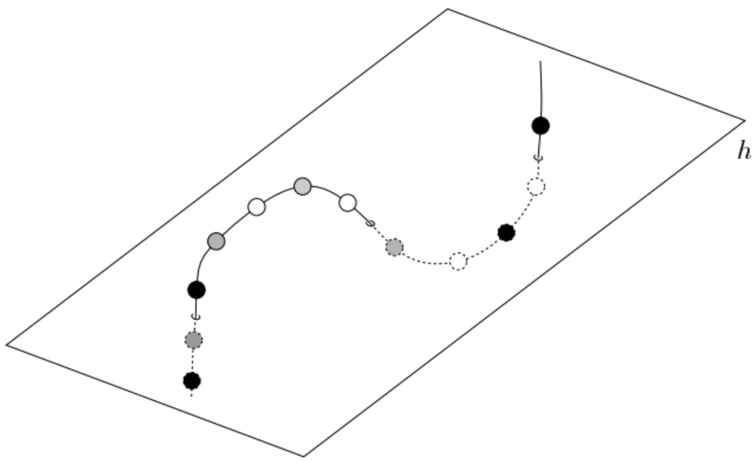

Рис. 9:

2 Конструктивная геометрия

Мы будем говорить, что n точек и n прямых на плоскости образуют *конфигурацию* n_d из точек и прямых, если на любой данной прямой лежит ровно d данных точек и через любую данную точку проходит ровно d данных прямых. Т.е. число инциденций будет равно nd.

2.1. Постройте пример конфигурации 9_3.

(*Подсказка*: используйте известную геометрическую теорему)

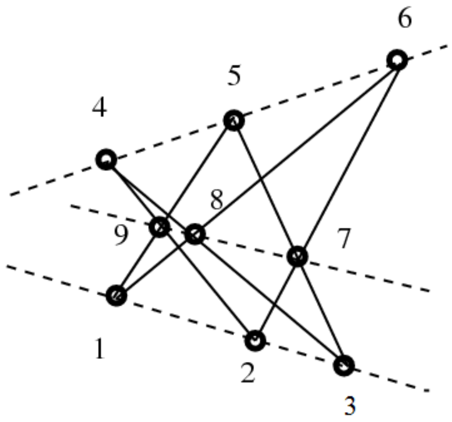

Рис. 10: Конфигурация Паппа 9_3

2.2.Постройте пример конфигурации 9_3, отличной от той, что возникла в 2.1.

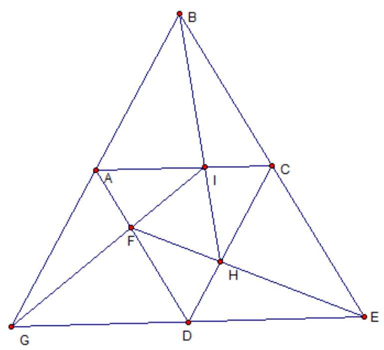

Рис. 11:

2.3. Постройте пример конфигурации 10_3.

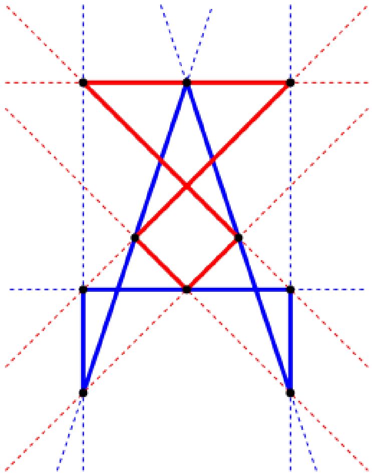

Рис. 12: Конфигурация Дезарга 10_3

2.4. Постройте пример конфигурации 10_3, отличной от той, что возникла в 2.3.

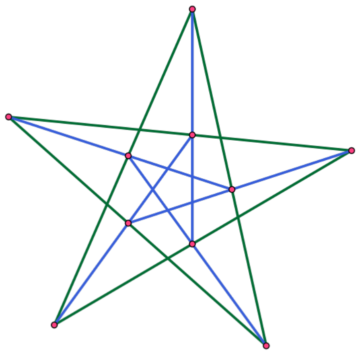

Рис. 13:

2.5.* Докажите, что найдется такая константа C, что для любого N найдутся такие $n > N$ прямых и $n > N$ точек, что число инциденций задаваемое этими наборами прямых и точек на плоскости больше, чем $Cn^{4/3}$.

Подсказка (после промежуточного финиша). Обратите внимание на картинку на первой странице.

