

# Половинчатые графы

Задачу представляют И. Богданов, К. Кохась

В этой серии задач мы будем иметь дело с *геометрическими графами*, т. е. с графами, изображенными на плоскости. В геометрическом графе никакие три вершины не лежат на одной прямой, а ребра изображаются отрезками (которые могут пересекаться не в вершине). Вот два примера геометрических графов, представляющих для нас основной интерес.

Определение. 1) *Половинчатым* графом  $G(n)$  назовем граф, получающийся следующей конструкцией. Пусть на плоскости нарисовано  $n$  (четное число) точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Это вершины графа. Ребро соединяет две вершины, если прямая, содержащая это ребро, делит множество вершин на две равные части (т. е. в ее полуплоскостях поровну оставшихся вершин).

2) Рассмотрим более общую ситуацию — определим  *$k$ -отделяющий граф*  $G_k(n)$ . Пусть  $k$  и  $n$  — натуральные числа,  $n > 2k + 2$  (при этом  $n$  уже не обязательно четное). Нарисуем на плоскости множество  $\mathcal{S}$  из  $n$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Ориентированное ребро соединяет две точки  $A$  и  $B$ , если прямая  $AB$  делит множество точек на две части, в одной из которых  $k$  точек. Эта часть должна находиться в полуплоскости, которая расположена *справа* от прямой, если двигаться от  $A$  к  $B$ . Множество вершин графа  $G_k(n)$  — это те точки множества  $\mathcal{S}$ , из которых выходит или в которые входит хотя бы одно ребро. Если нужно подчеркнуть зависимость построенного графа  $G_k(n)$  от начальной конфигурации точек, будем его обозначать также  $G_k(\mathcal{S})$ .

## 1 Вершины

- 1.1. Докажите, что в половинчатом графе нет изолированных вершин.
- 1.2. Если  $n$  — число точек конфигурации — фиксировано, то какие значения может иметь степень по задаче вершины в графе  $G(n)$ ?
- 1.3. Может ли половинчатый граф  $G(50)$  иметь ровно 50 вершин: 25 вершин степени 1 и 25 вершин степени 3?
- 1.4. Докажите, что любой  $k$ -отделяющий граф  $G_k(n)$  содержит не менее  $2k + 3$  вершин.
- 1.5. а) Докажите, что при  $n \geq 6$  половинчатый граф имеет не более трех вершин степени  $n - 3$ .  
б) Сколько именно вершин степени  $n - 3$  может иметь половинчатый граф?
- 1.6. Существует ли половинчатый граф, у которого 8 вершин и 9 ребер?
- 1.7. Докажите, что в половинчатом графе со 100 вершинами не более 60 вершин имеют степень 41.

## 2 Свойства графов

- 2.1. Докажите, что если в половинчатом графе  $G(2n)$  ровно  $n$  ребер, то отрезки, изображающие ребра, попарно пересекаются.
- 2.1 $\frac{1}{2}$ . На плоскости нарисован геометрический ориентированный граф. Докажите, что ни при каких  $n$  и  $n'$  он не может оказаться одновременно графом  $G_{10}(n)$  и графом  $G_{15}(n')$ .
- 2.2. Докажите, что в половинчатом графе не может быть гамильтонова пути (т. е. пути, проходящего по всем вершинам ровно по одному разу).
- 2.3. Пусть  $n = 103$ . При каких  $k$  можно утверждать, что  $k$ -отделяющий граф  $G_k(n)$  заведомо является связным?
- 2.4. Докажите, что каждая компонента связности  $k$ -отделяющего графа  $G_k(n)$  имеет эйлеров путь (путь, проходящий по всем ребрам по одному разу).
- 2.5. Докажите, что если при некотором  $n$  построены половинчатые графы с  $k_1$  и  $k_2$  ребрами, то для любого  $m$ ,  $k_1 \leq m \leq k_2$ , существует половинчатый граф с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами.
- 2.6. а) Пусть на плоскости нарисован  $k$ -отделяющий граф  $G_k(\mathcal{S})$  и пусть  $\mathcal{S}'$  — множество его вершин. Докажите, что этот граф есть граф вида  $G_{k'}(\mathcal{S}')$  при подходящем выборе  $k'$ .  
б) Докажите, что каждая компонента связности графа  $G_k(n)$  является графом вида  $G_{k'}(n')$ .
- 2.7. а) Докажите, что любой граф является подграфом подходящего половинчатого графа.  
б) Докажите, что любой граф является индуцированным подграфом подходящего половинчатого графа.

### 3 Выпуклые цепочки и мельницы

Разобьем половинчатый граф на «выпуклые цепочки». Для этого развернем его так, чтобы ни одна из прямых, соединяющих вершины, не была вертикальной, и проведем вертикальную прямую (не проходящую через вершины), по сторонам от которой расположено поровну вершин графа. Теперь проведем вертикальную прямую  $\ell$  через самую левую вершину  $V_1$ . Будем вращать прямую  $\ell$  по часовой стрелке вокруг  $V_1$ , пока она не совпадет с каким-нибудь ребром половинчатого графа, скажем, с  $V_1V_2$ . Продолжим вращение прямой теперь уже вокруг вершины  $V_2$ , пока она не наткнется на следующее ребро  $V_2V_3$  и т. д. Если в какой-то момент прямая снова станет вертикальной, остановим процесс, и скажем, что построенная ломаная  $V_1V_2V_3\dots$  является *выпуклой цепочкой*. После этого начнем строить новую цепочку, взяв в качестве стартовой точки самую левую из вершин, у которой есть ребро, не принадлежащее ни одной из уже построенных цепочек. В результате весь граф окажется разбит на выпуклые цепочки. Это разбиение зависит от того, какое направление мы изначально выбрали в качестве вертикального.

**3.1.** Докажите, что в результате описанного процесса половинчатый граф будет представлять собой объединение  $n/2$  выпуклых цепочек, каждая из которых начинается в левой полуплоскости, заканчивается в правой, и при этом никакие две цепочки не имеют общих ребер.

**3.2.** Докажите, что для любых двух вершин половинчатого графа сумма их степеней не превосходит  $n$ .

В следующих задачах мы считаем, что на плоскости дано конечное множество точек  $\mathcal{S}$ , никакие три из которых не лежат на одной прямой.

**Определение.** *Мельницей* будем называть следующий процесс. Выберем прямую  $\ell$ , проходящую через ровно одну точку  $T \in \mathcal{S}$ . Будем вращать эту прямую по часовой стрелке до того момента, когда на ней впервые появится еще одна точка из множества  $\mathcal{S}$ , назовем ее  $U$ . Далее будем продолжать вращать прямую по часовой стрелке, но теперь уже вокруг точки  $U$ , пока на ней не появится еще одна точка множества  $\mathcal{S}$  и т. д.

**3.3.** Докажите, что можно выбрать точку  $T$  и начальную прямую  $\ell$  так, что каждая точка множества  $\mathcal{S}$  побывает центром вращения мельницы бесконечно много раз.

**3.4.** Докажите, что для любого множества  $\mathcal{S}$  можно так запустить мельницу, что каждая точка плоскости в какой-то момент побывает на прямой  $\ell$ .

**3.5.** Докажите, что в любом множестве  $\mathcal{S}$  есть такая точка, что любая мельница, запущенная из нее, посещает все вершины.

**3.6.** Пусть на плоскости отмечены точки общего положения и прямая  $a$ , не проходящая через них. Покрасим точки с одной стороны от нее (пусть их  $K$  штук) в красный цвет, а с другой стороны (пусть их  $M$  штук) — в синий. Докажите, что для любых  $k < K$ ,  $m < M$  существует прямая  $b$  такая, что по одну сторону от нее лежат ровно  $k$  красных и ровно  $m$  синих точек.

### 4 Экстремальные задачи

**4.1.** а) Может ли при каком-нибудь  $n$  половинчатый граф с  $n$  вершинами иметь больше  $2013n$  ребер?  
б) Может ли граф  $G_{10}(n)$  при каком-нибудь  $n$  иметь  $2013n$  ребер?

**4.2.** Какое наибольшее число ребер может иметь путь в половинчатом графе  $G(n)$ ?

**4.3.** Какое наибольшее число ребер может иметь цикл в половинчатом графе  $G(n)$ ?

**4.4.** Докажите, что полный подграф с  $k$  вершинами может быть подграфом половинчатого графа, в котором а) порядка  $k^3$  вершин; б) порядка  $k^2$  вершин.

**4.5.** Докажите, что оценка из пункта б) предыдущей задачи асимптотически точная, а именно, если половинчатый граф с  $n$  вершинами содержит клику с  $k$  вершинами, то  $n \geq [k^2/2]$ .

**4.6.** Обозначим через  $e_{k,n}$  наибольшее число ребер, которое может иметь  $k$ -отделяющий граф  $G_k(n)$ . Докажите, что  $e_{2n,2k+1} \geq 2e_{n,k} + n$ .

**4.7.** Докажите, что в графе  $G_k(n)$  при  $k < (n-2)/2$  не более  $4\sqrt{(k+1)(n-k-1)n}$  ребер.

### 5 Круговые последовательности

В этой серии задач мы предлагаем один подход к задаче 4.7; он связан с переформулировкой на другом языке. Поэтому задачи этой серии почти не связаны с остальными задачами.

**Определение.** 1) *Круговой  $n$ -последовательностью* будем называть (конечную) последовательность перестановок множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , состоящую из  $C_n^2 + 1$  перестановок, в которой

а) каждая следующая перестановка отличается от предыдущей только положением каких-то двух рядом стоящих чисел, будем называть это изменение порядка чисел *флипом*; флип, переставляющий элементы на местах с номерами  $k$  и  $k+1$ , будем называть  $k$ -*флипом*;

б) в последней перестановке все элементы расставлены в противоположном порядке (в сравнении с первой перестановкой);

в) любые два числа из исходного множества присутствовали вместе ровно в одном флипе.