Доказательство. Для простоты будем считать, что $n = 4k^3$ при некотором k. Докажем, что $I(n,n) \gtrsim n^{4/3}$ для некоторой пары (L,P). Для выбора P рассмотрим точки целочисленной решетки $\{0,1,\ldots k\}\times\{0,1,\ldots 4k^2-1\}$. Для выбора L возьмем все прямые вмдв $y = ax+b$, где $(a,b) \in \{0,1,\ldots 2k-1\} \times \{0,1,\ldots 2k^2-1\}$. Тогда для $x \in [0;k)$ имеем $ax+b < ak+b < 2k^2+2k^2 = 4k^2$, таким образом, для каждого $i = 0;\ldots k_i - 1$ каждая линия содержит точку P, у которой $x = i \in \{0,1,\ldots k\}$. Следовательно, $I(L,P) \approx k^4 \approx n^{4/3}$ $\square$

3 Алгебраические мотивы в геометрии

Под записью $g(x) = O(f(x))$ будем подразумевать, что существует такая постоянная $C > 0$, что $|g(x)| \leqslant Cf(x)$ выполняется при любом x.

Дан многочлен $f(x, y)$. Mножеством нулей Z_f многочлена $f(x, y)$ называется множесто всех точек (x, y), для которых $f(x, y) = 0$. Назовем степенью многочлена число равное наибольшему значению $i + j$ среди всех мономов вида $x^i y^j$ с ненулевым коэффициентом. Степень многочлена $f(x, y)$ будем обозначать через $\deg f$.

3.1. Дан многочлен $f(x, y)$ степени d и произвольная прямая l. Докажите, что либо прямая l пересекает множество Z_f не более, чем по d точкам, либо прямая l целиком содержится в множестве Z_f.

Доказательство. Запишем l в параметрической форме $\{(u_1t + v_1, u_2t + v_2) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Тогда получаем, что то точки $l \cap Z(f)$ есть корни полинома $g(t) := f(u_1t + v_1, u_2t + v_2)$, чья степень не превосходит D. Значит, либо g есть тождественный 0, либо имеет не более D корней. $\square$

3.2. Дан многочлен $f(x, y)$ степени d. Докажите, что число прямых которые содержатся в множестве Z_f не превосходит d.

Доказательство. Зафиксируем точку $P \in \mathbb{R}^2$, не принадлежащую множеству $Z(f)$. Будем считать, что это множество $Z(f)$ содержит прямые $l_1, \dots l_k$. Выберем прямую l, проходящую через P, и которая не параллельна ни одной из прямых l_i и не проходит через ни через одну из точек пересечения $l_i \cap l_j$. (Очевидно, что такая прямая l существует в силу того, что имеется лишь конечное число направлений прямых l_i и конечное число точек их пересечений.) Тогда l не содержится в $Z(f)$ и имеет k пересечений с $\cup_{i=1}^{k} l_i$. Воспользуемся результатом предыдущей задачи, тогда $k \leqslant D$. $\square$

3.3. Покажите, что количество мономов степени не выше d от двух переменных равно $\binom{d+2}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$.

Многочлен $f(x; y)$ будем называть **r-делящим** (где $r > 1$) для данного конечного множества точек $A \subset \mathbb{R}^2$ (где $|A| = n$), если в каждой компоненте связанности множества $\mathbb{R}^2 \setminus Z_f$ будет содержаться не более n/r точек из A.

3.4. Докажите, что для данного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ (где $|A| = n$) существует многочлен степени r, который будет r-делящим.

Определение. Пусть d — произвольное натуральное число, а $D = \binom{d+2}{2} - 1$. *Отображением Веронезе степени d* назовем отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^D$, заданное следующей формулой:

$$\varphi(x,y) := (x^i y^j)_{(i,j)|1\leqslant i+j\leqslant d} \in \mathbb{R}^D.$$

(Каждой координате в $\mathbb{R}^D$ соответствует пара (i,j), для которой выполняется неравенство $1 \leqslant i + j \leqslant d$.)

Заметим, что с помощью применения отображения Веронезе степени 2 можно показать, что для любых пяти точек, среди которых нет четырех, лежащих на одной прямой, существует единственная коника, проходящая через эти точки (коникой называется множество нулей многочлена от двух переменных степени 2). Для этого необходимо провести гиперплоскость через образы данных пяти точек (в нашем случае D=5 и можно показать, что через пять образов точек можно провести единственную гиперплоскость) при отображении Веронезе и рассмотреть конику, уравнение которой имеет те же коэффициенты, что и данная гиперплоскость.

3.5. Даны конечные множества $A_1, \ldots, A_k$. Пусть l - произвольное натуральное число, причем $\binom{l+2}{2} - 1 \geqslant k$. Докажите, что существует многочлен степени не выше l, который будет 2-делящим многочленом для каждого из данных множеств.