2) *Двойная круговая  $n$ -последовательность* — это последовательность перестановок множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , состоящая из  $2C_n^2 + 1$  перестановок, в которой первые  $C_n^2 + 1$  перестановок представляют собой круговую последовательность, а последние  $C_n^2 + 1$  перестановок — ее «зеркальное отражение». Точнее говоря, если в  $i$ -й перестановке элементы множества были расставлены в некотором порядке и выполнялся  $k$ -флип, меняющий местами числа  $a$  и  $b$ , то в  $(C_n^2 + i)$ -й перестановке элементы множества расставлены в противоположном порядке и выполнется  $(n - k)$ -флип, меняющий местами эти же числа  $a$  и  $b$ .

Некоторые круговые последовательности могут быть получены геометрически: рассмотрим в плоскости множество  $\mathcal{S}$  из  $n$  точек общего положения; мы предполагаем, что прямые, соединяющие эти точки, попарно непараллельны. Будем проектировать наши точки на прямую, поворачивающуюся вокруг фиксированного центра. Порядок проекций точек при повороте прямой на  $180^\circ$  — это круговая последовательность, а при повороте прямой на  $360^\circ$  — двойная круговая последовательность.

3) Множество  $\mathcal{P} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  будем называть *полуплоскостью* (относительно круговой  $n$ -последовательности  $\mathcal{T}$ ), если элементы множества  $\mathcal{P}$ , расположенные в некотором порядке, являются начальным фрагментом хотя бы одной из перестановок, составляющих  $\mathcal{T}$ . Если множество  $\mathcal{P}$  состоит из  $k$  элементов, будем называть его также  $k$ -множеством. Количество  $k$ -множеств в двойной круговой последовательности  $\mathcal{T}$  будем обозначать  $s_k(\mathcal{T})$ .

**5.1.** Докажите, что в любой двойной круговой последовательности  $\mathcal{T}$  число  $k$ -флипов в точности равно числу  $k$ -множеств  $s_k(\mathcal{T})$ .

**5.2.** Докажите, что для любой двойной круговой  $n$ -последовательности  $\mathcal{T}$  выполнено равенство  $\sum_{k=1}^{n-1} s_k(\mathcal{T}) = n(n-1)$ .

**5.3.** Пусть  $S_k(n)$  — наибольшая из сумм вида  $\sum_{i=1}^k s_i(\mathcal{T})$ , где максимум берется по всем двойным круговым  $n$ -последовательностям  $\mathcal{T}$ . Докажите, что  $S_k(n) = kn$  при  $1 \leq k < n/2$ .

**5.4.** Пусть двойная круговая  $n$ -последовательность  $\mathcal{T}$  построена по множеству  $\mathcal{S}$ . Докажите, что количество ребер в графе  $G_k(\mathcal{S})$  равно  $s_{k+1}(\mathcal{T})$  при  $1 \leq k \leq (n-2)/2$ .

**5.5.** Верно ли, что всякая круговая  $n$ -последовательность реализуется геометрически?

**5.6.** Пусть  $\mathcal{T}$  — круговая  $n$ -последовательность,  $P$  — первая перестановка из  $\mathcal{T}$ ,  $P = XYZ$ , причем длина подстроки  $Y$  равна  $y$  (а подстроки  $X$  и  $Z$  могут быть и пустыми), наконец, пусть  $1 \leq k \leq n-1$ . Докажите, что количество  $k$ -флипов в  $\mathcal{T}$ , затрагивающих числа из  $Y$ , не превосходит  $C_y^2 + 2k$ .

**5.7.** Докажите, что существует такое число  $C$ , что для всех двойных круговых  $n$ -последовательностей  $\mathcal{T}$  при  $1 \leq k \leq n/2$  выполнено неравенство  $s_k(\mathcal{T}) \leq Cn\sqrt{k}$ .

## 6 Пересечения и максимальные количества ребер

**Определение.** Назовем *пересечением* пару ребер геометрического графа, имеющих общую точку, не являющуюся их общим концом. В этой серии мы изучаем возможное количество пересечений в графах.

**6.1.** Пусть  $V$  — множество вершин половинчатого графа,  $|V| = n$ ,  $n$  — четное. Для каждой вершины  $v \in V$  обозначим через  $d_v$  степень этой вершины. Пусть  $X$  — количество пересечений в этом графе. Докажите, что

$$X + \sum_{v \in V} C_{(d_v+1)/2}^2 = C_{n/2}^2.$$

**6.2.** Пусть  $10^6 n < e < 10^{-6} n^2$ . Докажите, что существует геометрический граф, в котором  $n$  вершин,  $e$  ребер, а количество пересечений не превосходит  $10^6 e^3 / n^2$ .

**6.3.** Докажите, что существует такое число  $c > 0$ , что при  $e > 100n$  в геометрическом графе с  $n$  вершинами и  $e$  ребрами имеется не менее  $c \cdot e^3 / n^2$  пересечений.

**6.4.** Докажите, что число ребер в половинчатом графе с  $n$  вершинами не превосходит  $Cn^{4/3}$ , для некоторой константы  $C$ , не зависящей от  $n$  и от графа.