Доказательство. Воспользуемся задачей 3.3, утверждающей, что числу мономов от двух переменных степени не выше l равно $\binom{l+2}{2}$. Пусть $D := \binom{l+2}{2} - 1$, и определим $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^D$ *отображение Веронезе*, заданное следующим образом

$$\phi(x,y) := (x^i y^j)_{(i,j)|1\leqslant i+j\leqslant l} \in \mathbb{R}^D.$$

(Координатам в $\mathbb{R}^D$ соответствует пара (i,j), для которой $1 \leqslant i + j \leqslant l$.)

Определим образы $A'_i := \phi(A_i)$, $i = 1,2,\ldots,k$, тогда по теореме о сэндвиче существует гиперплоскость h, делящая пополам множества $A'_1,\ldots,A'_k$. Очевидно, что h можно записать в форме уравнения $a_{00} + \sum\limits_{i,j} a_{i\,j} z_{i\,j} = 0$, где $(z_{i\,j})_{(i,j)|1\leqslant i+j\leqslant l}$ являются координатами в $\mathbb{R}^D$. Легко проверить, что многочлен $f(x,y) := \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ является требуемым. □

3.6. Докажите, что для данного множества $P \subset \mathbb{R}^2$ (где $|P| = n$) существует многочлен степени не выше $c\sqrt{r}$, который будет r-делящим (например, можно показать, что $c < 7$)

Доказательство. Будем строить по индукции набор $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots$, каждый элемент которого состоит из непересекаемых подмножеств множества P, причем число подмножеств в каждом элементе $|\mathcal{P}_j| \leqslant 2^j$ для любого j. Начнем с $\mathcal{P}_0 := \{P\}$. Тогда, построив $\mathcal{P}_j$, воспользуемся предыдущей задачей, чтобы построить многочлен f_j степени $deg(f_j) \leqslant \sqrt{2 \cdot 2^j}$, который делит пополам каждое из подмножеств, входящих в $\mathcal{P}_j$. Для любого $Q \in \mathcal{P}_j$ определим Q^+ как множество, состоящее из точек Q, для которых выполнено $f_j > 0$, а Q^- состоит из таких точек Q, что $f_j < 0$. Положим $\mathcal{P}_{j+1} := \cup_{Q \in \mathcal{P}_j}\{Q^+, Q^-\}$.

Каждое из множеств, входящее $\mathcal{P}_j$ имеет размер не более $|P|/2^j$. Пусть $t = \lceil \log 2r \rceil$; тогда каждое из $\mathcal{P}_t$ имеет размер не более $|P|/r$. Определим $f := f_1 f_2 \ldots f_t$. Как видно из построения конструкции, ни одна из связанных компонент $\mathbb{R}^2 \backslash Z(f)$ не может содержать точки двух различных множеств, входящих в $\mathcal{P}_t$, поскольку для любой кривой, соединяющей две точки из разных множеств, найдется точка на ней, в которой один из многочленов f_j обнуляется, а потому эта кривая пересекает $Z(f)$. Таким образом, f является r-делящим многочленом для P. Осталось оценить степень

$$deg(f) = deg(f_1) + deg(f_2) + \cdots + deg(f_t) \leqslant \sqrt{2} \sum_{j=1}^{t} 2^{j/2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2}-1} 2^{t/2} \leqslant c\sqrt{r},$$

где $c = 2\sqrt{2}/(\sqrt{2}-1) < 7$. $\square$

4 Первое доказательство теоремы Семереди-Троттера

4.1. Докажите, что $I(m,n) = I(n,m)$.

Доказательство. Если совершить полярное преобразование, то прямые перейдут в точки, а точки в прямые. При этом инцидентные пары прямая-точка перейдут в инцидентную пару прямая-точка (а неинцидентные соотвественно в неинцидентные). Таким образом, конфигурацию на которой число и инциденций равно $I(n,m)$ можно перевести с помощью полярного преобразования в конфигурацию с таким же числом инциденций. Но прямые и точки поменялись местами. Поэтому $I(m,n) \geqslant I(n,m)$. Аналогично можно получить обратное неравенство. Тем самым удается решить задачу. □

Если применить оценку из задачи 1.8 сразу, то мы не получим доказательство теоремы Семереди-Троттера.

Далее будем считать, что $|L| = |P| = n$. Построим r-делящий многочлен $f(x,y)$ для данного множества точек P.

Обозначим через $L_0 \subset L$ множество таким прямых, что $l \in L$ и $l \subset Z_f$, а через $P_0 \subset P$ множество точек $p \in P \cap Z_f$. Пусть многочлен f поделил плоскость на s частей: точки в i-ой части будем обозначать через P_i, а прямые который пересекают i-ую часть через L_i.

4.2. Докажите, что существуют такие константы C_1, C_2, C_3, что

а) $I(L_0, P_0) \leqslant C_1 n\sqrt{r}$;

б) $I(L \setminus L_0, P_0) \leqslant C_2 n\sqrt{r}$;

в) $\sum\limits_{i=1}^{s} I(L_i, P_i) \leqslant C_3(n\sqrt{r} + n^2/r)$.

Доказательство. а) Так как число прямых, содержащихся в Z_f не превосходит $\deg f$ (не превосходящей $C_1\sqrt{r}$ для некоторой константы C_1), см. задачи **3.2** и **3.6**, а число точек в множестве P_0 не превосходит n, то из тривиальной оценки получаем $I(L_0, P_0) \leqslant C_1 n\sqrt{r}$.

б) Так как любая прямая из $L \setminus L_0$ пересекает Z_f не более, чем в $\deg f$ точках, так как $\deg f \geqslant {}_1\sqrt{r}$, то $I(L \setminus L_0, P_0) \leqslant C_1 n\sqrt{r}$.

в) Из задачи **1.8** следует, что

$$\sum_{i=1}^{s} I(L_i, P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \left(|L_i| + |P_i|^2\right)$$

Обозначим $D = deg(f) = O(\sqrt{r})$. Тогда $\sum_{i=1}^{s} |L_i| = O((D+1)n) = O(\sqrt{r}n)$, поскольку нет прямой которая пересекает больше, чем $D+1$ множество из P_i. В итоге мы получаем

$$\sum_{i=1}^{s} |P_i|^2 \leqslant (\max_i |P_i|) \cdot \sum_{i=1}^{s} |P_i| = O(n^2/r).$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{s} I(L_i, P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \left(|L_i| + |P_i|^2\right) = O(\sqrt{r}n + n^2/r).$$

□

4.3. Выбрав нужное r, докажите теорему Семереди-Троттера.

Доказательство. Выбирая $r = n^{2/3}$, мы получаем доказательство в случае $n = m$. □

4.4. Докажите теорему Семереди-Троттера в общем случае:

Теорема Семереди-Троттера. $I(n,m) = O((nm)^{2/3} + n + m)$.

Для этого нужно получить оценки, аналогичные тем, что были получены в задаче 4.2.

Доказательство. Мы обобщим доказательство для произвольного m следующим образом. Без ограничения общности мы можем считать, что $m \leqslant n$. Предположим, что $\sqrt{n} \leqslant m$, так как иначе теорема следует из задачи **1.8**. Тогда мы положим $r := \frac{m^{4/3}}{n^{2/3}}$. Заметим, что $1 \leqslant r \leqslant m$ для указанных m. Тогда мы продолжим доказательство, как и в случае $m = n$. Мы получаем, что $D = deg(f) = O(m^{2/3}n^{1/3})$ и далее проверяем, что все остальные оценки равны $O(m^{2/3}n^{2/3})$. □

5 Применение теоремы Семереди-Троттера

5.1. а) Докажите, что число прямых, что каждая из которых содержит по крайней мере k различных точек m-элементного множества P, равно $O(m^2/k^3 + m/k)$.
б) Докажите, что такие прямые задают $O(m^2/k^2 + m)$ инциденций с данным множеством точек P.

5.2. (*Теорема Бека*) Пусть P — множество точек на плоскости, а L — множество прямых, образованных по крайней мере двумя точками из P. Тогда найдутся такие константы $c_1, c_2 > 0$, что выполняется одно из двух условий:

1. Найдется прямая из L, которая содержит по крайней мере $c_1|P|$ точек.

2. $|L| \geqslant c_2|P|^2$.

5.3. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — конечное множество. Тогда

$$\max\{|A + A|; |A \cdot A|\} \geqslant |A|^{5/4}.$$

Здесь

$$A + A = \{a_1 + a_2 : a_1 \in A, a_2 \in A\}, A \cdot A = \{a_1 \dot{a}_2 : a_1 \in A, a_2 \in A\}.$$

Решение смотрите в [2], стр.15–17, [7].

Список литературы

[1] *P. Brass, W. Moser, J. Pach* Research Problems in Discrete Geometry Springer, New York, 2005.

[2] *Zeev Dvir* Incidence Theorems and Their Applications, http://www.cs.princeton.edu/ zdvir/papers/Dvir-survey.pdf

[3] *Jiri Matousek* Lectures on Discrete Geometry // Springer, 2002.

[4] *Jiri Matousek* Using the Borsuk-Ulam theorem // Springer, 2003.

[5] *Haim Kaplan*, *Jiri Matousek*, *Micha Sharir* Simple Proofs of Classical Theorems in Discrete Geometry via the Guth–Katz Polynomial Partitioning Technique, http://arxiv.org/abs/1102.5391v1

[6] *Endre Szemeredi, William T. Trotter* (1983). Extremal problems in discrete geometry, Combinatorica **3** (3–4): 381–392

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Szemeredi-Trotter_theorem